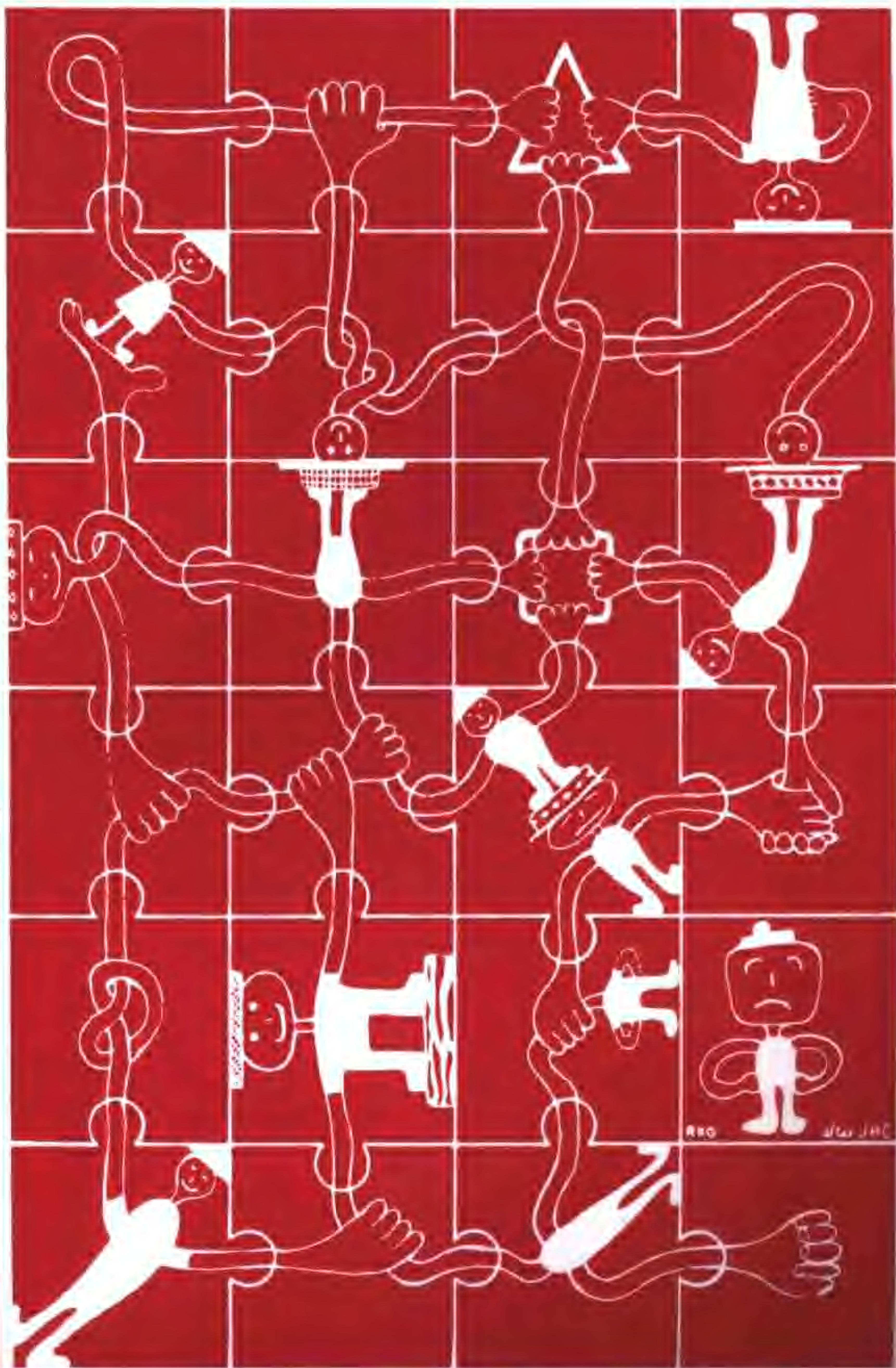
稳操胜券

下

通俗数学名著译丛

埃尔温·伯莱坎普
约翰·康威
理查德·盖伊 著
谈祥柏 译

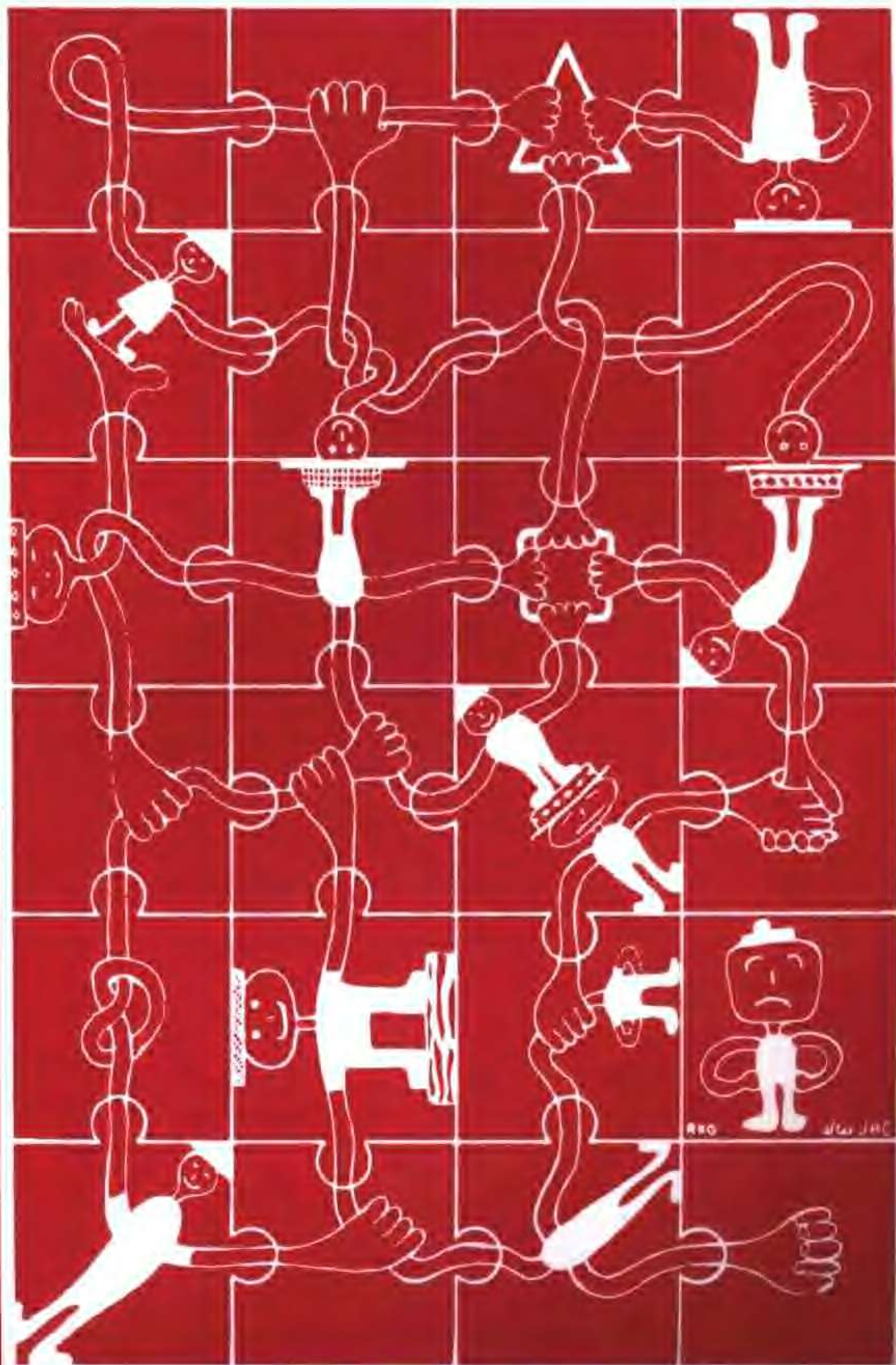


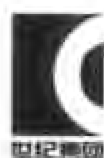
稳操胜券

通俗数学名著译丛

下

埃尔温·伯莱坎普
约翰·康威
理查德·盖伊 著
谈祥柏 译





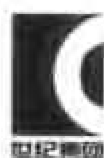
责任编辑　叶中豪
封面设计　陆　弦



ISBN 7-5320-9220-8



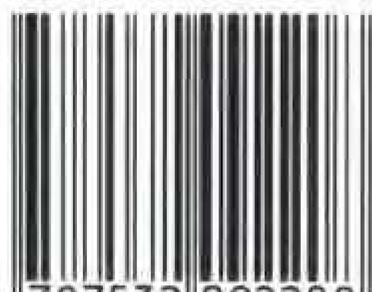
9 787532 092208 >
易文网：www.ewen.cc
定　价：55.00 元



责任编辑　叶中豪
封面设计　陆　弦



ISBN 7-5320-9220-8



9 787532 092208 >
易文网：www.ewen.cc
定　价：55.00 元

稳操胜券

通俗数学名著译丛

下

埃尔温·伯莱坎普
约翰·康威
理查德·盖伊 著
谈祥柏 译



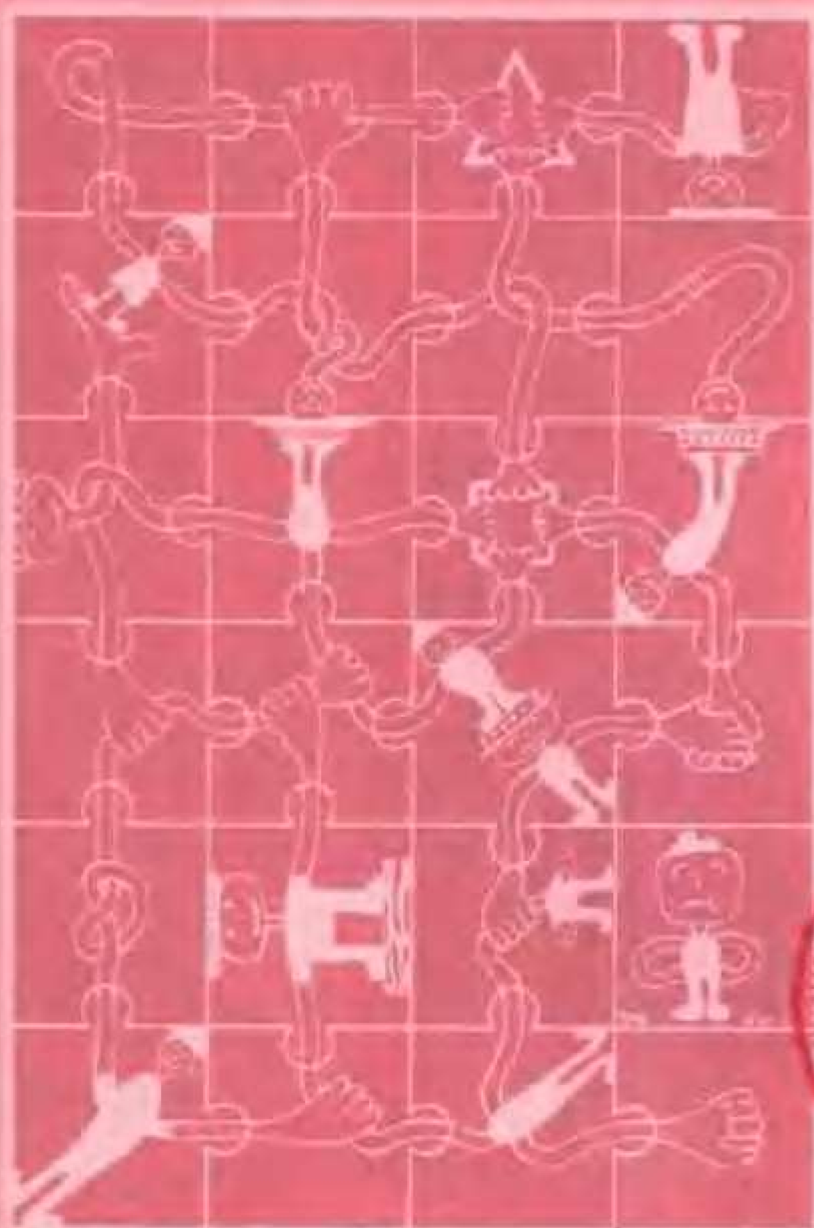



上海教育出版社
SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

稳操胜券

通俗数学名著译丛

下





埃尔温·伯莱坎普
约翰·康威
理查德·盖伊 著
谈祥柏 译



上海教育出版社
SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

Elwyn R. Berlekamp
John Conway
Richard Guy
Winning Ways
for your mathematical plays (II)
Academic Press

根据学术出版社1982年第1版译出
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

图书在版编目(CIP)数据

稳操胜券．下册／(英)伯莱坎普等著；谈祥柏译．上海：上海教育出版社．2003.12
(通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编)
ISBN 7-5320-9220-8

Ⅰ.稳... Ⅱ.①伯... ②谈...Ⅲ.对策(数学)-通俗读物 Ⅳ.O225-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第125852号

通俗数学名著译丛
稳操胜券
下 册
埃尔温·伯莱坎普 等著
谈祥柏 译
上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行
易文网：www.ewen.cc
(上海永福路123号 邮政编码：200031)
各地新华书店经销 昆山市亭林印刷有限责任公司印刷
开本850×1156 1/16 印张33.75 字数728,000
2003年12月第1版 2003年12月第1次印刷
印数1-5,000本
ISBN 7-5320-9220-8/O·0027 定价：55.00元

献　给

马丁·加德纳

他把数学传播给广大群众，

比任何别人干得更加出色.

作者小传



埃尔温·伯莱坎普(Elwyn Berlekamp),1940 年 9 月 6 日生于美国俄亥俄州多佛市.在伯克莱加利福尼亚大学当了两年助教授并在贝尔电话实验室工作了五年之后,他在 1971 年当上了该校数学、电机工程与计算机科学的教授.

他的著作《代数编码理论》曾荣获美国电子学会信息论组的最佳科研著作奖.埃塔·卡柏·纽学会授予他 1971 年度美国优秀青年电机工程师称号,并当选为美国电子学会信息论分会的理事长.1977 年他又被选为美国国家工程院院士.



约翰·康威(John Conway),1937 年 12 月 26 日生于英格兰利物浦市,曾任贡维尔·凯伊斯学院及西德尼·苏萨克斯学院评议员,剑桥大学纯数学高级讲师.他还是好几所大学的访问学者(教授衔),并在许多数学领域中作出过突出贡献,其中尤为重要的是超穷数算术、纽结理论、多维几何以及对称理论(群论)等方面.

在此之前他曾出过两本书《正则代数与有限自动机》以及《数与游戏》.近来他已成为英国皇家学会会员.*



理查德·盖伊(Richard Guy),1916 年 9 月 30 日生于英格兰纽尼顿.他曾在许多国家(英国、新加坡、印度、加拿大)讲授过各种程度的数学课程.1965 年以来他就任卡尔加莱大学的数学教授,还是美国数学会的理事会成员.

他是《美国数学月刊》的"问题征解"专栏编辑,曾为"直观数学中的未解决问题"丛书写过数论方面的一册,还准备编写其他方面的几本,其内容涉及组合数学、图论与博弈论.他是加拿大登山俱乐部的一名活跃成员.

* 译者注:自 1990 年代中期迄今,康威在美国普林斯顿大学任教授.

作者小传



埃尔温·伯莱坎普(Elwyn Berlekamp),1940年9月6日生于美国俄亥俄州多佛市.在伯克莱加利福尼亚大学当了两年助教授并在贝尔电话实验室工作了五年之后,他在1971年当上了该校数学、电机工程与计算机科学的教授.

他的著作《代数编码理论》曾荣获美国电子学会信息论组的最佳科研著作奖.埃塔·卡柏·纽学会授予他1971年度美国优秀青年电机工程师称号,并当选为美国电子学会信息论分会的理事长.1977年他又被选为美国国家工程院院士.



约翰·康威(John Conway),1937年12月26日生于英格兰利物浦市,曾任贡维尔·凯伊斯学院及西德尼·苏萨克斯学院评议员,剑桥大学纯数学高级讲师.他还是好几所大学的访问学者(教授衔),并在许多数学领域中作出过突出贡献,其中尤为重要的是超穷数算术、纽结理论、多维几何以及对称理论(群论)等方面.

在此之前他曾出过两本书《正则代数与有限自动机》以及《数与游戏》.近来他已成为英国皇家学会会员.*



理查德·盖伊(Richard Guy),1916年9月30日生于英格兰纽尼顿.他曾在许多国家(英国、新加坡、印度、加拿大)讲授过各种程度的数学课程.1965年以来他就任卡尔加莱大学的数学教授,还是美国数学会的理事会成员.

他是《美国数学月刊》的"问题征解"专栏编辑,曾为"直观数学中的未解决问题"从书写过数论方面的一册,还准备编写其他方面的几本,其内容涉及组合数学、图论与博弈论.他是加拿大登山俱乐部的一名活跃成员.

* 译者注:自1990年代中期迄今,康威在美国普林斯顿大学任教授.

序

一本书是否一定需要一篇序言？尤其是，经过十五年辛勤劳动之后，三位有才能的作者还有什么话要追加？

我们想告诉前往书店淘书的读者："是啊，这正是你想要买的一本书！"

我们可以指点你，如果你希望迅速了解书中的内容，那么就请你翻到前言部分的最后一页，并进一步参看 1,255,427 及 695 页.

书评者将要苦苦地钻研将近一千页满载信息的大书，我们将向他们提供一些精练而能阐明文章内容的众多标题，这是本书向前推进的一条主线. 然而本书并不是一本游戏百科全书，它虽然具有百科全书的性质，但还不是十分完备，仍有许多游戏遗漏在外. 本书并非一本专讲游戏数学的书，因为其中含有太多的严肃数学成分. 另一方面，按照我们的观点，也正如我们的前辈鲁斯鲍尔(Rouse Ball)，杜登尼(Dudeney)，马丁・加德纳(Martin Gardner)，克雷契克(Kraitchik)，山姆・洛伊德(Sam Loyd)，刘卡(Lucas)，汤姆・奥皮奈(Tom O'Beirne)以及弗莱特・席罕(Fred. Schuh)* 等名家的看法，数学的本质就是一种游戏. 它不是一本大学生的教科书，因为其中的练习并未按照通常方式来编排：先易后难. 另外，书中还有我们故意放在里面的 163 处错误，可以为读者提供充分余地，让他们积极参与. 所以你们不要只是作为旁观者，站在一旁空口叫好，尽管它的确是一本很有艺术性的佳作. 它也不是一本大学毕业生的教材，因为它代价高昂，包含了过多的材料，远远轶出任何大学毕业生要攻读的内容. 但本书确实能把你带到组合博弈理论的研究前沿，为数众多的悬而未决问题将能刺激你们进一步研究.

我们要感谢帕特里克・勃朗奈(Patrick Browne)为我们建议书名. 这个问题确实困扰我们相当时间. 一天早晨，在赴校途中，约翰与理查德的脑海里突然闪现出"谁的游戏?"这一书名，可是他们意识到这个书名也许镇不住(因为它在英语里头至少就有三种不同意思，甚至还有其他歧义)**，终于把它改作本书正文第 1 章的章节名称，成为书中的一个笑料. 对于书中的各种笑料，这里没有

---

* 译者注：追些人都是古今有名的数学游戏大师，但没有提到中、日、俄、印度等国的学者.

** 译者注：原文为"Whose Game?" 有"谁占优势?"、"谁的游戏?"、"谁的猎物?"等意思，还有其他歧义.

篇幅去解释，即使连59个带有个人隐私性质的笑话也是如此(我们三个人的生日在书中出现过不止一次).

对于勤奋的读者来说，开始时的笑料后来就产生了物质力量，成为扑克牌中的老K了. 露易丝·盖伊也帮助校阅书中的证明，但她更大的贡献是殷勤好客，使我们三人经常有机会在一起共同工作. 在卡伦·麦克德密与贝蒂·梯莱完成了许多草稿之后，露易丝作出了技术性的打字.

我们竭诚感谢为本书作出贡献的大批促成者，其人数之众多，不难在索引的姓氏栏中约略窥见. 如果想做到真正的公平，保证一个不漏，势将花费太多的篇幅，以下只能提供极少数人名：理查德·奥斯丁，克立佛·巴赫，约翰·贝斯莱，阿维兹列·弗兰凯尔，戴维·弗兰姆林，所罗门·果隆姆，斯丹佛·格兰亨，密克·盖伊，迪安·希克逊，亨德列克·伦斯特拉，理查德·诺伐柯夫斯基，安妮·司各特，戴维·希尔，约翰·赛弗利奇，赛德列克·史密斯与斯丹佛·哲向茨.

本书之获得成功，尤应感谢学识渊博，消息灵通的伦·赛杰尔卡的悉心指导以及学术出版社与派索兄弟公司的大力襄助. 他们迁就了作者们的一些怪癖：这些家伙不放过一切机会大肆篡改语法语义，曲解原文，滥用标点，修改单词拼法，插入许多异想天开的双关语，加进不少内部笑料.

我们也应当感谢艾萨克·瓦尔顿·开勒姆基金会提供经济资助，使理查德就任卡尔加莱大学的常驻研究员，以完成本书的定稿. 也要感谢加拿大国家科学技术研究院批准一笔拨款，使埃尔温与约翰得以同盖伊常来常往，经常切磋，而按照这些作者们的通常习性，犹如闲云野鹤，是难得会聚在一起的.

我们要谢谢您的保祐，圣西门！*

加利福尼亚大学，伯克莱，CA94720　埃尔温·伯莱坎普
剑桥大学，英格兰，CB21SB　约翰·康威
卡尔加莱大学，加拿大，T2N1N4　理查德·盖伊

---

* 译者注：圣西门，即圣彼得，耶稣十二门徒之一，在皈依耶稣之前，原为渔夫. 俄罗斯第二大城市列宁格勒已恢复原名圣彼得堡，足见其在西方人心目中的重要性！

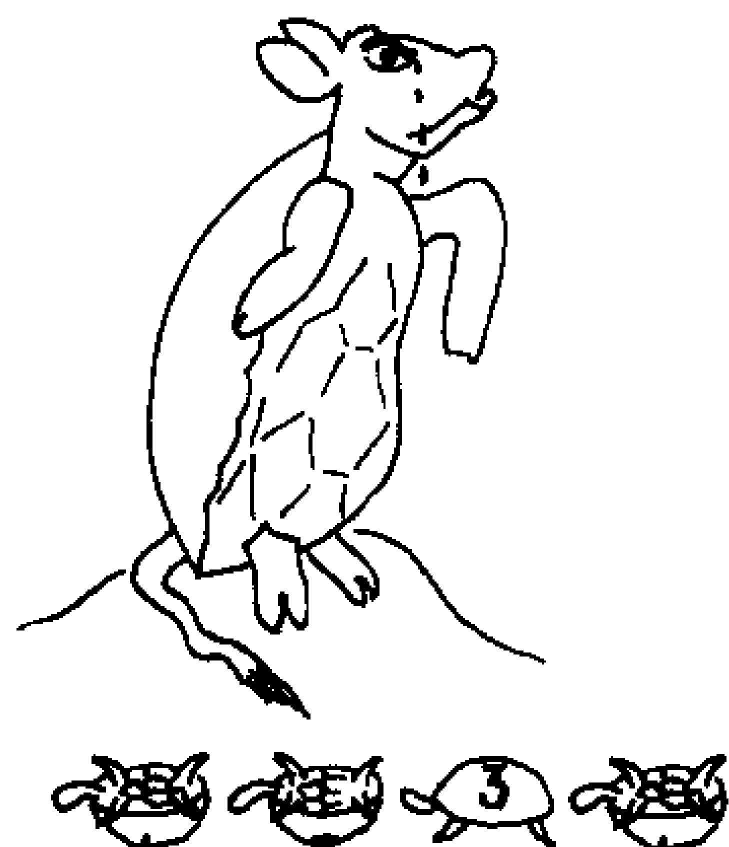
目录

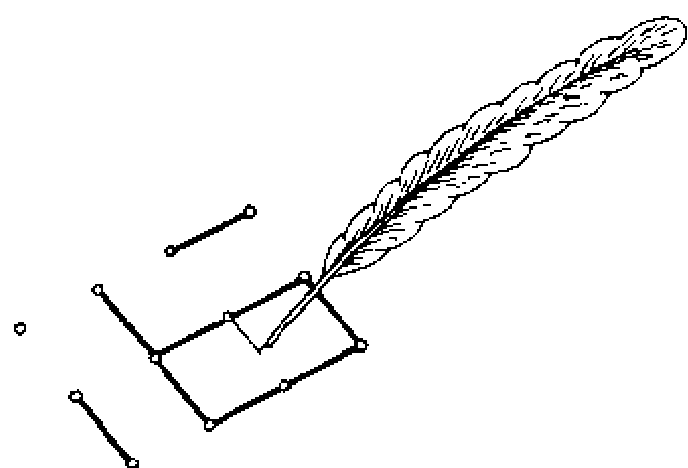
作者小传

序

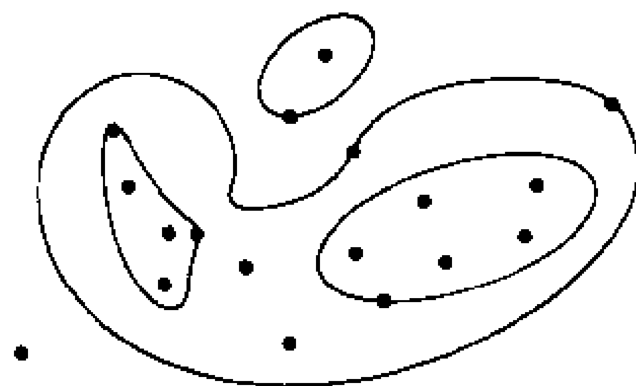


“梅花”中的游戏

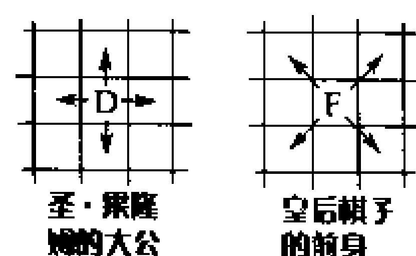


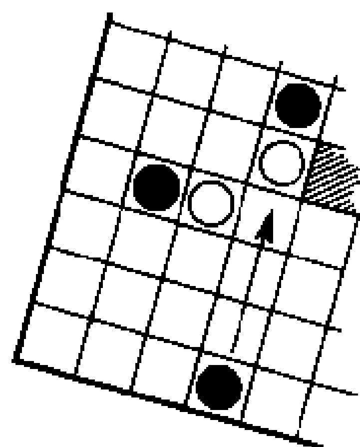


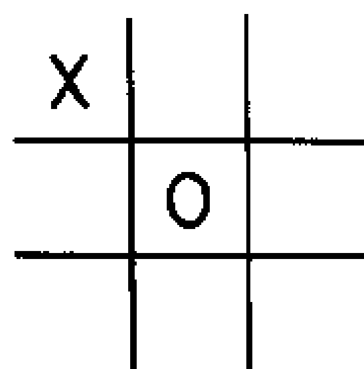
增 补

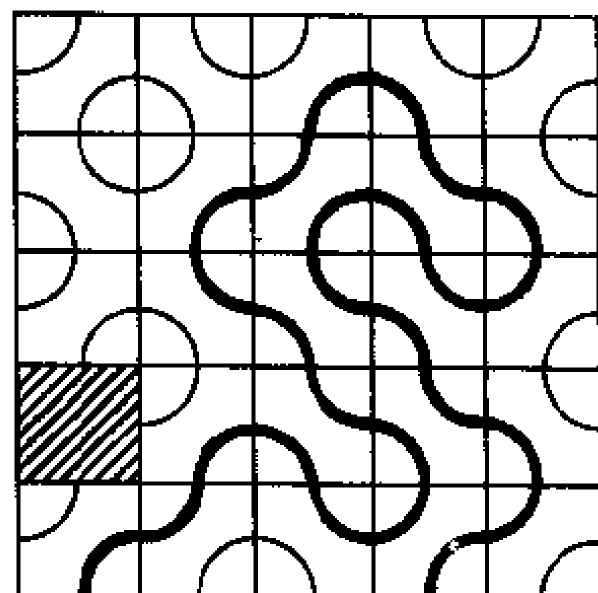


	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432


D
F
圣·果隆姆的大公
皇后棋子的前身

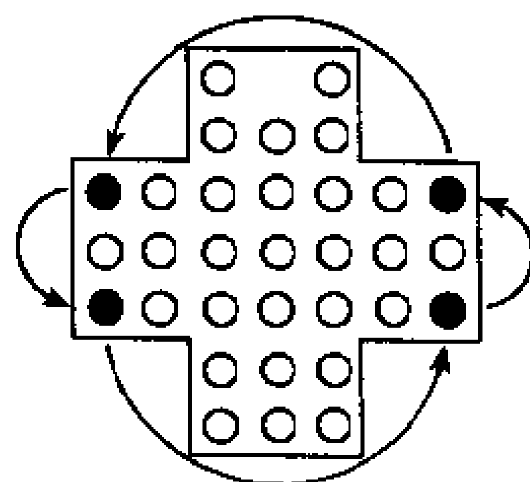


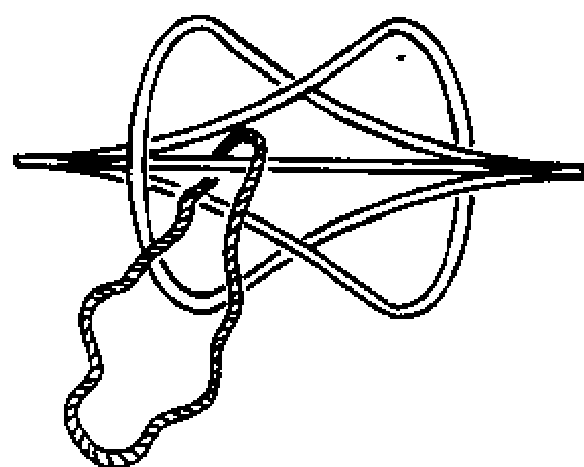

X
O

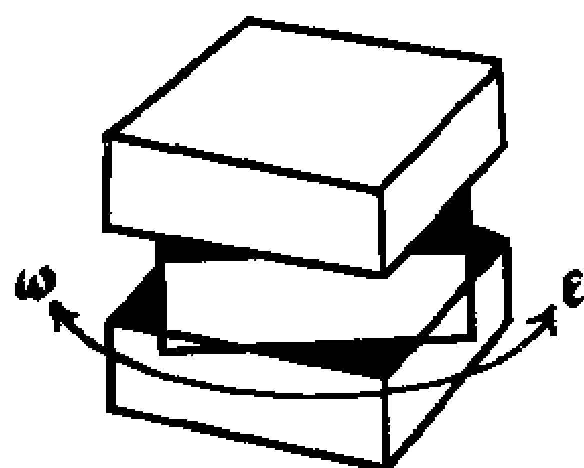


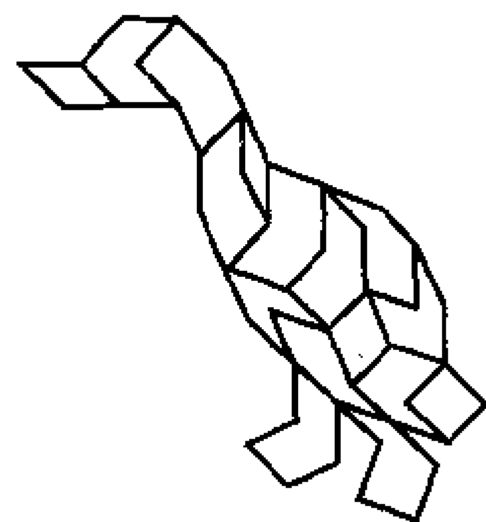


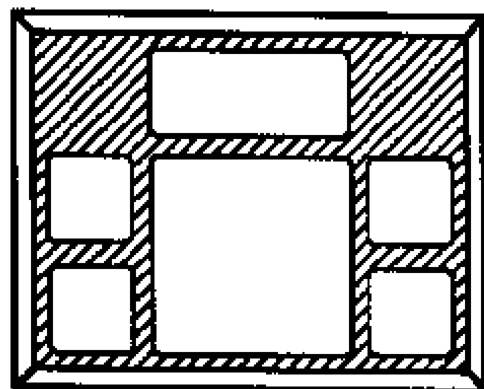
自我消遣的精品！

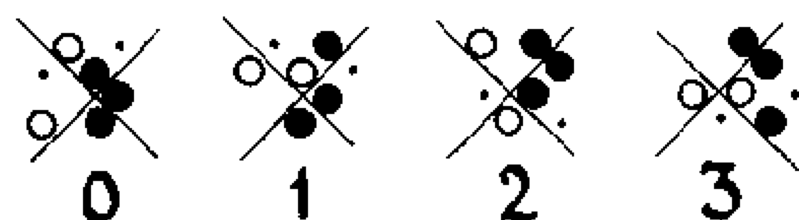


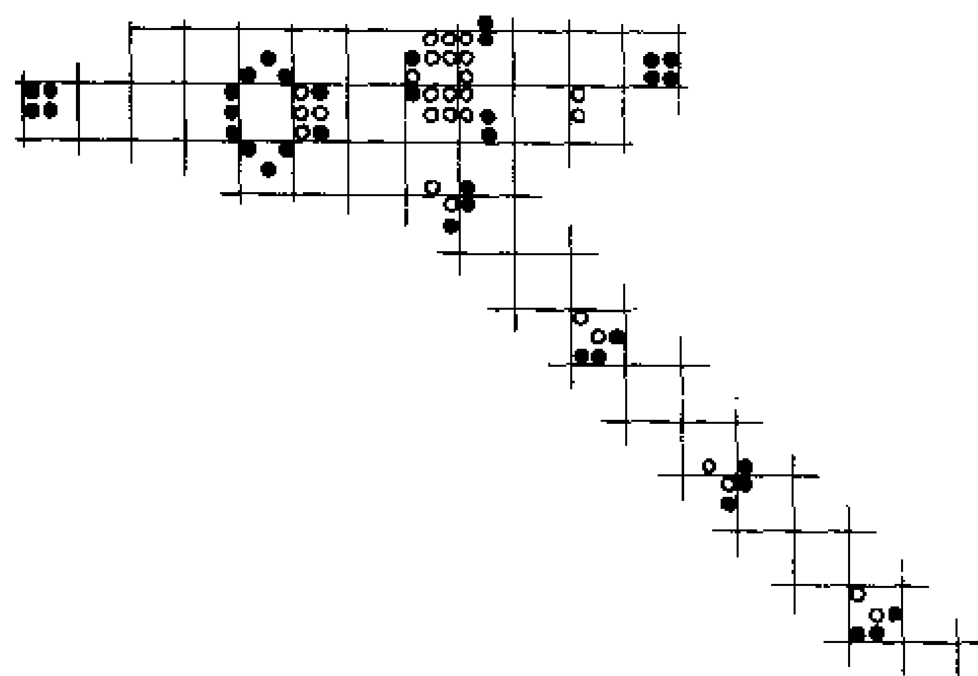



ω
ε






0
1
2
3



第14章

形形色色的翻转游戏

因为我不希望再来翻转，
因为我不希望，
因为我不希望翻转.

T·S·埃略特,《灰色的星期三》,I

你不能向每个人吐露心事，以防他突然反咬一口.

——《伪经》,8:19

莫基于H·W·伦斯特拉(Lenstra)概念的这些游戏看来都很类似，它们全都是在翻转什么东西，但我们将要看到，它们要求的是不同的策略.

翻转甲鱼

在图1中，矮胖子与木匠正在玩一个相当残酷的游戏. 每走一步，一位局中人必须把一只背部朝天的甲鱼翻一个身，同时也可将位于其左边的任意一只甲鱼翻个身. 这第二只甲鱼同第一只不一样，不论背朝天还是脚朝天都可以翻身. 谁能把最后一只甲鱼翻身的便是赢家. 现在问你：矮胖子(左方)应当翻转图上的哪两只甲鱼?

正像本书的大多数读者一样，矮胖子略带厌烦地察觉，这种游戏不过是尼姆游戏的另一种伪装形式. 图中，只有3,4,6,8,10五只甲鱼是头上脚下的，由于3,4,6的尼姆和数为1，所以他可以

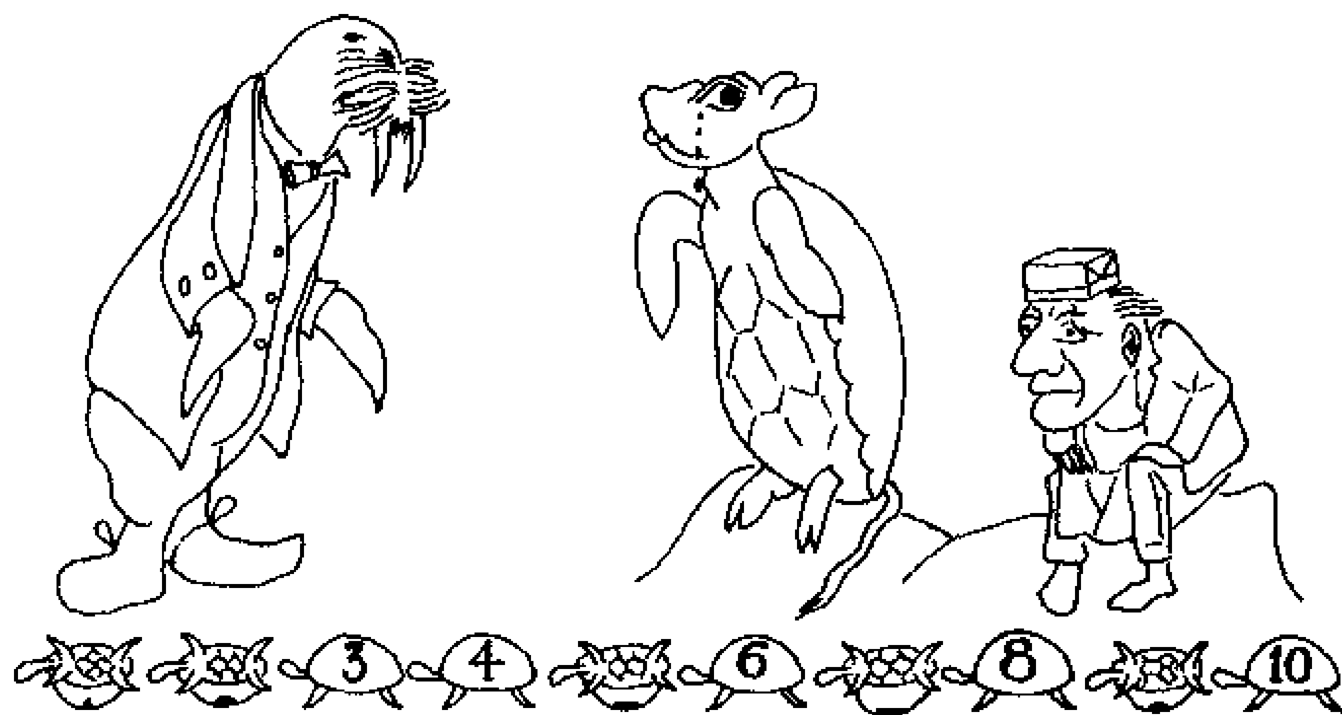


图 1. 他们在玩翻转甲鱼游戏.

把甲鱼 10 背部翻身，而把甲鱼 9 来个四脚翻身，这样一来，就形成了 3,4,6,8,9，由于 $8 \overset{*}{+} 9=1$，所以这是一种 $\mathscr{P}$-局势. 木匠(右方)用翻转甲鱼 8,5 来回敬，得出了图 2 所示的局势 3,4,5,6,9.

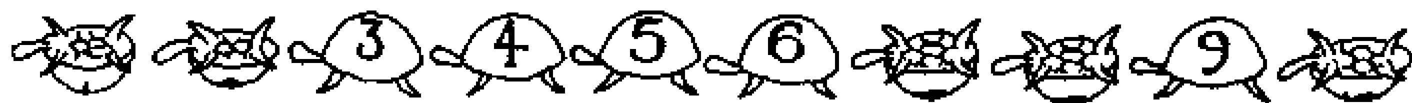


图 2. 木匠回敬以后的局势.

在尼姆游戏中，从这一局势出发，只有一步好动作——使 9 减少为 4，从而造成 3,4,4,5,6 的局势，由于两个相等的尼姆堆可以抵销，所以它同 3,5,6 并无二致. 矮胖子为了得到它，他只要把 9,4 两只甲鱼翻个身就行了(见图 3).

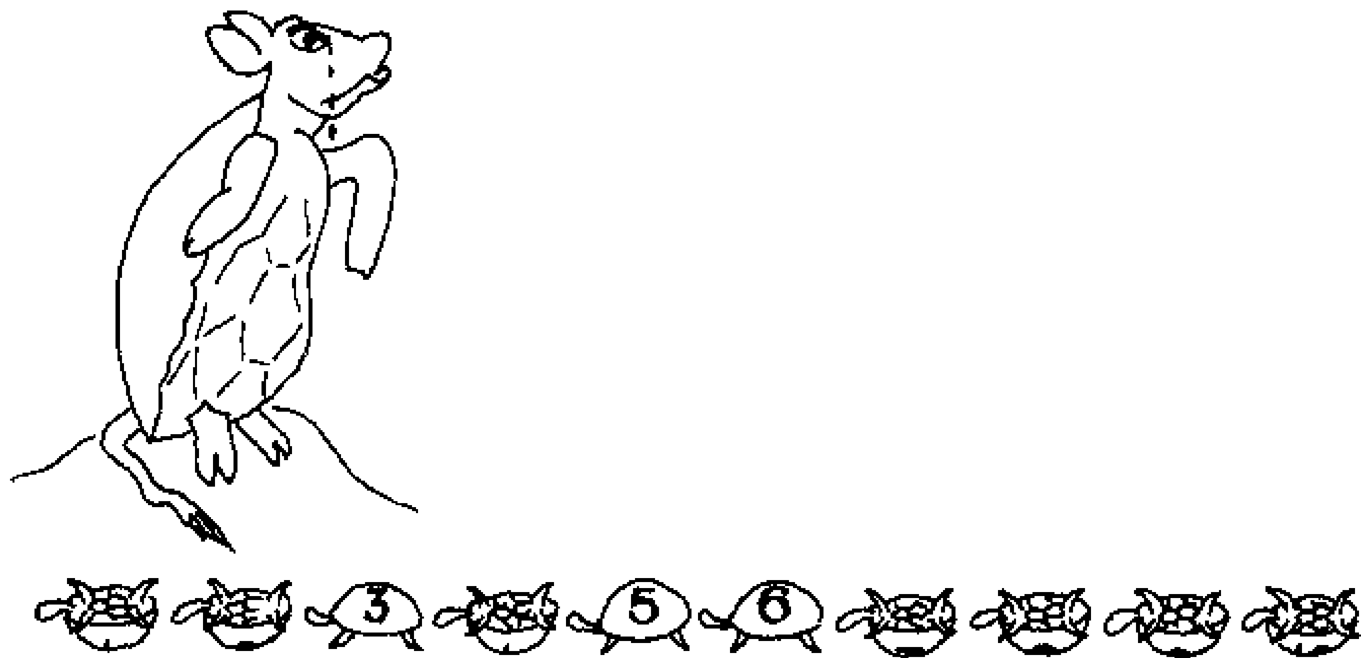


图 3. 矮胖子怎样取胜.

尼姆走法可按如下办法转换成甲鱼的翻身：把一个尼姆堆减少到以前不曾有过的大小，相当于把一只背部朝天的甲鱼同另一只四脚朝天的甲鱼翻身，就像是上文矮胖子的一种走法那样. 如果被削减的尼姆堆前面已经有过，那就相当于把两只背部朝天的甲鱼同时翻身，就像是矮胖子回敬木匠的走法（抵销两个相等的尼姆堆）. 把一个尼姆堆完全拿光，我们只要把与之对应的甲鱼翻个身就行. 由于 4,6,8,10 是一个 $\mathscr{P}$—局势，所以矮胖子可以赢，他从图 1 出发时，只要把甲鱼 3 翻个身就行.

由于我们的一切翻转游戏都是无偏博弈，所以可通过计算尼姆值而求出它们的解法，于是可认为它们不过是尼姆游戏的改头换面，换汤不换药；但是确有许多有着极其有趣理论的游戏可以通过这种“翻身”形式而自然地得到不少有益的提示.

大的假甲鱼

这种游戏的玩法是：局中人最多可以把三只甲鱼翻身，只须满足以下条件：最右面的一只甲鱼必须从四脚朝天的状态翻到背部朝天. 我们可以将这种游戏转化为用数字进行的游戏，其中的任一数字可用较原数小 0，小 1 或小 2 的数替代. 于是 $\mathscr{G}(n)$是不属于下列各形状

$$0,\mathscr{G}(a),\mathscr{G}(a)\overset{*}{+}\mathscr{G}(b)$$

的最小数，而这里的 a,b 是小于 n 的任意数.

如果局势的编号由 0 算起，则我们可以得出表 1 的尼姆值：

$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…
$\mathscr{G}(n)=1$	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21	22	25	26	28	31	32	35	37	…

表 1. 大假甲鱼游戏的尼姆值.

这时我们可以看到 $\mathscr{G}(n)$总是等于 $2n$ 或 $2n+1$，所以它的二进位表这式可由 n 的二进位表达式添加 0 或 1 而得出. 那么，究竟如何添加呢?

$n=0$	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	…
$\mathscr{G}(n)=\underline{1}$	$1\underline{0}$	$10\underline{0}$	$11\underline{1}$	$100\underline{0}$	$101\underline{1}$	$110\underline{1}$	$111\underline{0}$	$1000\underline{0}$	$1001\underline{1}$	$1010\underline{1}$	…

表 2. 序列所显示的伪奇数.

表 2 告诉我们一个规律：究竟添加 0 还是添加 1，要看 1 的个数是否奇数而走.

伪奇数与伪偶数*

任一数为伪奇数或伪偶数，这要看该数的二进位表达式中，1的个数分别是奇数或偶数而定.

伪奇数与伪偶数在尼姆加法中表现的性态犹如奇数与偶数在普通加法中的表现：

$$伪偶数 \overset{*}{+} 伪偶数 = 伪偶数 = 伪奇数 \overset{*}{+} 伪奇数,$$

$$伪偶数 \overset{*}{+} 伪奇数 = 伪奇数 = 伪奇数 \overset{*}{+} 伪偶数.$$

我们在假大甲鱼游戏中计算 $\mathscr{G}(n)$ 值时，下一个伪奇数**决不能**排除，因为两个伪奇数的尼姆和是伪偶数，但较小的伪偶数总是要排除的.

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是尼姆游戏中的一个 $\mathscr{P}$—局势，即

$$a_1 \overset{*}{+} a_2 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} a_n = 0,$$

则对假大甲鱼游戏中相应的伪奇数 $\mathscr{G}(a_i)$，我们应当有

$$\mathscr{G}(a_1) \overset{*}{+} \mathscr{G}(a_2) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathscr{G}(a_n) = 0 \text{ 或 } 1.$$

但若 n 为偶数，则此尼姆和是伪偶数，所以是 0；而当 n 为奇数时，它是伪奇数，所以是 1. 由此可知，n 为偶数时，假大甲鱼游戏中的 $\mathscr{P}$—局势实际上就是尼姆游戏中的 $\mathscr{P}$—局势.

应当注意，在假大甲鱼游戏中，甲鱼的编号从 0 开始. 0 号甲鱼就是假大空甲鱼，它要同别的甲鱼一起参加翻转，在转化为尼姆游戏时也不能忽略不计. 为了从图 3 的翻转甲鱼游戏得出相应的假大甲鱼游戏的 $\mathscr{P}$—局势，必须考虑四脚落地的假大空甲鱼. 故而在假大甲鱼游戏中，3，5，6 不是一个 $\mathscr{P}$—局势，然而 0，3，5，6 是 $\mathscr{P}$—局势（见图 4）.

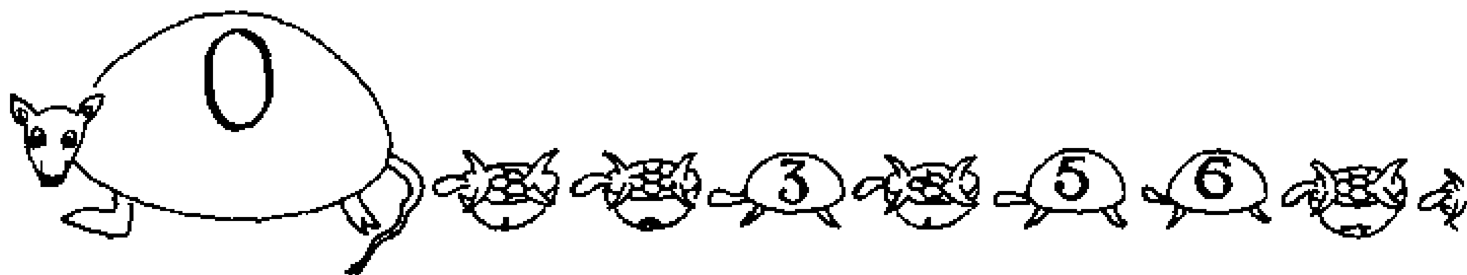


图 4. 假大空甲鱼参加进来了.

---

* 译者注：原文为 Odious Numbers 与 Evil Numbers，按 Odious 与 Evil 的原义都是“可憎的，丑恶的”，意义近似，无法区别. 故改译为“伪奇数”与“伪偶数”. 事实上，Odious 脱胎于“Odd”，而 Evil 则由“Even”萌生，这是作者们故意玩弄的一种手法.

默比乌斯，莫卧儿与莫杜尔金币*

表 3 给出了类似于以上游戏（局中人最多可以翻转 t 件东西，$t=1, 2, \cdots$）的各种游戏的尼姆值，其数值已由 M・J・T・盖伊**通过计算机验证过. 由于这些数值要比本书其他地方出现的尼姆值大得多，所以我们在表中改用八进位数表示. 八进位数的尼姆和数可由左西逐位计算而得.

1	2	3	4	5	6	7	0
1	3	5	7	0	2	4	6
	1	6	3	5	4	3	6

在此表中，我们只是对最有趣的几种场合（$t=3,5,7,9$）起了专门名词. 请注意 C,E,G,I 分别是 26 个英文字母的第 3,5,7,9 个字母.*** 为了方便起见，也不要去虐待甲鱼这种小动物，读者们当然可用硬币来玩这种游戏. 按照甲鱼的四脚着地还是背部落地来规定硬币的正、反面，但是最右面的一只硬币必须从正面转到反面去.

大甲鱼定理

在 t 为偶数值（$t=2m$）游戏中取一个 $\mathscr{P}$—局势，并在左面放一只额外的硬币（代表“假大空”甲鱼），不管怎样，要保证正西的个数为偶数. 用此种方法得到的局势对 t 的下一个奇数值（$t=2m+1$）将是一个“好”局势. 我们断言，好局势恰恰就是 $t=2m+1$ 游戏的一个 $\mathscr{P}$—局势.

我们首先证明，如果至多翻转 $2m+1$ 枚钱币，那是没有办法从一个好局势转为另一个好局势的. 倘能办到，则翻转的钱币个数当然必须为偶数，因为好局势有着偶数个正面向上的钱币，从而实际上至多为 $2m$. 然而这将要求在 $2m$ 游戏的两个 $\mathscr{P}$ 局势中外加出一步.

接下来要证明，从 $2m+1$ 游戏的任一坏局势出发，可以走一步到达某种好局势. 如果该局势之所以坏，是由于它是 $2m$ 游戏中的一个 $\mathscr{N}$—局势，则在该游戏中是存在着走到某个 $\mathscr{P}$ 局势的一步的，必要时可以把假大空甲鱼翻身，这样我们就得到了 $2m+1$ 游戏中走到好局势的一步. 另一种坏局势是 $2m$ 游戏中的 $\mathscr{P}$—局势，面钱币的正面向上个数是奇数. 在这种情况下，把最右边的钱币正面翻转一下，我们即可得出 $2m$ 游戏中的一个 $\mathscr{N}$—局势. 现在我们至多只须进一步翻转

---

* 译者注：默比乌斯（Moebius）是著名数学家，首先发现单侧曲西. 莫卧儿人（Mogul），指 16 世纪初期征服印度半岛的蒙古人及其后裔，又可译为蒙兀儿人. 莫杜尔（Moidores）是一种葡萄牙的金币.

** 译者注：即本书第三作者，加拿大名教授盖伊先生的儿子.

*** 译者注：作者在这里说破了游戏浑名的由来. 例如 $t=7$ 对应于英文中第 7 个字母，由 M 加 G 再拼凑而成“莫卧儿”（Mogul）这个词. 其他几个单词的造法与此相仿，不多说了.

			假大甲鱼游戏		默比乌斯		莫卧儿		莫杜尔金币
n	*t* = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
假大空甲鱼	1		1		1		1		1
1	1	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	4	2	4	2	4	2	4
3	1	3	7	4	10	4	10	4	10
4	1	4	10	10	20	10	20	10	20
5	1	5	13	17	37	20	40	20	40
6	1	6	15	20	40	40	100	40	100
7	1	7	16	40	100	77	177	100	200
8	1	10	20	63	147	100	200	200	400
9	1	11	23	100	200	200	400	377	777
10	1	12	25	125	253	400	1000	400	1000
11	1	13	26	152	325	707	1617	1000	2000
12	1	14	31	200	400	1000	2000	2000	4000
13	1	15	32	226	455	1331	2663	4000	10000
14	1	16	34	253	526	1552	3325	7417	17037
15	1	17	37	333	667	1664	3551	10000	20000
16	1	20	40	355	733	2000	4000	20000	40000
17	1	21	43	367	756	2353	4726	31463	63147
18	1	22	45	400	1000	2561	5343	40000	100000
19	1	23	46	427	1056	2635	5472	52525	125253
20	1	24	51	451	1123	3174	6370	65252	152525
21	1	25	52	707	1617	3216	6435	100000	200000
22	1	26	54	1000	2000	3447	7116	113152	226325
23	1	27	57	1031	2063	3722	7644	200000	400000
24	1	30	61	1055	2132	4000	10000	213630	427461
25	1	31	62	1122	2245	10000	20000	263723	547646
26	1	32	64	1203	2407	20000	40000	306136	614274
27	1	33	67	1443	3106	34007	70017	400000	1000000
28	1	34	70	1537	3277	40000	100000	416246	1034515
29	1	35	73	1746	3714	54031	130063	521055	1242133
30	1	36	75	2000	4000	64052	150125	724616	1651435
31	1	37	76	2033	4066	70064	160151	1000000	2000000
32	1	40	100	2056	4134	100000	200000	1023305	2046613
33	1	41	103	2130	4261	114053	230126	1347214	2716431
34	1	42	105	2221	4443	124061	250143	2000000	4000000
35	1	43	106	2465	5153	130035	260072	2027151	4056322
36	1	44	111	2501	5203	144074	310170	2457261	5136542
37	1	45	112	3124	6250	150016	320035	3166444	6355111
38	1	46	114	3512	7225	160047	340116	4000000	10000000
39	1	47	117	4000	10000	174022	370044	4055666	10133554
40	1	50	121	4034	10071	200000	400000	4632577	11465377
41	1	51	122	4045	10113	214301	430603	5251417	12523036
42	1	52	124	4211	10423	224502	451205	7514712	17231625
43	1	53	127	4504	11211	230604	461411	10000000	20000000

表 3. 这些尼姆值为八进位数，不是十进位数.

$2m$ 个钱币以获得一个 $\mathscr{P}$ 局势，如有必要，可把假大空甲鱼翻身以获得一个好局势. 一共算起来，我们至多翻转了 $2m+2$ 枚钱币，但由于我们从奇数个正面向上开始，而以偶数个正面向上结束，所以我们至多翻转了 $2m+1$ 枚钱币，从而在 $2m+1$ 游戏中走出了合法行动.

这个结果与下列说法等价：

> $2m+1$ 游戏中任一尼姆值是一伪奇数，而 $2m$ 游戏中相应之值可通过勾销其末位的二进制数字而得出.

大 甲 鱼 定 理

何以称为默比乌斯游戏?

当钱币数限制为 18 个，则 $t=5$ 游戏的 $\mathscr{P}$-局势具有一种显著的对称性质. 为了看到这一点，可将局势中正面向上的钱币标上数字，如图 5 所示. 例如，前六个位置中 $\mathscr{P}$—局势中正面向上的钱币是∞，0，±1，±4. 采取此种记法后，当数字增加任意固定数量时(按模数 17 同余)，$\mathscr{P}$—局势仍然是 $\mathscr{P}$—局势(当然∞不变). 例如把 1 加到∞，0，±1，±4，我们就得到∞，1，2，0，5，−3，故而图 5 所示的局势是另一个 $\mathscr{P}$—局势. 由表 4 所揭示的 15 种 $\mathscr{P}$—局势通过此种办法将可得出 $15\times17=255$ 个 $\mathscr{P}$—局势. 如果在任何场合，把正面向上的钱币同反面向上的钱币互换位置，则 $\mathscr{P}$ 局势依然保持 $\mathscr{P}$—局势. 所有钱币全都是正面向上或者全都是反面向上自然也是 $\mathscr{P}$—局势，这就一共得出 $2\times255+2=512$ 个 $\mathscr{P}$ 局势，它们的分布如下：

正面向上数	0	6	8	10	12	18
$\mathscr{P}$—局势数	1	102	153	153	102	1.

6 个正面向上

∞，0，	±1，	±4
∞，0，	±2，	±8
±1，	±3，	±6
±2，	±5，	±6
±4，	±5，	±7
±3，	±7，	±8

8 个正面向上

∞，0，	±1，	±5，	±7
∞，0，	±2，	±3，	±7
∞，0，	±3，	±4，	±6
∞，0，	±5，	±6，	±8
±1，	±2，	±4，	±8
±1，	±2，	±3，	±5
±2，	±4，	±6，	±7
±3，	±4，	±5，	±8
±1，	±6，	±7，	±8

表 4. 默比乌斯游戏的 $\mathscr{P}$—局势.

不算假大空甲鱼(在∞处),我们发现,17 枚钱币的 $t=4$ 游戏,其 $\mathscr{P}$—局势的分布情况如下:

正面向上数	0	5	6	7	8	9	10	11	12	17
$\mathscr{P}$ 局势数	1	34	68	68	85	85	68	68	34	1.

我们也可以通过将任一 $\mathscr{P}$—局势数加倍(按模 17 同余)的办法得出另一个. 例如,图 5 的∞,0,1,2,−3,5 将变成∞,0,2,4,−6,−7. 我们可将它们按模 17 来求倒数(逆变换);由于 1/2=−8,1/3=6,1/5=7,图 5 将转换为 0,∞,1,−8,−6,7. 事实上我们作任意的(按模 17)变换:

$$x\to\frac{ax+b}{cx+d},\quad ad-bc=1.$$

∞	1	4	0	−4	−1	5	6	−8	2	−3	−5	8	3	−7	7	−6	−2
Ⓗ	Ⓗ	ⓣ	Ⓗ	ⓣ	ⓣ	Ⓗ	ⓣ	ⓣ	Ⓗ	Ⓗ	ⓣ	ⓣ	ⓣ	ⓣ	ⓣ	ⓣ	ⓣ

图 5. 用默比乌斯标号法易于求出 $\mathscr{P}$—局势.

由于它们是众所周知的默比乌斯变换,所以我们决定用这位著名数学家的姓氏来命名我们的游戏.

莫卧儿游戏

$t=7$ 的 24 枚钱币游戏将显示出更多的对称性. 前 24 个位置的 $\mathscr{P}$—局势分布如下:

正面向上数	0	8	12	16	24
$\mathscr{P}$—局势数	1	759	2576	759	1.

正好有 8 个正面向上或者 8 个反面向上时,图 6 将帮助我们找出 759 种 $\mathscr{P}$—局势. 无论是哪种情况,涉及的 8 个位置的集合称为一个**八元组**. 在图 6 中共有 35 个图形,而每个图形表明成六个四数集合的 24 个位置(使用的六种颜色为黑,白,星,圆圈,+与·). 同一图形上任意两个四数集合构成一个八元组. 特别是,在最后一对,黑、白行列中给出了每一个八元组中的四个位置,而这对行列本身也构成一个八元组. 若将同一图形的第一对同最后一对行列或者中间的一对行列互换,我们就能得到所有的八元组,因为可以证明这些行列对可形成八元组,而每一个其他八元组同它至少在四个位置相交.

这个奇迹般的八元组生成器(简称 MOG),是由 R·T·寇蒂斯(R. T. Curtis)发明的,为了莫卧儿游戏的方便,我们略为作了些微小的改动. 它的各种配列中所表现出来的正则性可使实际使用人极为方便地得出唯一的八元组(已知其中的五个位置). 看来,24 个位置的莫卧儿游戏的赢家根本不需要去玩 12 个正面向上的 $\mathscr{P}$—局势.

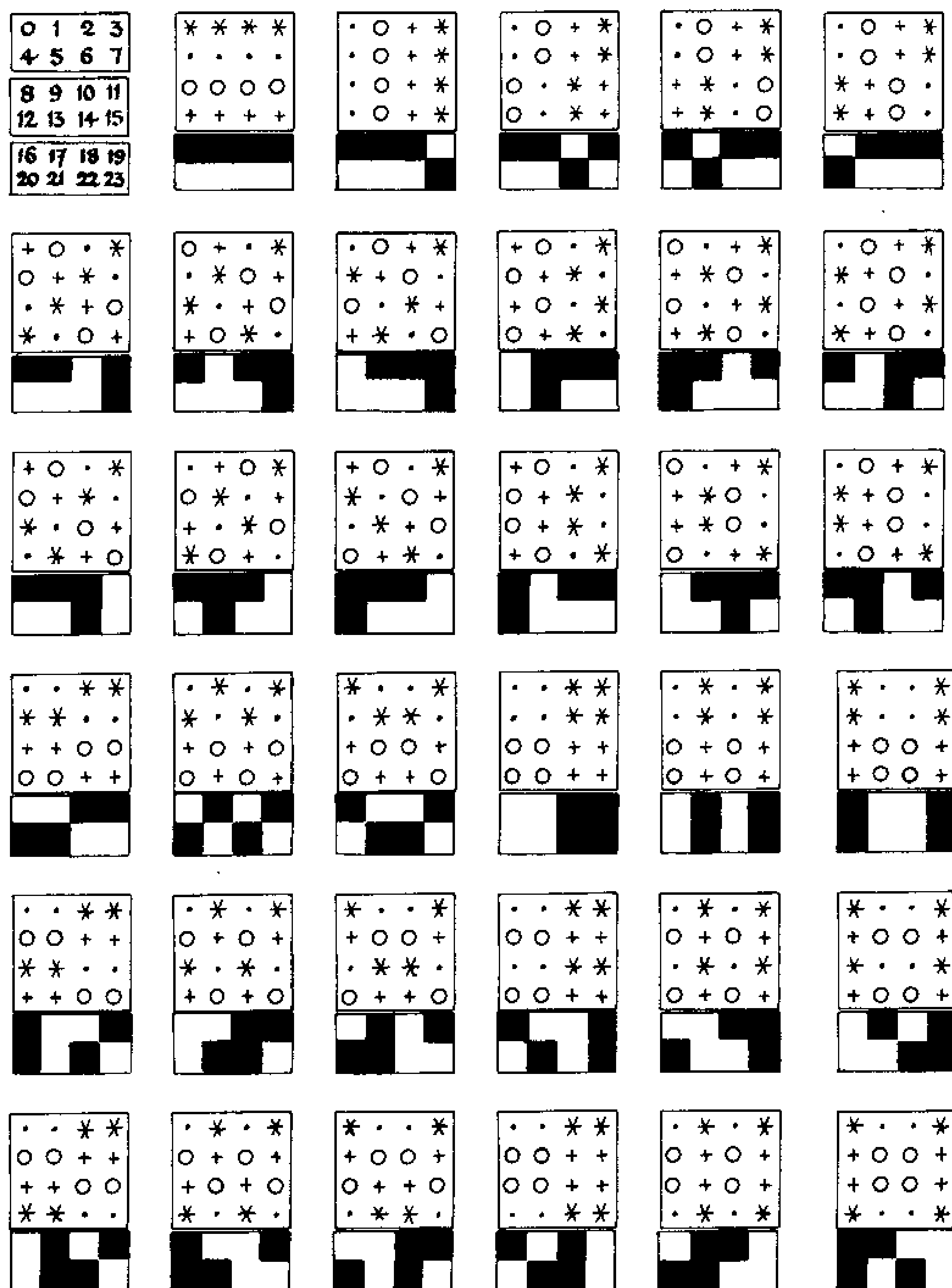


图 6. 寇蒂斯的奇迹八元组生成器.

杂色小丑

在这一游戏中，任意数目的钱币都可以翻转．若玩得好，这游戏最多只能维持一步，因为我们可以一下子把所有的正面都变成反面！尼姆值当然是 2 的乘幂：

$$1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,\cdots$$

所以，如果玩的钱币有几排，杂色小丑游戏不过是尼姆游戏的另一种伪装而已：在某一行中，正面向上钱币的个数相当于尼姆堆中豆子数的二进位数 1．

翻两个，翻三个，等等

我们也可以来玩翻两个游戏，这时我们要翻转的钱币数正好是两枚，或者来做翻三个游戏，如此等等．在我们要翻 t 枚钱币的游戏中，尼姆值序列中包含 $t-1$ 个零，紧接着它的是我们至多翻转 t 枚钱币时的尼姆值序列．譬如说，翻三个游戏的尼姆值为

$$0,0,1,2,4,7,8,11,13,14,16,19,21,22,25,\cdots$$

我们可以把前面 $t-1$ 枚钱币看作 $t-1$ 只假甲鱼以用来补足其适当的翻转余数．

直尺游戏

如果要翻转的钱币数必须是连续数，但其他不受限制（但最右面的钱币必须从正面翻到反面），则尼姆值的计算将遵循下列法则：

$$\mathscr{G}(n)=\text{mex}\left\{\begin{array}{l}0\\ \mathscr{G}(n-1)\\ \mathscr{G}(n-1)\overset{*}{+}\mathscr{G}(n-2)\\ \mathscr{G}(n-1)\overset{*}{+}\mathscr{G}(n-2)\overset{*}{+}\mathscr{G}(n-3)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\},$$

这就不禁令人想起了除数尺（第 13 章的图 7）．

如果钱币的编号由 1 开始，则 $\mathscr{G}(n)$ 正好就是整除 n 的 2 的最高次乘幂．

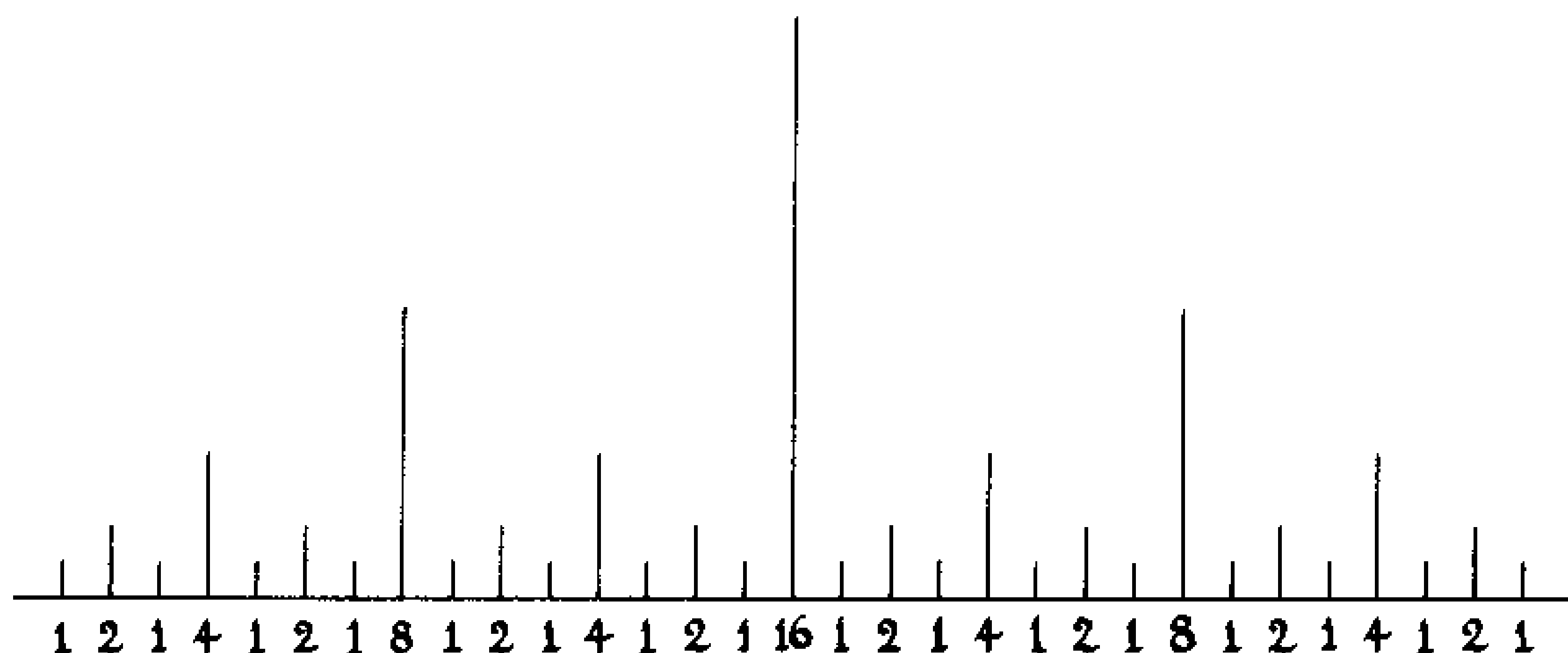


图 7. 直尺游戏的尼姆值.

制约游戏

我们可以玩下面的一些游戏，其额外限制是被翻转的钱币不能相距过远. 譬如说，在**假甲鱼五钱**[*]这种游戏中，我们至多可以翻转五枚连在一起的钱币中的三枚. 在**五中翻三**游戏中我们应不多不少地在五枚中翻转三枚，而在**直尺翻五**钱游戏中可以翻转连在一起的 1，2，3，4 或 5 枚. 这三种游戏的尼姆值分别是：

假甲鱼五钱：1 2 4 7 8 1 2 4 7 8 1 2 4 7 8 1 2 4 7 8 …

五中翻三：0 0 1 2 4 0 0 1 2 4 0 0 1 2 4 0 0 1 2 4 …

直尺翻五钱：1 2 1 4 1 2 1 4 1 2 1 4 1 2 1 4 1 2 1 4 …

这些都不过是一般模式的一部分情况而已. 譬如说，**默比乌斯十九**游戏，它的前 19 个值是无限地反复出现的. 除直尺游戏外，上述一切游戏都会出现这种情况，直尺翻四钱、六钱以及七钱游戏同直尺翻五钱游戏有着同样的值，而直尺翻八钱直到直尺翻十五钱都有着一样的尼姆值：

1 2 1 4 1 2 1 8 1 2 1 4 1 2 1 8 1 2 1 4 1 2 1 8 1 …

* 译者注：前面已交代过，实际做游戏时可以用硬币代替甲鱼.

萝卜*(翻三钱)

本游戏有着很完备的理论，可惜只是极有钱的人才需要它，因为他们做游戏时要用上一大堆钱币. 本游戏的游戏规则是可以翻转任意三枚相等间隔的钱币，同通常一样，最右面的一枚钱币必须从正面翻到背面.

从 0 开始，我们发现从 0 到 100 的尼姆值如下：

0—8	0	0	1	0	0	1	2	2	1		
9—17	0	0	1	0	0	1	2	2	1		
18—26	4	4	1	4	4	1	2	2	1		
27—35	0	0	1	0	0	1	2	2	1		
36—44	0	0	1	0	0	1	2	2	1		
45—53	4	4	1	4	4	1	2	2	1		
54—62	7	7	1	7	7	1	2	2	1		
63—71	7	7	1	7	7	1	2	2	1		
72—80	4	4	1	1	4	1	2	2	1		
81—89	0	0	1	0	0	1	2	2	1		
90—100	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4 …

表 5. 萝卜游戏的尼姆值.

为了一般地求出 $\mathcal{G}(n)$，我们将 n 表示为三进位数：

ϕ = 0 或 1
? = 0，1 或 2

n 的三进位记法	$\mathcal{G}(n)$	
… φ φ φ φ φ φ φ	0	
… ? ? ? ? ? ? 2	1	伪奇数
… ? ? ? ? ? 2 φ	2	伪奇数
… ? ? ? ? 2 φ φ	4	按顺序
… ? ? ? 2 φ φ φ	7	按顺序
… ? ? 2 φ φ φ φ	8	排列
… ? 2 φ φ φ φ φ	11	排列
…………………	…	

换言之，若 n 的三进位表示式中没有 2，则 $\mathcal{G}(n)=0$. 若自右算起的最后二位数是第 k 个伪奇

---

* 译者注：本游戏同萝卜毫无关系，仍然是原作者的一种故弄玄虚，由字形近似而有意杜撰的英语单词.

数，则称 n 是一个 k 数. 若数 n 的三进位表示式中根本没有 2，则称它是空数.

为了看清这些，请注意 $\mathscr{G}(n)$ 是所有的数

$$\mathscr{G}(n-\delta) \overset{*}{+} \mathscr{G}(n-2\delta),\quad \delta=1,2,\cdots$$

的局外最小数 mex.

我们首先来证明 $\mathscr{G}(n)$ 的推定值并非这些数字中的一个，或与之等价的

$$\mathscr{G}(n) \overset{*}{+} \mathscr{G}(n-\delta) \overset{*}{+} \mathscr{G}(n-2\delta) \neq 0.$$

由于三个伪奇数之和仍是伪奇数，这显然成立，除非

$$\mathscr{G}(n),\mathscr{G}(n-\delta),\mathscr{G}(n-2\delta)$$

中有一个为零，而其他两个互相雷同. 但若 δ 的最后一个非 0 三进位数（$x=1$ 或 2）是处于第 k 个位置，则 $n,n-\delta,n-2\delta$ 的三进位表达式看来像是：

$$\begin{array}{l|cccccccccc}
 & & & & k & & & & j & & \\
\delta: & ? & ? & ? & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
n & ? & ? & ? & 0 & ? & ? & ? & 2 & \phi & \phi \\
n-\delta & ? & ? & ? & 1 & ? & ? & ? & 2 & \phi & \phi \\
n-2\delta & ? & ? & ? & 2 & ? & ? & ? & 2 & \phi & \phi
\end{array}
\quad \text{或} \quad
\begin{array}{l|ccccccccc}
 & & & & k & & & & & \\
\delta: & ? & ? & ? & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
n & ? & ? & ? & 0 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\
n-\delta & ? & ? & ? & 1 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\
n-2\delta & ? & ? & ? & 2 & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi
\end{array}$$

按照 n 在某个 j 位置（$j<k$）有没有一个 2 而定. 在第一种情况下，三个推定的尼姆值全都是第 j 个伪奇数，而在第二种情况，恰有一个数是第 k 个伪奇数，所以它们的尼姆和不可能是零.

我们从假大空甲鱼游戏的分析中已经得知，每一个伪奇数是第一个出现的数，但不是前两个或两个以下伪奇数的尼姆和. 这就足以证明，若 n 为一 k 数，我们可以选取 δ 以使得 $n-\delta$ 及 $n-2\delta$ 为 i 数、j 数或空数（对比 k 小的任意 i 与 j 来说皆然）. 表 6 的减数和将告诉我们怎样才能做到这一点.

小猪打呼噜

这种游戏的规则是局中人必须翻转四枚对称排列的钱币，其中第一枚钱币必须位于最左面，而最后一枚钱币则必须从正面翻到背面. 若从 0 开始编号，则上述规定就是我们必须翻转数

$$0,a,n-a,n,\quad \text{其中 } 0<a<\frac{1}{2}n.$$

				k			j			i		
δ :							2	0	0	1	0	0
n :	…	?	?	2	φ	φ	1	φ	φ	1	φ	φ
$n-\delta$:	…	?	?	?	?	?	2	φ	φ	0	φ	φ
$n-2\delta$:	…	?	?	?	?	?	?	?	?	2	φ	φ

δ :							1	0	0	1	0	0
n :	…	?	?	2	φ	φ	0	φ	φ	1	φ	φ
$n-\delta$:	…	?	?	?	?	?	2	φ	φ	0	φ	φ
$n-2\delta$:	…	?	?	?	?	?	?	?	?	2	φ	φ

δ :							1	2	2	2	0	0
n :	…	?	?	2	φ	φ	1	φ	φ	0	φ	φ
$n-\delta$:	…	?	?	?	?	?	2	φ	φ	1	φ	φ
$n-2\delta$:	…	?	?	?	?	?	?	?	?	2	φ	φ

δ :							0	2	2	2	0	0
n :	…	?	?	2	φ	φ	0	φ	φ	0	φ	φ
$n-\delta$:	…	?	?	?	?	?	2	φ	φ	1	φ	φ
$n-2\delta$:	…	?	?	?	?	?	?	?	?	2	φ	φ

											k		
δ :		1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
n :	φ	2	φ	φ	φ	2	φ	2	φ	φ	2	φ	φ
$n-\delta$:	φ	1	φ	φ	φ	1	φ	1	φ	φ	1	φ	φ
$n-2\delta$:	φ	0	φ	φ	φ	0	φ	0	φ	φ	0	φ	φ

								k			i		
n :	φ	2	φ	φ	φ	2	φ	2	φ	φ	1	φ	φ
$n-\delta$:	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	2	φ	φ
$n-2\delta$:	0	0	0	0	0	0	0	φ	0	0	0	φ	φ

n :	φ	2	φ	φ	φ	2	φ	2	φ	φ	0	φ	φ
$n-\delta$:	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	2	φ	φ
$n-2\delta$:	0	0	0	0	0	0	0	φ	0	0	1	φ	φ

在上面的后二例中，末行的第一个φ究竟是填0或1？其原则是要使 $n-2\delta$ 与 n 有着同样的奇偶性. 然后由 n 与 $n-2\delta$ 可求出 δ.

表 6. 怎样使 $n-\delta, n-2\delta$ 变为 i 数、j 数或空数.

我们发现，此游戏的尼姆值为：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	…
$\mathcal{G}(n)$	0	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4	3	0	4	3	….



图 8. 小猪打呼噜游戏的一个获胜走法.

由于 $\mathcal{G}(0)=0$，$\mathcal{G}(n)$ 可以通过下列方法更易算得，它是形如以下一切数

$$\mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(n-a), \quad 0<a<\frac{1}{2}n$$

的局外最小数，所以本游戏实际上不过是格隆第游戏的一种伪装（格隆第游戏请参阅第 4 章），其时任意一堆豆子都可以分成大小不同的较小两堆.

西姆游戏

作为尼姆值看不出有什么已知模式的例子，让我们来举出一个实例. 其时被翻转的钱币都是成对称配置的，然而不一定要包括编号为 0 的最左边的一枚钱币. 其时可以求出

$$n=0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ \ 14\ 15\ \ 16\ \cdots$$
$$\mathcal{G}(n)=1\ 2\ 4\ 3\ 6\ 7\ 8\ 16\ 18\ 25\ 32\ 11\ 64\ 31\ 128\ 10\ 256\ \cdots.$$

读者们不妨也来试解一下**简化西姆游戏**（Sympler），其时被翻转的、成对称分布的钱币中一定要包括最左面的一枚钱币.

二维翻转游戏

我们所有的一维翻转游戏，玩时都遵循着一个限制条件，即最右面的钱币必须从正面翻到背面. 在二维游戏中，相应的限制条件要改为：位置处于最东南角的那枚钱币必须从正面翻到背面. 在此种游戏中，位于 a 行、b 列的钱币值将记为 $\mathcal{G}(a,b)$.

离合双生子*

让我们从一个极简单的游戏开始，其走法是将处于同行或同列的两枚钱币翻转. 于是尼姆值表格中的典型数值便是同行或同列中以前从未出现过的最小数，如表 7 所示. 从而我们可以

---

* 译者注：原文为 Acrostic，即离合诗，也叫藏头诗或露尾诗. 例如《水浒传》第六十二回有一首诗：

芦花荡里一扁舟，俊杰那能此地游？
义士手提三尺剑，反时须斩逆臣头.

第一字连起来读，就是“芦（卢的同音字，用作借代）俊义反”. 英文与法文中，也有同样体裁的诗句.

同卵双生子在血型、性情脾气、遭遇等方面有惊人的类似之处，荣辱与同，故以“离合”取作游戏名称.

看出，离合双生子游戏定义了一个尼姆加法：

$$\mathscr{G}(a,b)=a\overset{*}{+}b.$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

表 7. 怎样玩"离合双生子"游戏.

翻转四角游戏

这是一个更为有趣的游戏，其走法是把具有水平或垂直边的任一矩形四只角上的钱币翻身. 其尼姆值可用以下公式：

$$\mathscr{G}(a,b)=\mathrm{mex}\{\mathscr{G}(a',b)\overset{*}{+}\mathscr{G}(a,b')\overset{*}{+}\mathscr{G}(a',b')\}$$

来计算，其中 a'，b'是分别小于 a，b 的任意数(见图 9). 表 8 给出了 a，b 小于 16 的各种情况.

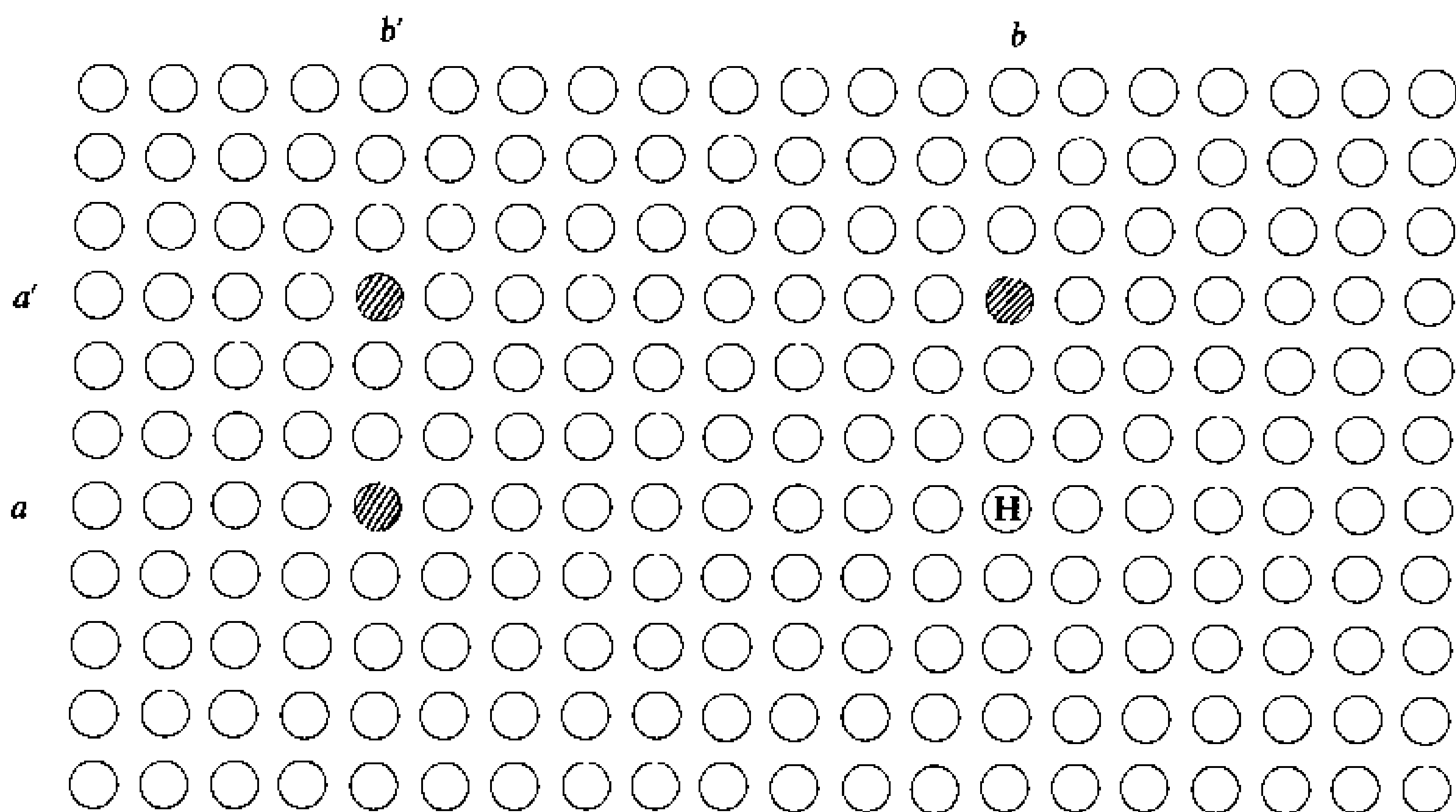


图 9. 翻转四角游戏的一个典型走法.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

表 8. 你听说过"梯姆表"吗?

例如，$16 \overset{*}{\times} 5=80$，情况如常，但是 $16 \overset{*}{\times} 16=24$. 表 9 给出了 2 的乘幂之积.

盘旋的格子图案

图 10 表明了这一游戏中一步典型动作所能翻转的钱币. 打上方框的地方形成了我们所谓的**格子图案**. 一般地说，我们可选定一些行和列，而格子图案的位置就是这些行和列的交会. 在**旋转格子图案**游戏中，我们可以把任一格子图案的钱币加以旋转，但在其他游戏中也可对选出的行、列加上一些限制. 表 9 实际是**旋转格子**图游戏尼姆值的表格，它是下述理论的一个特例.

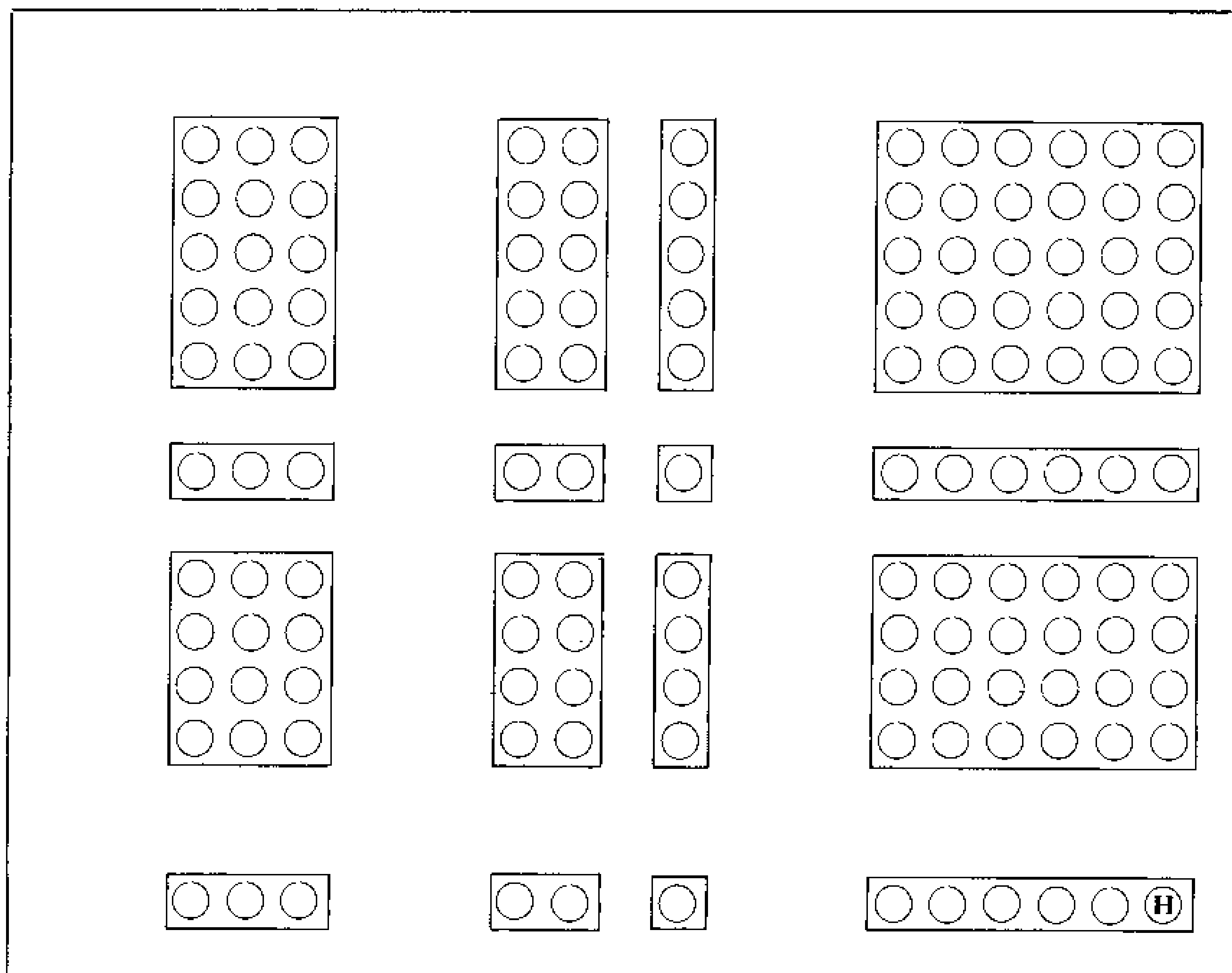


图 10. 一个格子图案.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	…
2	3	8	12	32	48	128	192	512	…
4	8	6	11	64	128	96	176	1024	…
8	12	11	13	128	192	176	208	2048	…
16	32	64	128	24	44	75	141	4096	…
32	48	128	192	44	52	141	198	8192	…
64	128	96	176	75	141	103	185	16384	…
128	192	176	208	141	198	185	222	32768	…
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	381	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

表 9. 2 之乘幂的尼姆积.

格子图定理

我们可以从两个一维翻转游戏 A,B 来建立一个**格子图案游戏** $A\times B$,作出的安排是:格子图案中各行钱币的翻转应符合游戏 A 的走法,而各列中钱币的翻转应与游戏 B 的走法一致.若 A,B 都是杂色小丑游戏(其中任意一组钱币都可翻转),则可看出

杂色小丑×杂色小丑=旋转格子图案.

由格子图定理可知,旋转格子图游戏的尼姆值实为两个杂色小丑游戏的尼姆积——由于后者的尼姆值恰为 2 的各个乘幂,这就证明了我们对表 9 所作的论断.

更一般地:

> 格子图案游戏 $A\times B$ 的尼姆值就是游戏 A 与游戏 B 的尼姆值之积: $\mathcal{G}_{A\times B}(a,b)=\mathcal{G}_A(a)\overset{*}{\times}\mathcal{G}_B(b)$.

格 子 图 定 理

定理的证明(我们不想给出它)依赖于以下有关尼姆积 $a\overset{*}{\times}b$ 的特殊性质:

> 若 $x_1,x_2,\cdots$ 是一些数而使 $a=\mathrm{mex}(a\overset{*}{+}x_i)$,
>
> 而 $y_1,y_2,\cdots$ 是一些数而使 $b=\mathrm{mex}(b\overset{*}{+}y_j)$,
>
> 则我们有 $a\overset{*}{\times}b=\mathrm{mex}(a\overset{*}{\times}b\overset{*}{+}x_i\overset{*}{\times}y_j)$.

它可以从 ONAG 书中第 55 页的一个结果导出.

毛毯,地毯,窗与门

在翻转四角游戏中我们将一矩形四只角上的钱币全部翻转,所以

翻转四角＝双生子×双生子.

在**地毯**游戏中,我们把某个实心矩形中的一切钱币全部翻转,换言之,格子图案必须由连续的行和连续的列构成.由于在直尺游戏中的一步是要把一行连续的钱币统统翻转,所以就有

直尺×直尺＝毛毯,

其尼姆值如表 10 所示:

1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
2	3	2	8	2	3	2	12	2	3	2	8	2	3	2	32
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
4	8	4	6	4	8	4	11	4	8	4	6	4	8	4	64
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
2	3	2	8	2	3	2	12	2	3	2	8	2	3	2	32
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
8	12	8	11	8	12	8	13	8	12	8	11	8	12	8	128

表 10. 上面有张**表**的毛毯.

所谓**地毯**游戏是指,无论行、列都形成对称集的格子图案,如图 11,而相应的地毯游戏的尼姆值见表 11 所示:

地毯＝西姆×西姆.

在**合式地毯**游戏中,只准许人们把房间里角上都铺垫得很服贴的地毯加以翻转,所以

合式地毯＝简化西姆×简化西姆.

它的分析推导留给本书的读者去做.

在**窗户**游戏中,我们要把九枚钱币加以翻转(三行与三列都是等间隔的,见图 12),所以

窗户＝萝卜×萝卜.

其尼姆值是迄今我们所发现的最复杂者.为了计算一个指定局势的结果,我们必须执行不

图 11. 一张地毯.

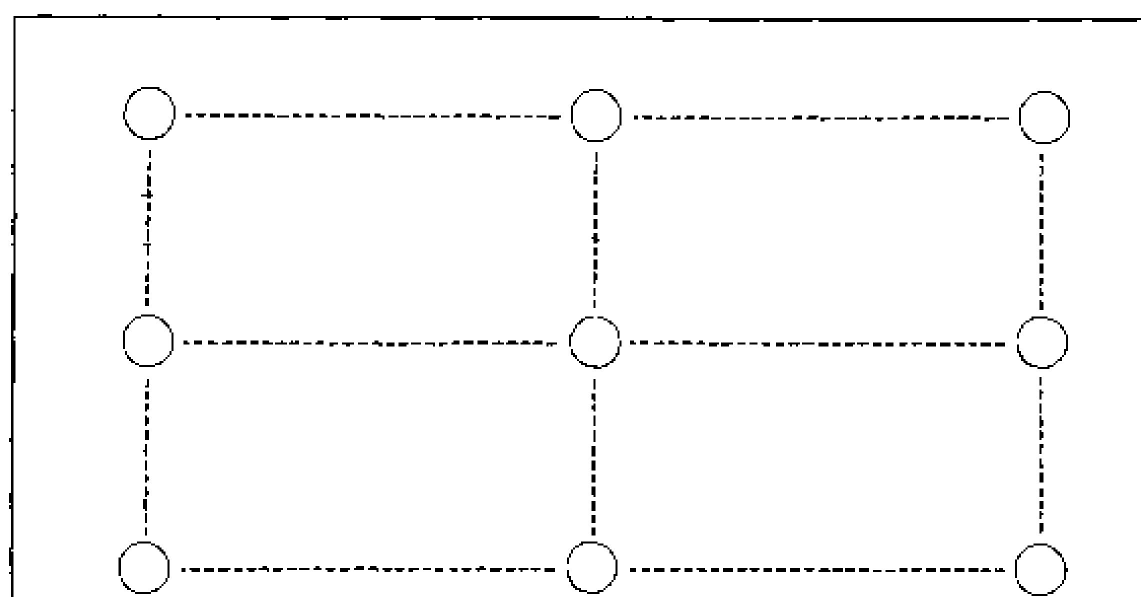


图 12. 窗户游戏中的一步.

1	2	4	3	6	7	8	16	18	25	32	11	64	31	128	10	256
2	3	8	1	11	9	12	32	35	46	48	13	128	37	192	15	512
4	8	6	12	14	10	11	64	72	79	128	7	96	65	176	3	1024
3	1	12	2	13	14	4	48	49	55	16	6	192	58	64	5	768
6	11	14	13	5	3	7	96	107	97	176	10	224	100	112	12	1536
7	9	10	14	3	4	15	112	121	120	144	1	160	123	240	6	1792
8	12	11	4	7	15	13	128	140	133	192	9	176	130	208	1	2048
16	32	64	48	96	112	128	24	56	136	44	176	75	232	141	160	4096
18	35	72	49	107	121	140	56	27	166	28	189	203	205	77	175	4608
25	46	79	55	97	120	133	136	166	20	204	178	187	117	221	171	6400
32	48	128	16	176	144	192	44	28	204	52	208	141	124	198	240	8192
11	13	7	6	10	1	9	176	189	178	208	15	112	184	144	4	2816
64	128	96	192	224	160	176	75	203	187	141	112	103	91	185	48	16384
31	37	65	58	100	123	130	232	205	117	124	184	91	17	173	167	7936
128	192	176	64	112	240	208	141	77	221	198	144	185	173	222	16	32768
10	15	3	5	12	6	1	160	175	171	240	4	48	167	16	14	2560
256	512	1024	768	1536	1792	2048	4096	4608	6400	8192	2816	16384	7936	32768	2560	384

表 11. 一张数值极大的地毯.

少于四步的连续运算：

1. 把一枚正面钱币的两个坐标都用三进位表示，并求出其最后的数码 2(如果有的话).

2. 将坐标代之以相应的伪奇数(或零). 这就需要进一步把它化为二进位.

3. 对每一枚正面钱币，求出上面所得的两个数目的尼姆积.

4. 对所有的正面钱币，求出以上所得数字的尼姆和.

在所有这些游戏中，不论走哪一步，位于东南角上的那枚钱币是必须从正面翻到背面的. 于是我们的下一个游戏理应加上东北角上的钱币必须从正面翻到背面的条件. 在"门"的这种游戏中，要求人们把 12 枚钱币(三个等间隔的列与四个对称排列的行交会而成，但规定必须取最底下的一行，如图 13 所示).

这就表明：

门＝萝卜×小猪打鼾.

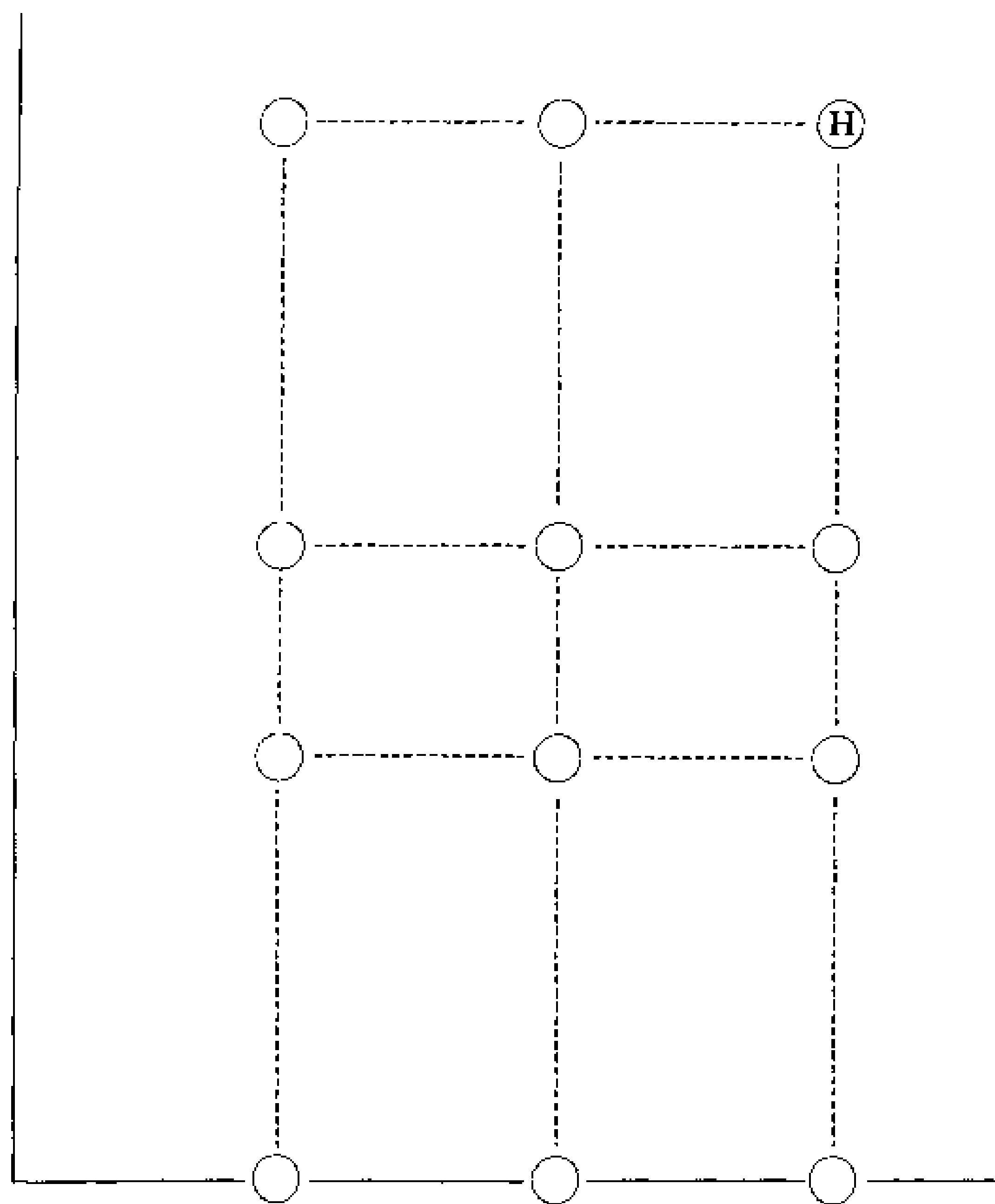


图 13. "门"游戏中典型的一步.

所以你应能很快地算出“门”游戏中的一个局势(在第 100 行与第 100 列处有一个正面向上的钱币)的尼姆值.(注意:第一行的编号是 0.)

离合游戏

还有别的办法从两个一维翻转游戏 A, B 来构作一个二维游戏. 在**离合积** $A \cup B$ 中, 要翻转的钱币必须都位于同行, 或者都位于同列. 如果此等钱币都在同列, 它们就应该遵循游戏 A 的走法; 若它们都在同行, 则自应遵循游戏 B 的走法. 我们已经碰到过这种类型中的一个游戏:

离合双生子=双生子∪双生子.

在**离合萝卜**游戏中我们当然必须把三个等间距的萝卜翻转,它们要么位于同行,要么位于同列,而距角最远的一枚钱币必须从正面翻到背面:

离合萝卜=萝卜∪萝卜.

表 12 中给出了前 1 681 个尼姆值,不难证明由 0 开始的一行或一列将重复萝卜本身的尼姆序列,而不在这类行、列中的值是 1.

条带与条纹

即使我们对一维游戏 A,B 已有了充分理解,但仍然不知道怎样去玩一般性的离合积游戏 $A \cup B$. 但如果正好发生了这样的事(有时也确实如此),在你的每一个游戏中,一个位置的每个尼姆值为 7 或 2 的某一乘幂,我们能够为你提供一些帮助. 现在让我们先来讨论此种类型的两个简易游戏.

在**条纹**游戏中,我们可以把位于同行或同列的任意集合(**条纹**)的钱币予以翻转,即

条纹=杂色小丑∪杂色小丑.

由于杂色小丑游戏的尼姆值正好是 2 的乘幂,于是条纹游戏的每个尼姆值是一切数字(它们是同行或同列的尼姆值之和)的局外最小数 mex,我们由此而造出了表 13.

在**条带**游戏中,我们要翻转的钱币必须位于同一行或同一列的连续位置上(形成一个**长条**),表 14 中的数字给出了条带游戏

条带=直尺∪直尺

的尼姆值,它们显然可以从表 13 中的数字得出来,我们应怎样对此作出解释呢?



0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4
4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4
4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	1	4	4	1	1	1	1	4	4	1	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	4	4	1	4	4	1	2	2	1	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	0	1	0	0

表 12. 萝卜游戏的场地.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	…
2	1	5	9	17	33	65	129	257	…
4	5	2	10	18	34	66	130	258	…
8	9	10	4	20	36	68	132	260	…
16	17	18	20	8	40	72	136	264	…
32	33	34	36	40	16	80	144	272	…
64	65	66	68	72	80	32	160	288	…
128	129	130	132	136	144	160	64	320	…
256	257	258	260	264	272	288	320	128	…
……									

表 13. 条纹值.

1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
2	1	2	5	2	1	2	9	2	1	2	5	2	1	2	17
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
4	5	4	2	4	5	4	10	4	5	4	2	4	5	4	18
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
2	1	2	5	2	1	2	9	2	1	2	5	2	1	2	17
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
8	9	8	10	8	9	8	4	8	9	8	10	8	9	8	20
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
2	1	2	5	2	1	2	9	2	1	2	5	2	1	2	17
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
4	5	4	2	4	5	4	10	4	5	4	2	4	5	4	18
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
2	1	2	5	2	1	2	9	2	1	2	5	2	1	2	17
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16
16	17	16	18	16	17	16	20	16	17	16	18	16	17	16	8

表 14. 条带值.



丑化与嘲弄

我们来介绍一种野心勃勃的消遣. 我们将把表 13(或 14)中的一个数值称为同行或同列表首的两个 2 的乘幂的**丑化乘积**(简称**丑积**),并记为

$$4 \overset{*}{\cup} 8 = 10 \text{(“4 丑乘 8 等于 10”)}.$$

利用乘法分配律,可以求出其他数的丑化积:

$$1 \overset{*}{\cup} 11 = 4 \overset{*}{\cup} (8 \overset{*}{+} 2 \overset{*}{+} 1) = 10 \overset{*}{+} 5 \overset{*}{+} 4 = 11,$$

$$5 \overset{*}{\cup} 11 = (4 \overset{*}{+} 1) \overset{*}{\cup} 11 = 11 \overset{*}{+} 11 = 0.$$

最后一个等式表明 5 与 11 是 **0 的嘲弄因子**. 表 15 给出了一直到 16 为止的丑化表格.

对较大的数,我们可应用下列规则:

> 若 N 为 2 的任一乘幂而 $n<N$,则有
>
> $$N \overset{*}{\cup} n = \begin{cases} N + \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor, & \text{若 } n \text{ 为伪奇数;} \\ \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor, & \text{若 } n \text{ 为伪偶数.} \end{cases}$$
>
> $$N \overset{*}{\cup} N = \lceil \frac{1}{2} N \rceil.$$

表 15 中的行、列是 7 与 2 的乘幂者已排成粗体字,而它们的交会部分已打上方框. 我们将利用这些行的下列性质:

> 1. 在粗体字任一行中的数不一样. 用符号表示,若 a 为 7 或 2 的一个乘幂,而 $b \neq \bar{b}$,则 $a \overset{*}{\cup} b \neq a \overset{*}{\cup} \bar{b}$.
> 2. 每一个打上方框的数是其行、列中所有前面各数的局外最小数. 换言之,若 a 与 b 都为 7 或 2 的乘幂,则 $a \overset{*}{\cup} b$ 为形如 $a' \overset{*}{\cup} b$ 或 $a \overset{*}{\cup} b'$,$a'<a$,$b'<b$ 的一切数的局外最小数.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	2	1	3	5	7	4	6	9	11	8	10	12	14	13	15	17
0	3	3	0	1	2	2	1	1	2	2	1	0	3	3	0	1
0	4	5	1	2	6	7	3	10	14	15	11	8	12	13	9	18
0	5	7	2	6	3	1	4	2	7	5	0	4	1	3	6	2
0	6	4	2	7	1	3	5	3	5	7	1	4	2	0	6	3
0	7	6	1	3	4	5	2	11	12	13	10	8	15	14	9	19
0	8	9	1	10	2	3	11	4	12	13	5	14	6	7	15	20
0	9	11	2	14	7	5	12	12	5	7	14	2	11	9	0	4
0	10	8	2	15	5	7	13	13	7	5	15	2	8	10	0	5
0	11	10	1	11	0	1	10	5	14	15	4	14	5	4	15	21
0	12	12	0	8	4	4	8	14	2	2	14	6	10	10	6	6
0	13	14	3	12	1	1	15	6	11	8	5	10	7	4	9	22
0	14	13	3	13	3	0	14	7	9	10	4	10	4	7	9	23
0	15	15	0	9	6	6	9	15	0	0	15	6	9	9	6	7
0	16	17	1	18	2	3	19	20	4	5	21	6	22	23	7	8

表 15. 到 16s 为止的丑化表.

这些知识可用来证明下列定理:

> 若 A 与 B 中每个位置的尼姆值是 7 或 2 的乘幂,则离合游戏 $A \cup B$ 的尼姆值可以通过 A,B 的尼姆值的丑化积而算得:
>
> $$\mathscr{G}_{A\cup B}(a,b)=\mathscr{G}_A(a)\overset{*}{\cup}\mathscr{G}_B(b).$$

丑 化 定 理

为了看出这一点,设游戏 A 或 B 中典型的一步是分别将下列位置

$$a_1<a_2<\cdots<a$$

或

$$b_1<b_2<\cdots<b$$

的钱币加以翻转.我们将用

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha$$

与

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta$$

来记这些位置的尼姆值，则离合积 $A \cup B$ 的尼姆值 $\mathscr{G}(a, b)$ 是一切形如

$$\alpha_1 \overset{*}{\cup} \beta \overset{*}{+} \alpha_2 \overset{*}{\cup} \beta \overset{*}{+} \cdots$$

或

$$\alpha \overset{*}{\cup} \beta_1 \overset{*}{+} \alpha \overset{*}{\cup} \beta_2 \overset{*}{+} \cdots$$

诸数的局外最小数. 也就是下列形状

$$\bar{\alpha} \overset{*}{\cup} \beta \quad 或 \quad \alpha \overset{*}{\cup} \bar{\beta}$$

各数的局外最小数，此处

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \overset{*}{+} \alpha_2 \overset{*}{+} \cdots,$$

$$\bar{\beta} = \beta_1 \overset{*}{+} \beta_2 \overset{*}{+} \cdots.$$

现在，α 是由此种方式生成的一切数 $\bar{\alpha}$ 的局外最小数，而 β 是一切 $\bar{\beta}$ 的局外最小数，所以，每一个 $\alpha' < \alpha$ 是 $\bar{\alpha}$ 中的一个，而每一个 $\beta' < \beta$ 是 $\bar{\beta}$ 中的一个. 但根据假设，每一个 α 与 β 或者是 7，或者是一个 2 的乘幂，从而 $\alpha \overset{*}{\cup} \beta$ 肯定是一切形为

$$\alpha' \overset{*}{\cup} \beta \quad 或 \quad \alpha \overset{*}{\cup} \beta'$$

诸数的局外最小数. 再说，α 与一切数 $\bar{\alpha}$ 都不相同，于是 $\alpha \overset{*}{\cup} \beta$ 同一切数 $\bar{\alpha} \overset{*}{\cup} \beta$ 也不相同；根据类似的理由可知它与 $\alpha \overset{*}{\cup} \bar{\beta}$ 也不一样，于是 $\alpha \overset{*}{\cup} \beta$ 也是它们的局外最小数.

这样就解释了我们为条带游戏所找到的值，并能帮助我们讨论一些类似的游戏. 譬如说，在**带与条**游戏中，我们可以把位于水平或垂直条带上的钱币加以翻转，前面的一些尼姆值见表 16 所示.

1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2	…
2	1	2	5	2	1	2	9	2	1	2	5	2	1	2	17	2	1	…
4	5	4	2	4	5	4	10	4	5	4	2	4	5	4	18	4	5	…
8	9	8	10	8	9	8	4	8	9	8	10	8	9	8	20	8	9	…
16	17	16	18	16	17	16	20	16	17	16	18	16	17	16	8	16	17	…
…																		

表 16. 条与带.

表 17 给出了纵横五中取三游戏* 的尼姆值. 如果在同一横行或同一纵列中有五枚钱币，则我们至多可以翻转其中的三枚.

1	2	4	7	8	1	2	4	7	8	1	2	4	7	8	…
2	1	5	6	9	2	1	5	6	9	2	1	5	6	9	…
4	5	2	3	10	4	5	2	3	10	4	5	2	3	10	…
7	6	3	2	11	7	6	3	2	11	7	6	3	2	11	…
8	9	10	11	4	8	9	10	11	4	8	9	10	11	4	…
1	2	4	7	8	1	2	4	7	8	1	2	4	7	8	…
2	1	5	6	9	2	1	5	6	9	2	1	5	6	9	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

表 17. 纵横五中取三游戏.

* 译者注：原文为 Acrostic Mock Turtle Fives，如直接用“离合诗”、“甲鱼”等字样，殊为不妥，故改为意译.

增　　补

没有锁上的门

对萝卜游戏来说，表 5 给出 $\mathscr{G}(99)=4$，而对小猪打鼾游戏，由第 4 章格隆第游戏的讨论给出 $\mathscr{G}(99)=5$；从而，在"门"游戏中，位于第 100 行与第 100 列交叉处的钱币，其值为

4"梯姆斯"5＝2. *

晶石，方盒与篱笆

任何维数都有翻转游戏，我们只想提一提三个三维游戏. 在**晶石**游戏中可以翻转任意两个位于同行、同列或同一垂线上的钱币，即一个"晶石"的两端. 尼姆值表格中的一个典型数值是其同行、同列与同一垂线上前面各值的局外最小数，从而就有

$$\mathscr{G}(a,b,c)=a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c.$$

在**方盒**游戏中我们要翻转一只长方形盒子八只角上的钱币. 这种游戏实际上是翻四角游戏的三维推广. 它的尼姆值为三次的尼姆积

$$\mathscr{G}(a,b,c)=a \overset{*}{\times} b \overset{*}{\times} c.$$

在"篱笆"游戏中我们要把一个矩形篱笆四只角上的钱币翻转，这种矩形的边要与三个坐标轴中的任意二边平行. 可以证明

$$\mathscr{G}(a,b,c)=b \overset{*}{\times} c \overset{*}{+} c \overset{*}{\times} a \overset{*}{+} a \overset{*}{\times} b.$$

---

* 译者注：梯姆斯就是 tims，其意思为尼姆积，见本章正文. 在英语用法中，"times"表示普通乘法，于是作者将它篡改为 tims，用来表示尼姆的乘法.

在以上三种游戏中,距原点最远的那一枚钱币必须从正面翻到背面.

具有无穷多(或 2^{2^N})条"边"的钱币(或堆)

可用于一大批新的"翻转"游戏,其理论也涉及尼姆乘法.譬如说,游戏规则是要至多改变 $H_{-1}, H_0, H_1, \cdots$ 中的两堆,而最右边的一堆必须减小,则其 $\mathscr{P}$—局势必须满足

$$H_0 \overset{*}{+} H_1 \overset{*}{+} H_2 \overset{*}{+} \cdots = 0 \quad \text{以及} \quad 0 \overset{*}{\times} H_0 \overset{*}{+} 1 \overset{*}{\times} H_1 \overset{*}{+} 2 \overset{*}{\times} H_2 \overset{*}{+} \cdots = H_{-1}.$$

参考文献及进一步阅读材料

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapter 6.

Richard K. Guy, She loves me, she loves me not; relatives of two games of Lenstra, Een Pak met een Korte Broek, Papers presented to H. W. Lenstra, 77:05:18, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

H. W. Lenstra, Nim multiplication, Séminaire de Théorie des Nombres, 1977—78 exposé No. 11, Université de Bordeaux.

第15章

筹码与条带

今夜我有点心惊肉跳，
因为我梦见了钱包.
——威廉·莎士比亚,《威尼斯商人》, Ⅱ, V. 17

本章讲到的许多游戏都是从尼姆游戏通过某些办法演变而来. 虽然尼姆游戏通常是在各堆筹码上玩弄,但也可以在狭长条上玩弄钱币,其游戏规则是把任何一枚钱币向左移动任意个数的格子. 图1表明了两种一模一样的局势,貌异而实同. 向左移动一枚钱币等于是在一堆中减少筹码.

我们将通过改变一些条件(筹码的减少或钱币的移动)来得出尼姆游戏的许多推广.

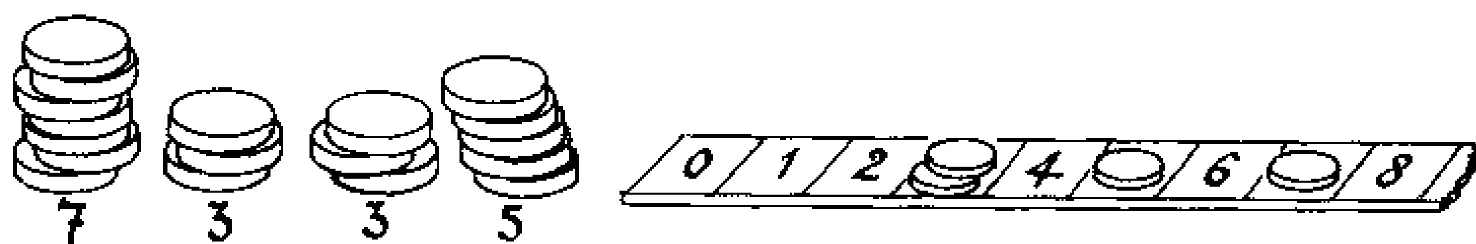


图 1. 尼姆游戏的两种形式.

银元游戏

我们的第一个变种游戏是,每一个方格子里至多只能有一枚钱币,不允许一枚钱币跳过另一枚钱币. 人们也许要花费相当长的时间去发现,此种游戏实际上不过是尼姆游戏的一种巧妙

伪装,它同第 3 章中讲到过的扑克牌尼姆游戏有着密切关系.各个尼姆堆的大小实际上是从最右面的钱币算起,各枚钱币之间的间隔数(必须相间地计算)见图 2 所示.

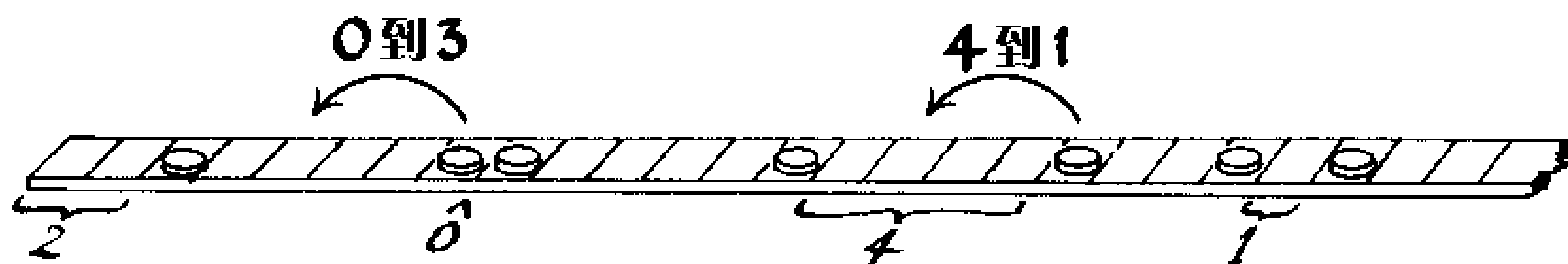


图 2. 没有银元的银元游戏.

请注意,在这些数字中,任意减小一个数字是可能的(从间隔的右端移动钱币),而使数目字增大也是可能的(从间隔的左端向右移动钱币),我们已经在附图中指明了这两种代表性走法,但正如在扑克牌尼姆游戏中已经指出的,增大的走法仅不过是可以逆转的.拖延时间的动作,明眼人只要按尼姆游戏行事便可取胜.

N·G·德·布鲁吉(de Bruijn)将游戏改造得更加有趣,他把最左边的格子变成一只钱袋(好像聚宝盆一样,能装进任意数量的钱币),并将一枚钱币变成一枚银元,比所有其他钱币加起来还要值钱.现在,还没有放入钱袋里的钱币可以放进袋里去,以作为一步动作.但是,把银元放进钱袋里去的人必定是个输家,因为我们还允许有别的动作——拿走钱袋!

在尼姆游戏的这一变种中,当钱袋右边的第一枚货币是银元时,钱袋认为是满的格子;而在其他情况下则认为它是空格子(因为我们不着望把银元放进钱袋,故而当银元是最靠近它的货币时就把它视为满的).如果我们能赢得尼姆游戏,那么我们就不会被逼得把银元放进钱袋中去.

如果我们修改规则,谁把银元放进钱袋同拿走钱装算作一步,那么,仅当钱袋与银元之间只有一枚别的钱币时,才能把钱袋看成是满的.(我们自然不希望把这枚钱币放入钱袋,因为对手将会毫不迟疑地在下一步把银元放进去!)

求在以上两种情况下,图 3 的获胜走法.

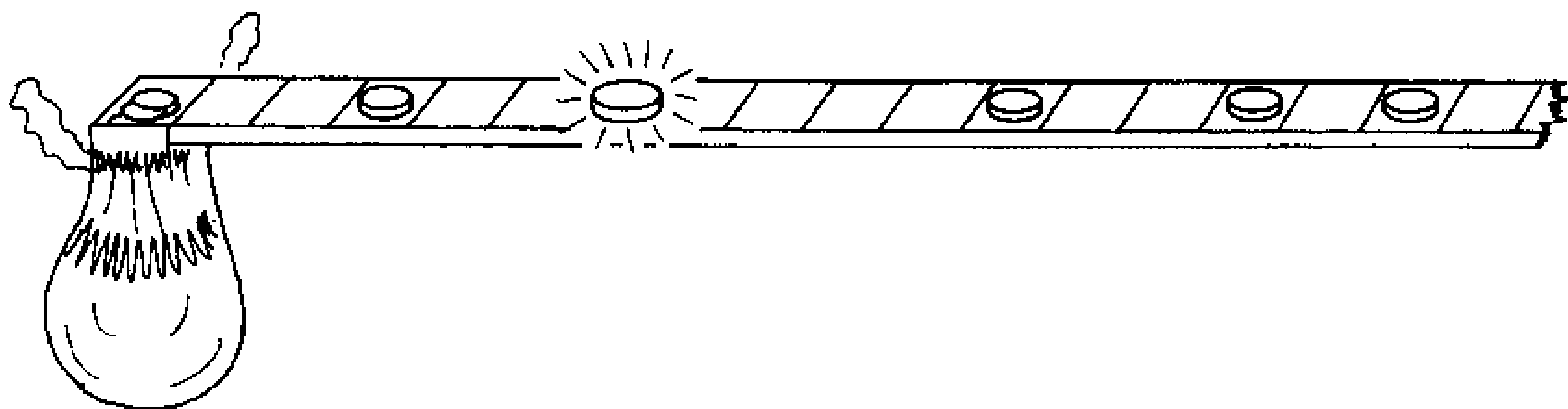


图 3. 德·布鲁吉的银元游戏.

来自博弈表的好处

如果你碰到一个《稳操胜券》中没有分析过的游戏，那该怎么办呢？也许你很幸运，走了不多几局之后就迅速抓住了游戏的要害. 不过你也有可能看不出什么名堂，而我们的理论也不像能够为你提供什么线索，此时此刻，你所能做的最好事情就是去编制一张**博弈表**. 这种做法颇为有利，因为它能帮你取得一些组织信息的技巧. 在本章中，我们将提供一些形形色色的例子.

反义尼姆

在**反义尼姆游戏**中，任何两堆都不准有相同个数的钱币. 当然，我们并不在意空堆，所以你如果用条带上玩钱币的办法来做这种游戏，限制条件就是：同一格子上不准放两枚钱币，除非这个格子就是钱袋本身(格子 0).

我们可用单独的一张表格来分析三钱反义尼姆游戏(见表 1). 表头* 是两个堆的大小，而表格中间的数字则是使之补全、形成一个 $\mathscr{P}$ -局势的唯一的堆的大小. 表中允填的数字是同行、同列中前此未曾出现过的数字中的最小数，并且同表头数字也不一样. 表中的 X 表明它是一个非法(不合游戏规则的)位置.

表中显然表现出一个明显模式，它揭示的规律是：

> 若$(a+1,b+1,c+1)$为尼姆游戏的一个 $\mathscr{P}$ 局势，
> 则(a,b,c)为反义尼姆的一个 $\mathscr{P}$—局势.

对四钱反义尼姆游戏，我们需要一个三维表格，我们可以分层造表. 下一层(表 2)的表看起来不像有什么简单的规律，即便对局势$(1,a,b,c)$也如此，所以我们还要进一步再看几层(表 3).

不难看出，对$\leqslant 7$ 的数来说，$\mathscr{P}$ -局势正好是

(0)12， (0)34， (0)56， 135， 146， 236， 245，
1234， 1256， 1367， 1457， 2357， 2467， 3456，
(0)123456.

---

* 译者注：表头指表的左端与上端. 尤须注意，作者们再次表现出行文随便的风格. 此处堆的大小实际上体现为纸带上的间隔. 今后请读者自加领会，不再一一指出.

3 堆 $\mathscr{P}$ 局势就是图 4 中的直线，把顶上的结点看作 0；而 4 堆 $\mathscr{P}$ 局势即为直线之补，这时顶上的结点却要看成是 7 了. *

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13
1	2	X	0	5	6	3	4	9	10	7	8	13	14	11	12
2	1	0	X	6	5	4	3	10	9	8	7	14	13	12	11
3	4	5	6	X	0	1	2	11	12	13	14	7	8	9	10
4	3	6	5	0	X	2	1	12	11	14	13	8	7	10	9
5	6	3	4	1	2	X	0	13	14	11	12	9	10	7	8
6	5	4	3	2	1	0	X	14	13	12	11	10	9	8	7
7	8	9	10	11	12	13	14	X	0	1	2	3	4	5	6
8	7	10	9	12	11	14	13	0	X	2	1	4	3	6	5
9	10	7	8	13	14	11	12	1	2	X	0	5	6	3	4
10	9	8	7	14	13	12	11	2	1	0	X	6	5	4	3
11	12	13	14	7	8	9	10	3	4	5	6	X	0	1	2
12	11	14	13	8	7	10	9	4	3	6	5	0	X	2	1
13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2	X	0
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	X

表 1. 三钱反义尼姆游戏的 $\mathscr{P}$—局势.

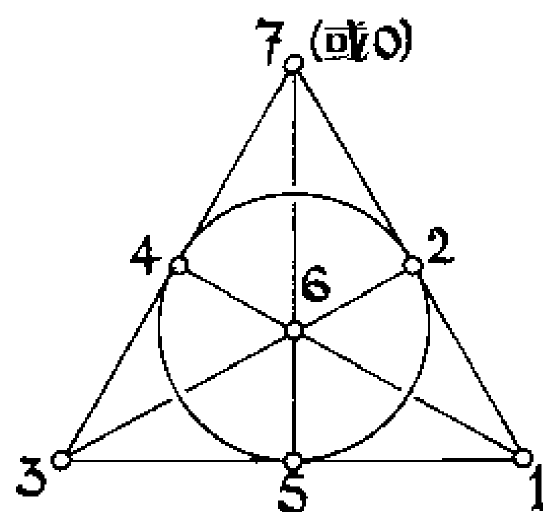


图 4. 快速检出反义尼姆 $\mathscr{P}$—局势的范诺(Fano)妙法.

* 译者注：譬如说，直线 135 的补便是 2467，其余仿此.

0	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X	2	X	0	5	6	3	4	9	10	7	8	13	14	11	12
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	0	X	X	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13
3	5	X	4	X	2	0	7	6	9	8	11	10	13	12	15
4	6	X	3	2	X	7	0	5	12	11	14	9	8	15	10
5	3	X	6	0	7	X	2	4	11	12	13	8	9	10	16
6	4	X	5	7	0	2	X	3	14	13	12	15	10	9	8
7	9	X	8	6	5	4	3	X	2	0	15	14	16	17	11
8	10	X	7	9	12	11	14	2	X	3	0	5	4	16	6
9	7	X	10	8	11	12	13	0	3	X	2	4	5	6	17
10	8	X	9	11	14	13	12	15	0	2	X	3	6	5	4
11	13	X	12	10	9	8	15	14	5	4	3	X	2	0	7
12	14	X	11	13	8	9	10	16	4	5	6	2	X	3	0
13	11	X	14	12	15	10	9	17	16	6	5	0	3	X	2
14	12	X	13	15	10	16	8	11	6	17	4	7	0	2	X

表 2. 反义尼姆游戏的 $\mathscr{P}$—局势$(1,a,b,c)$.

同义尼姆游戏

在同义尼姆游戏中凡是同样大小的堆都必须同样处理——如果你想减小某一堆，那就必须把同样大小的堆都减少同一数量(没有一种动作可以影响不同大小的各堆). 在游戏以条带面目出现时，走法是将某个格子上的一切钱币统统放到任一前方格子中去.

这种游戏不会把我们阻留甚久，由于所有同样大小的各堆都必须按同样方式处理，所以它们可以看成是一堆. 把此堆减小为已有的一堆，其效果等于是把这一堆完全拿光. 于是我们可以认为所有各堆都是大小不同的，因而

> 同义尼姆游戏无非就是反义尼姆游戏的一个同义词而已!

2

0	X	1	2	3	4	5	6	7
X	1	0	X	6	5	4	3	10
1	0	X	X	4	3	6	5	8
2	X	X	X	X	X	X	X	X
3	6	4	X	X	1	7	0	5
4	5	3	X	1	X	0	7	6
5	4	6	X	7	0	X	1	3
6	3	5	X	0	7	1	X	4
7	10	8	X	5	6	3	4	X

3

0	X	1	2	3	4	5	6	7
X	4	5	6	X	0	1	2	11
1	5	X	4	X	2	0	7	6
2	6	4	X	X	1	7	0	5
3	X	X	X	X	X	X	X	X
4	0	2	1	X	X	6	5	8
5	1	0	7	X	6	X	4	2
6	2	7	0	X	5	4	X	1
7	11	6	5	X	8	2	1	X

4

0	X	1	2	3	4	5	6	7
X	3	6	5	0	X	2	1	12
1	6	X	3	2	X	7	0	5
2	5	3	X	1	X	0	7	6
3	0	2	1	X	X	6	5	8
4	X	X	X	X	X	X	X	X
5	2	7	0	6	X	X	3	1
6	1	0	7	5	X	3	X	2
7	12	5	6	8	X	1	2	X

5

0	X	1	2	3	4	5	6	7
X	6	3	4	1	2	X	0	13
1	3	X	6	0	7	X	2	4
2	4	6	X	7	0	X	1	3
3	1	0	7	X	6	X	4	2
4	2	7	0	6	X	X	3	1
5	X	X	X	X	X	X	X	X
6	0	2	1	4	3	X	X	8
7	13	4	3	2	1	X	8	X

表 3. 反义尼姆游戏(k,a,b,c)(其中 $2\leqslant k\leqslant 5$)的 $\mathscr{P}$—局势.

西蒙尼姆游戏

类似的游戏称为**西蒙尼姆**,是由西蒙·诺顿重新发现的. 它的走法实际上同尼姆游戏并无二致,但要加上一个特征:如有完全相同的几堆,则局中人可使每堆的数量从 a 减少到 b. 它与同义尼姆的不同点是:我们**不需要把所**有各堆都减少. 倘若我们在纸带上玩钱币,则游戏规则是:可以**把**任意数量的钱币从任一格子移到其前方的格子,而不管前方格子上有无钱币占格. 与以

前不同，表 4 的计算略为困难一点.

同通常一样，我们试图填入行中或列中以前未见过的最小数（若表中数字在对角线上，则也要看对角线上前所未见的最小数）. 但表中一行中至多只有一个数 n（记作 $\vec{n}$）可以等于其列的标号，而一列中也至多只有一个数 m（记作 $\downarrow m$）可以等于其行的标号，至于对角线，则只有数 0，才能同它的行标与列标吻合.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	$\downarrow\vec{0}$	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14
1	2	3	0	$\downarrow 1$	$\vec{4}$	7	8	5	6	11	12	9	10	15
2	1	0	4	$\vec{3}$	$\downarrow 2$	8	7	6	5	12	11	10	9	16
3	4	$\vec{1}$	$\downarrow 3$	2	0	9	10	11	12	5	6	7	8	17
4	3	$\downarrow 4$	$\vec{2}$	0	1	10	9	12	11	6	5	8	7	18
5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	$\downarrow 5$	$\vec{12}$	19
6	5	8	7	10	9	0	12	2	1	4	3	$\vec{11}$	$\downarrow 6$	20
7	8	5	6	11	12	1	2	9	0	$\downarrow 7$	$\vec{10}$	3	4	21
8	7	6	5	12	11	2	1	0	10	$\vec{9}$	$\downarrow 8$	4	3	22
9	10	11	12	5	6	3	4	$\vec{7}$	$\downarrow 9$	8	0	1	2	23
10	9	12	11	6	5	4	3	$\downarrow 10$	$\vec{8}$	0	7	2	1	24
11	12	9	10	7	8	$\vec{5}$	$\downarrow 11$	3	4	1	2	6	0	25
12	11	10	9	8	7	$\downarrow 12$	$\vec{6}$	4	3	2	1	0	5	26
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

表 4. 三钱西蒙尼姆游戏的 $\mathscr{P}$—局势.

当你在表 4 中注视了一、二个钟点之后，你将会发现它的许多模式而使其结构一清如水. 表中划出的实线明显地标识出

$$1\times1, 5\times5, 13\times13.$$

一般地说，$(2^n-3)\times(2^n-3)$ 的子块形成了**拉丁方**. 带有箭头的数字则落入 2×2 方框之内. 表的许多部分看上去都很像尼姆加法表.

当我们把表格推广到三维空间并在二维空间中尽量扩大之后，我们即可获得一个普遍法则以解决四堆西蒙尼姆游戏. 在西蒙本人的帮助指点之下我们甚至能够证明它！

把正整数分成好多段

$$1,2-3,4-7,8-15,16-31,\cdots$$

然后按下法变换西蒙尼姆局势：把首次出现的数 n 代之以 n'，第二次出现的数代之以 n''，第三次出现的数代之以 n'''，此处

$$n'=\begin{cases} n+3,\text{若它是转换局势中表示的最大一段；} \\ n+1,\text{若它是转换局势中表示的次大一段；} \\ n,\text{其他情况.} \end{cases}$$

$$n''=\begin{cases} \text{在 } n' \text{ 前面一段中的最大数，或在这段中的次大数；} \\ \text{若 } n \text{ 在原来局势中是次大数的话.} \end{cases}$$

n''' = 在 n'' 前面一段中的最大数.

当变换后的局势是尼姆游戏中的一个 $\mathscr{P}$ 局势时，则原来的局势为西蒙尼姆中的一个 $\mathscr{P}$—局势.

四堆西蒙尼姆游戏的法则

应用上述规则时，最好按从大到小的顺序书写各数. 从

$$n \quad 16 \quad 9 \quad 4 \quad 1$$

我们有何事可做呢？

可以求出

$$n' \quad 19 \quad 10 \quad 4 \quad 1$$

它们的尼姆和包含 16，所以不可能是一个 $\mathscr{P}$—局势. 因而我们必须把 16 减小为某个 x，而使 $x+3$ 不在 16－31 这一段. 于是有

n	x	9	4	1
n'	?	12	5	1

所以"?"必然为 $12 \overset{*}{+} 5 \overset{*}{+} 1 = 8$. 由于这是出现在转换局势中的最大一段，

故而　　x 必然是 $8-3=5$.

现在让我们对

$$n \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 2$$

来做一下，这里我们求出

$$\left.\begin{cases} n' & 12 \quad\quad 10 \quad 2 \\ n'' & \quad\quad 7 \end{cases}\right\} \text{尼姆和为 3.}$$

我们可以将尼姆和转化为 0，只要把 2 变为 1，10 变为 9 或 7 变为 4，于是产生局势

n	9	9	7	1	9	9	6	2	9	3	7	2
n'	12		10	1	12		9	2	12	4	10	2
n''		7				7						

一个当真困扰人的例题是

n	44	33	22	11
n'	47	36	23	11

没有希望用 23 来改变任一尼姆值 47，36 或 11，而当我们拿光 22 这一堆时：

n	44	33	0	11	
n'	47	36	0	12	尼姆和为 7.

我们得不出一个 $\mathscr{P}$ 局势. 奥妙在于，应使两个小堆相等：

n	44	33	11	11	
n'	47	36	12		尼姆和为 0.
n''				7	

五级楼梯游戏

你可以在楼梯上用钱币来玩这游戏，规则是可将**少于 5 枚**的任意数量的钱币，从一级楼梯上取走，移到较之为低的任意一级楼梯上，但间距必须**少于五级**. 谁能把最后一枚钱币放到最下面的一级楼梯上，他就是赢家.

如果只有四枚钱币，五级楼梯问题中"五"的限制就不起作用了，而本游戏可以归结为反义尼姆游戏. 仔细观察表 1—3 的上面 5×5 那部分表格，就可以发现一个事前意料不到的简单规则：

> 心中默默地把第 2 级与第 4 级上的钱币数交换一下. 则当所有钱币数的高度之和是 5 的倍数时，该局势为 $\mathscr{P}$—局势.

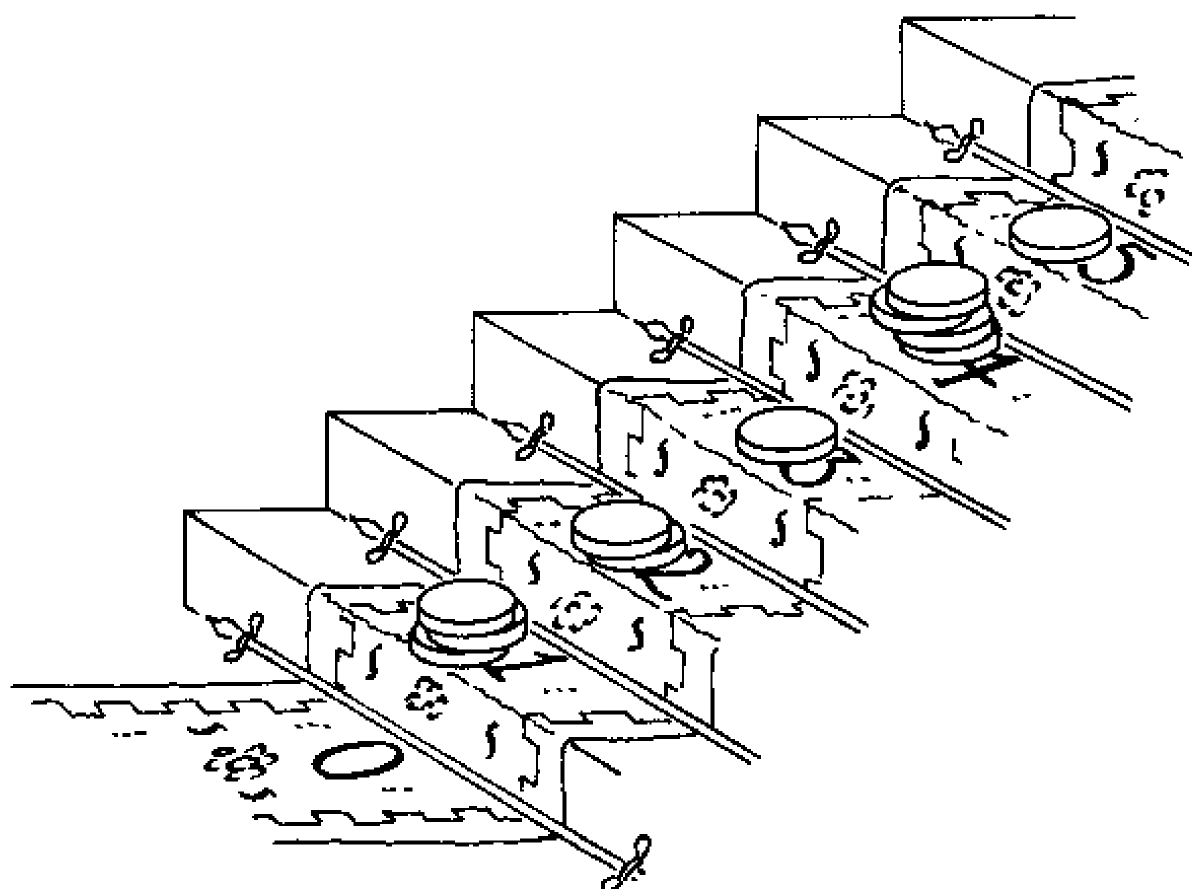


图 5. 楼梯上的各堆筹码.

譬如说,你应当作出如下安排,在你走过之后,如果

0 级上有 a 枚钱币，　1 级上有 b 枚，　2 级上有 c 枚，
3 级上有 d 枚，　　4 级上有 e 枚，

则应使

$$0\cdot a+1\cdot b+4\cdot c+3\cdot d+2\cdot e$$

能够被 5 整除.

钱币数与楼梯级数更多时,本规则仍能使用,只要我们把 $5n+2$ 级与 $5n+4$ 级交换就行.

两柱游戏*

这是一种保龄球游戏,是第 4 章中讨论过的**开勒司**游戏(·77)与**道森氏开勒司**游戏(·07)的推广. 这时,在列中有 1 或 2 只木柱(或保龄球). 如同开勒司游戏一样,一次投掷可以击倒相邻的一或二列,但必须加上一条规则:不准拿走单独一只木柱.

在讨论两柱游戏的各种构型时,我们将使用简单记号

---

* 译者注:也可读作"两瓶游戏",因为保龄球的样子很像一只木头做的瓶子.

· 表示　只有一个木柱的列，

* 表示　有二个木柱的列.

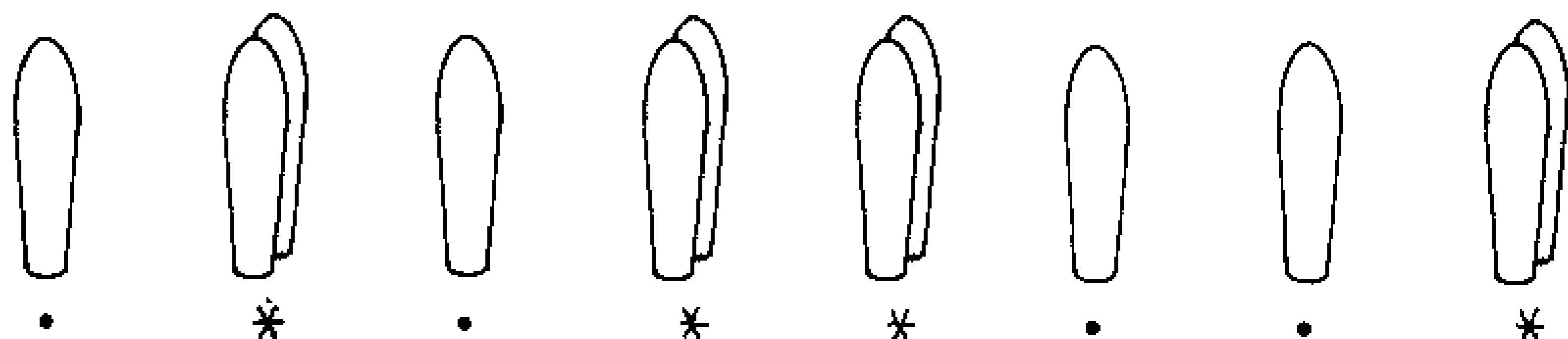


图 6. 两柱游戏.

从而 n 个非空的两柱游戏的列就有着 2^n 种可能的构型，而它们都可用 n 个“ * ”或“ · ”的序列来表示. 譬如说，我们看出

· =0，· · = · · · = · * = · * · = *，　* · * = * + * =0，

很幸运，*，* *，* * * 的值就是 *，*2，*3；* 但应注意，* * * * = *. 不过，我们并不需要繁琐地把所有可能序列全部一一列举出来，因为其中存在着某些有用的等价关系. 譬如说，容易看出

~~~~~~ * · ，~~~~~~ · · 与~~~~~~ *

在游戏中的性态都是一样的，而

~~~~~~ * · · * ~~~~~~　的表现却像是　~~~~~~ * * * ~~~~~~.

另外，还有一个很有用的**两柱游戏分解定理**：

~~~~~~ * · * ~~~~~~ = ~~~~~~ * + * ~~~~~~.

在应用过这些定理之后，你可以设想所有的行在每一个尽头处都有“星”，而在内部，将有三个或更多的“点”. 另外，n 颗“星”的序列(即(*)^n)，其性态同开勒司游戏 K_n 的局势是一样的，而序列(·)^n 及 * (·)$^{n-4}$ * 则同道森开勒司游戏中 D_n 的局势一样，故而你可以利用第 4 章的知识迅速读出其值. 我们的两柱游戏转盘(见图 7)将可求出所有长度在 9 或 9 以下两柱游戏的一切序列的尼姆值，唯一的例外为序列

* · · · * · · · · *，

它的尼姆值是 1.

上述所有的等价关系在反常游戏规则下依然能够成立，但两柱游戏转盘中间的数字应按以

---

* 译者注：*，*2，*3 为拧数；此处符号雷同，很易混淆，请注意.
~~~~~~

下模式.用别的数字替换:

转盘中的数字	改作	类属	转盘中的数字	改作	类属
0	0	0^1	$\mathbf{0}$	2—2	0^6
1	1	1^3	$\mathbf{1}$	3—2	1^1
2	2	2^2	$\mathbf{2}$	$k_1k3_22_230$	2^2
3	3	3^3	$\mathbf{3}$	$2_221=d$	3^{1431}
4	$2_2321=k$	4^{146}	$\mathbf{4}$	3_2320	4^{046}
5	$k—1$	5^{057}	$\mathbf{5}$	$kd3_2210$	5^{3146}

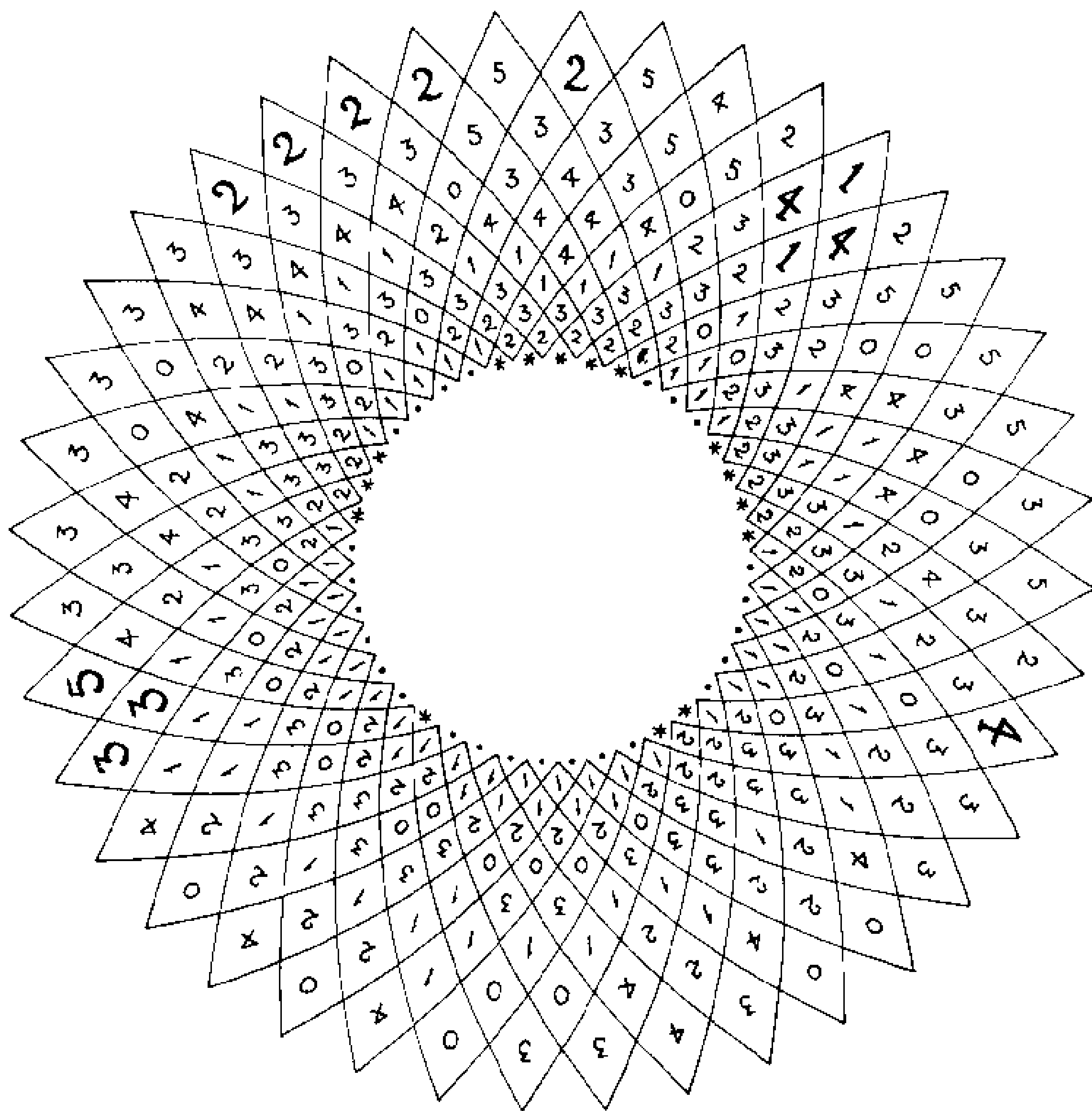


图 7. 一个两杠游戏转盘.

两柱游戏对造房子游戏(见第 16 章)及下面马上就要讲到的填鸭游戏都有应用.

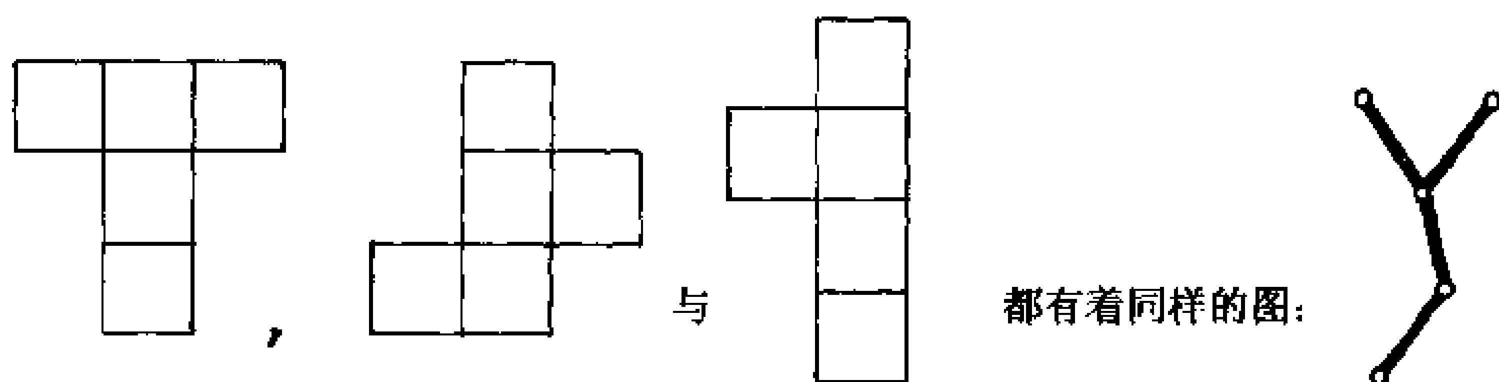
填鸭游戏

它是马丁·加德纳给无偏骨牌游戏所取的名字.它也曾叫做堵塞或“打点与结对”游戏,还曾同一些数学家的姓名挂过钩,例如乔佛莱·摩特·史密斯(Geoffrey Mott-Smith)、所罗门·果隆姆(Sol. Golomb)以及约翰·康威.玩这种游戏,同通常的骨牌游戏(见本书第 5 章,马丁·加德纳称之为交叉填塞游戏)差不多,但是任一局中人都可以在纵横两个方向任意放置他的骨牌.只要你能填空,随便怎么摆放都行.

如果从具有偶数个方格的矩形开始,则如果游戏目标是最后能走动者算赢,则后走者显然有一个极其简单的对称策略.因此,一个高明办法是宣布最后能走动者不算赢家,而是输家,换言之,玩的是一种反常规则下的填塞游戏.

如果换成图论语言,则将有助于理解游戏的具体进行方式,这时,用结点代表矩形格子,而当它们相邻时可用边来联接,如同我们对科尔游戏(见第 2 章)与小放牛游戏(见第 6 章)所做的那样.

在这种形式之下,游戏的动作是删去两个相邻结点以及通向它们的一切边,而你们可以在任意图形上玩此游戏.由于主要是图的抽象结构在起作用,所以许多不同形状的区域可以有着同样的图,例如



这个图形,像许多别的图形一样,是一条**毛虫**.从其形状看来,毛虫的身体由一串结点构成,其中某些结点上可能长出**毛脚**,亦即联结其他孤立结点的一条或更多条边.幸运的是,即便是极复杂的毛虫(图 8),也同两柱游戏中的构形等价,这只要使

- · 取代每个不长毛脚的结点,
- $*$ 取代任一长出毛脚的结点.

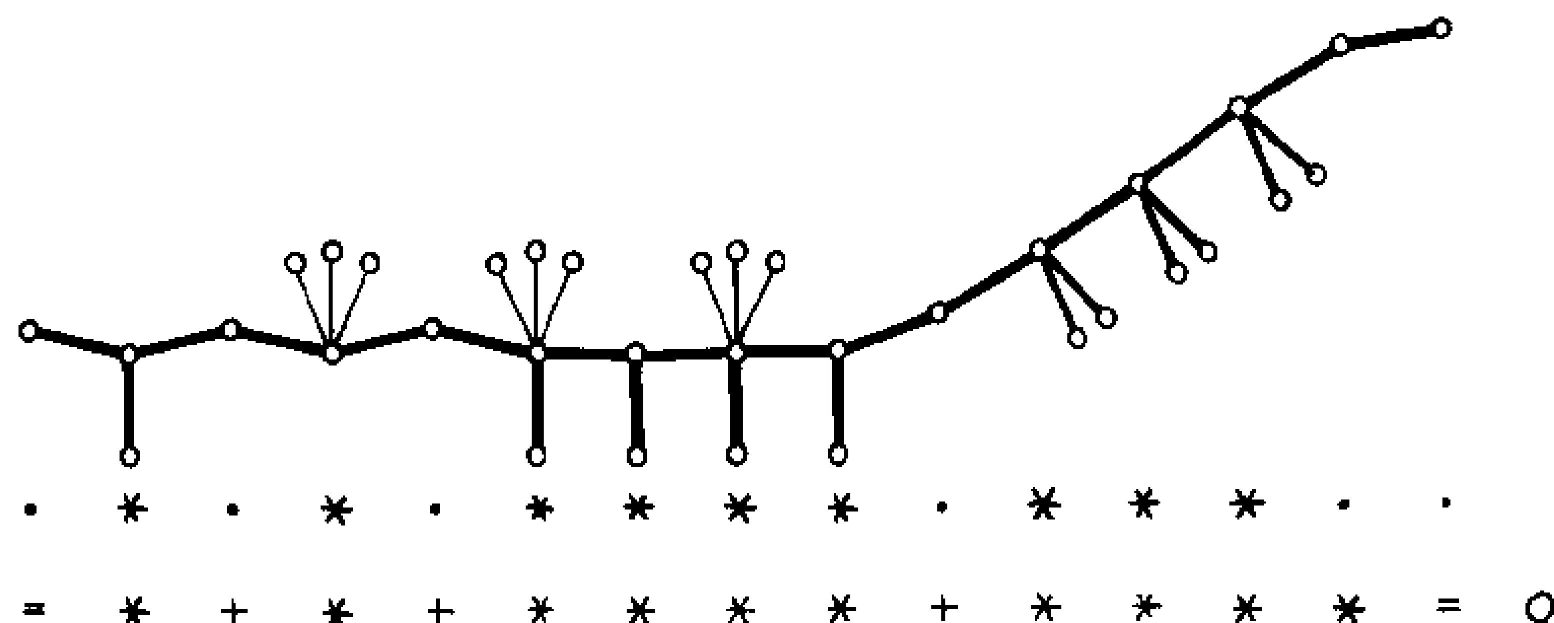
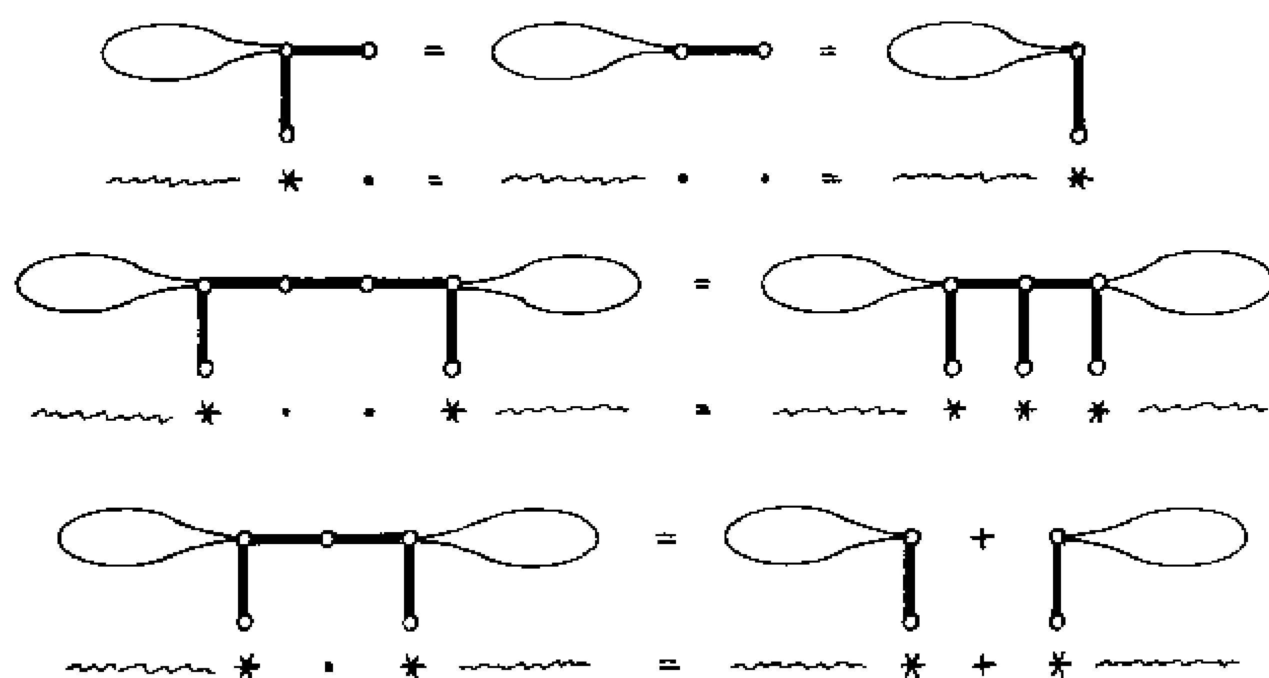
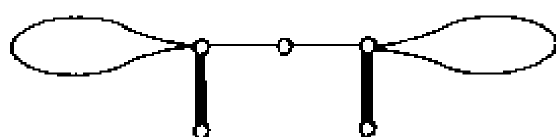


图 8. 填鸭游戏中一条很复杂的毛虫是一个两柱游戏局势.

采用了这种记法之后，我们以前的两柱游戏等价关系就变成：



最后一个关系式能用一个图形来表示，我们用细线表示边，它们全都可以省略，而不会影响其值.



图形上的气球不一定要有毛虫的形状，它们甚至还可以会合，所以我们的最后等式可以变成：

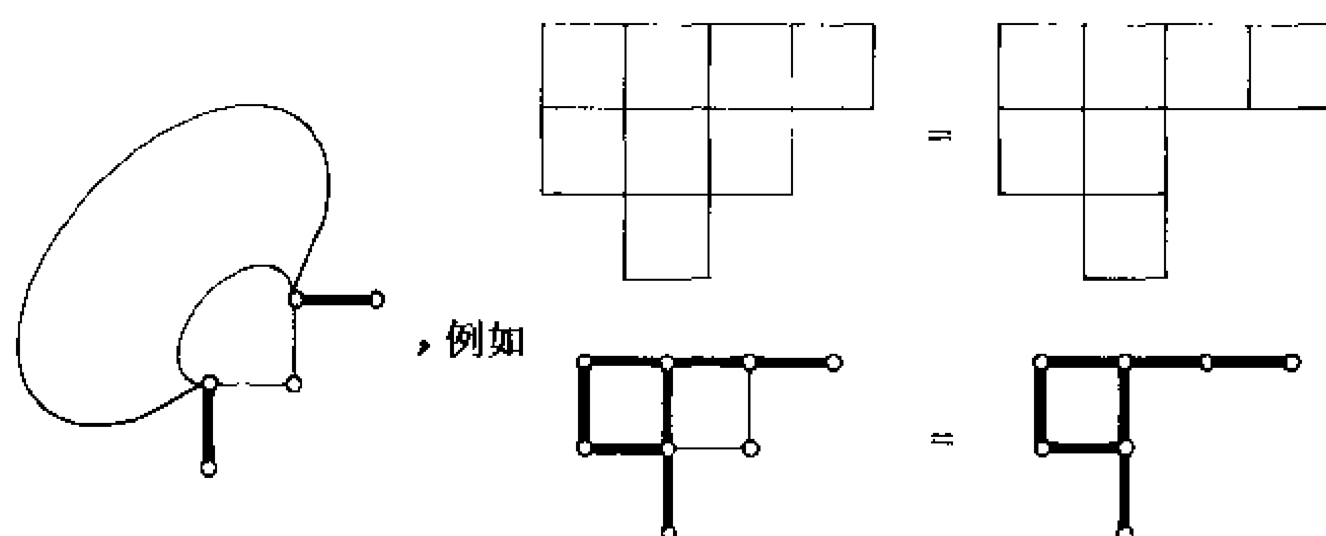


图 9 中的一些图形具有类似性质，在一个图形中省略所有的细边都不会影响它的值.

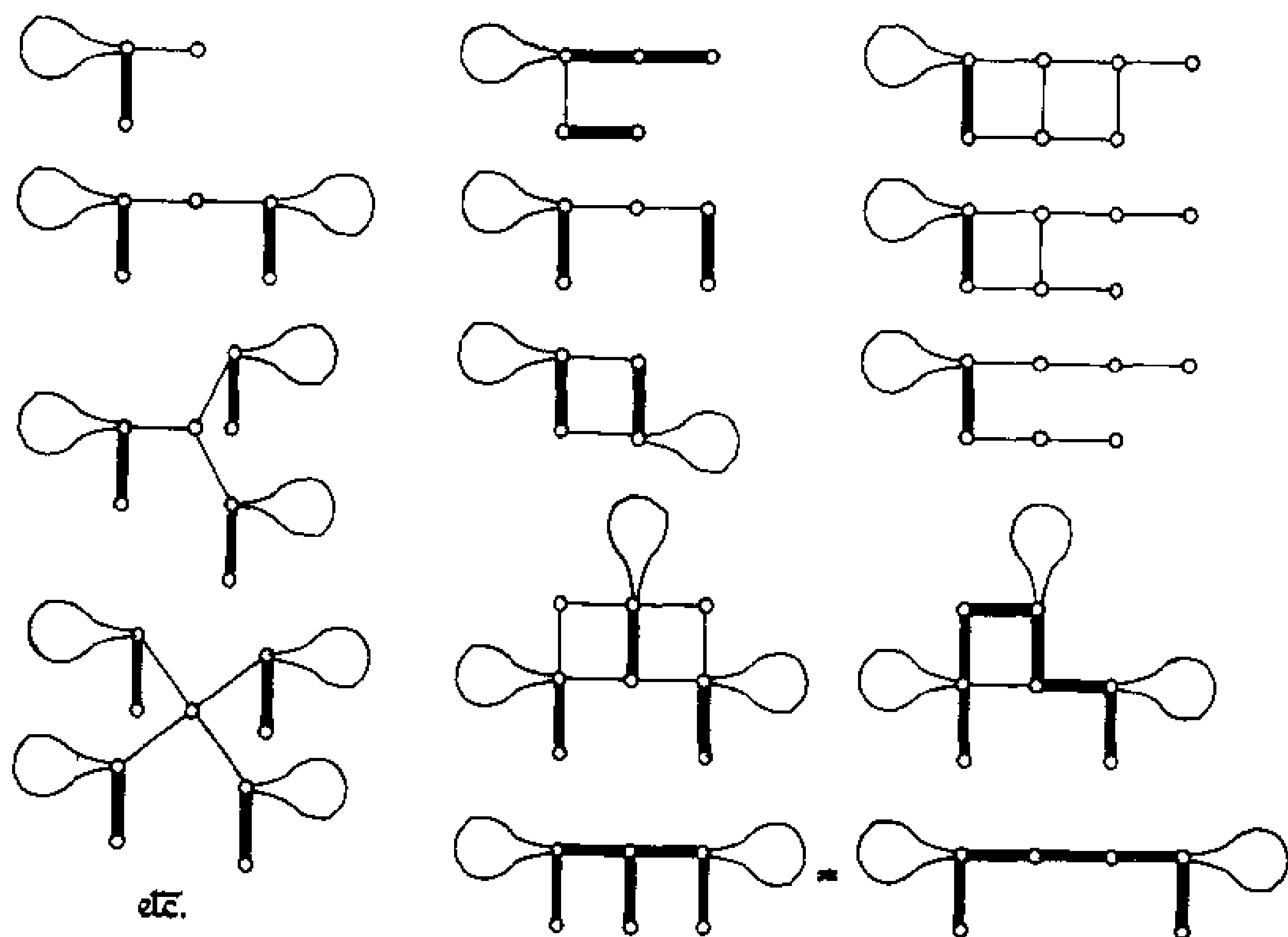


图 9. 填鸭游戏的一包饼干*.

* 译者注：这是本书作者的一种幽默说法，仅仅是指图形与饼干的形状相似，别无其他用意，读者鉴之.

虚线中的边数	0	1	2	3	4	5	6	非尼姆堆
	1	1	2	0	3	1	1	–
	2	2	3	3	1	2	4^{146}	k
	3	3	1	2	4^{146}	3	3	k
	1	1	4^{146}	0	3	5^{057}	2^2	$k, k+1, k_1k3_22_230$
	3	3	2	2	0	3	5^{057}	$kd3_2320$
	1	1	2	0	3	1	2^{0520}	$k3_230$
	0	0	1	1	2	2^{1420}	3	f
	0	3	1	2	2^{1420}	3	5^{3146}	$e, ked3_210$
	3	1	2	0	3^{1431}	3	2^{0520}	$d, d+1$
	1	1	2	0	3	1	2^{0520}	$kd3_230$
		3	1	0^0	4^{146}	1^1	3	$2_2, k, 3_2$
		1	2	2	3	3^{31}	5^{057}	$kf3_2210, k+1$
		2	2^{1420}	0	1	1	2	f

表 5. 各种填鸭游戏局势的类属数.

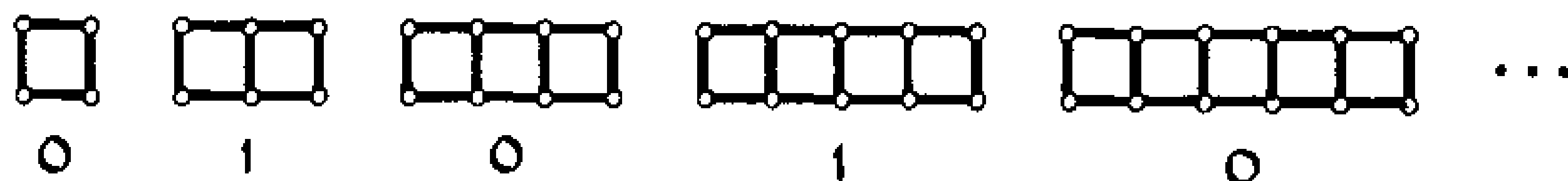
表 5 给出了一些填鸭游戏局势的值. 虚线表示的是一个 n 条边的长链，而 n 已在表头中指出. 我们已给出了完整的类属数以便你们去玩反常游戏规则下的填鸭游戏. 在表中，我们利用了以下字母：

k 替代 2_2321　(开勒司游戏中的 K_5 局势)；
d 替代 2_121　(道森开勒司游戏中的 D_{10})；
e 替代 2_231　(无僚属游戏·**06** 中出现)；
f 替代 2_21　(弗兰尼根游戏·**34** 中出现).

在此表的最后一列,则列出了非尼姆堆的游戏.

某些其他值出现在表 10 中，特别，梯子值是很好记的，有关毛脚的补充说明，使它们特别有用.



(这些梯子值以 0,1 反复交替,添加两只或两只以下的毛脚时,其值不受影响.)

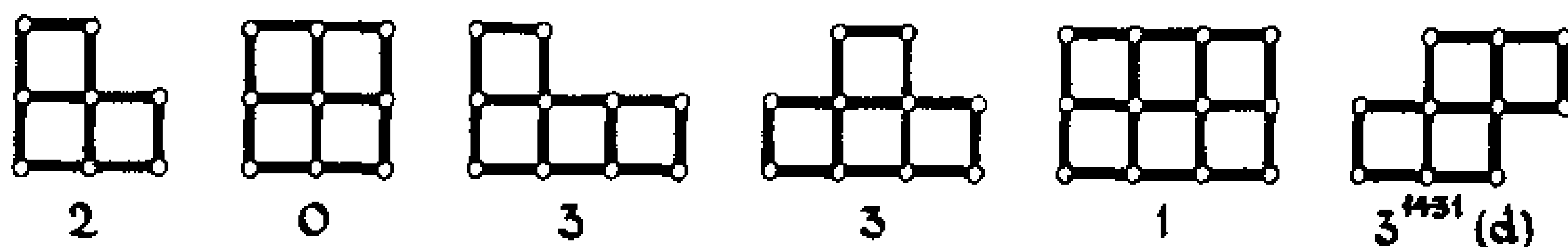


图 10. 再增补一些填鸭游戏的值.

威尔德游戏

在这种纸带上的钱币游戏中,每只格子上至多只能有一枚钱币,可以允许任何一枚钱币移动到左边的空格,即使它要穿越别的钱币也行.尽管罗兰·斯普勒格曾经研究过它的最简单情况,但是 C·P·威尔德发现了一般情形下的许多奇异性质.在 ONAG 书中讲到过这种游戏的简化理论.这里我们只叙述结果并介绍它的一些新发现.

我们将用记号

$[a|b|c|\cdots]_k$　(读作"a 威尔德* b 威尔德 c 威尔德…")

表示威尔德游戏中某个局势的尼姆值,其时有各枚钱币置放在 k 个不同格子

$a, b, c, \cdots$ 之上.

当项数一目了然时,我们也常常省略括号右下角的 k.计算**威尔德函数**的最简单办法是**配对法**.

---

* 译者注:作动词用时,"威尔德"(welt)有"加贴边"的意思.

把 k 个数目中与 2 的最高次幂同余的两数配成对子，然后在剩下的 $(k-2)$ 个数目中用同样的办法再配成对子，这样依次进行，直到最后，配齐所有的对子，也许只剩下一个数目 s（称为**老处女**），譬如说，

$$(a,b),(c,d),\cdots \text{可能还有一个 } s.$$

于是

$$[a|b|c|\cdots]_k=[a|b]\overset{*}{+}[c|d]\overset{*}{+}\cdots(\text{若 } k \text{ 为奇数，则最后还有 } \overset{*}{+}s).$$

两项威尔德函数可按下式

$$[x|y]=(x\overset{*}{+}y)-1$$

来计算.

例如，

$$\begin{aligned}&[2|3|5|7|11|13|17|19]_8\\ =&[3|19]\overset{*}{+}[5|13]\overset{*}{+}[7|11]\overset{*}{+}[2|17]\\ =&\ 15\ \overset{*}{+}\ 7\ \overset{*}{+}\ 11\ \overset{*}{+}\ 18\ =17.\end{aligned}$$

在这个例题中没有所谓“**老处女**”，但是

$$\begin{aligned}&[0|1|4|9|16|25|36]\\ =&[4|36]\overset{*}{+}[0|16]\overset{*}{+}[9|25]\overset{*}{+}1\\ =&\ 31\ \overset{*}{+}\ 15\ \overset{*}{+}\ 15\ \overset{*}{+}1=30.\end{aligned}$$

可以看到，1 就是老处女. 在本例中有两个同样好的对子，(0,16)，(9,25)，在此种情况下谁优先配对是无所谓的.

四钱威尔德游戏就是尼姆游戏

当你玩过几次游戏之后，你会同别人一样，迅速觉察到对四枚钱币的威尔德游戏来说，采用一个类似于尼姆游戏的策略就足够应付了. 也就是说，

若 $a\overset{*}{+}b\overset{*}{+}c\overset{*}{+}d=0$， 则 $[a|b|c|d]=0$.

对此，威尔德的理论可以作出解释，若 $a,b;c,d$ 为对子，这些等式可归结为

$$[a|b]=[c|d] \text{ 与 } a\overset{*}{+}b=c\overset{*}{+}d.$$

由于 $[x|y]=(x\overset{*}{+}y)-1$，它们显然是等价的.

三钱威尔德游戏也是如此!

如果你的四枚钱币中,有一枚是在 0 处,那么你实际上是在同别人玩三枚钱的威尔德游戏,不过移过一位而已.

用符号表示,就是

$$[0|a|b|c]=[a-1|b-1|c-1]$$

或

$$[a|b|c]=[0|a+1|b+1|c+1].$$

由此而知,钱币置放在 2,5,7 处的威尔德局势相当于钱放在 0,3,6,8 处的尼姆局势,正确的走法应该是 8 走到 5,于是在三枚钱的局势中,我们的正确走法应该是把 7 走到 4.

模为 16 的同余式

尽管配对法易于算出尼姆值,但是它不容易确定你究竟应该怎样走才能使尼姆值恢复到 0.不过,若钱币数是 4 的倍数,则它同尼姆游戏有着显著的联系:

正当 $a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c \overset{*}{+} \cdots \equiv 0$, mod 16 时,
$[a|b|c|\cdots]_{4k} \equiv 0$, mod 16.

特别,它保证了 $4k$ 枚钱币恰为前 16 个位置时,威尔德游戏的 $\mathscr{P}$-局势正好是尼姆游戏中有着不同数目时的 $\mathscr{P}$-局势.

现在让我们来问:什么是

(0,1,2,3,5,7,11,13)的正确走法呢?

八个数目 0 1 2 3 5 7 11 13 的尼姆和为 4,

把 4 加上去,做尼姆加法后,我们将要得出

	4	5	6	7	1	3	15	9
但是记号表明	×	×	×	×	×	×	×	✓

只有最后一种走法才是合乎游戏规则的(其他走法,都是将钱币走到已经被占据的格子上),所以唯一的走法是从 13 走到 9.

现在，让我们来看一看

2 3 5 7 11 13 17 19，尼姆和为 7，

把 7 加上去之后，尼姆和将是

5 4 2 0 12 10 22 20

并可按模 16 化简为

5　4　2　0　12 10　6　4
×　×　×　　　×

于是好的走法为

7 到 0，　13 到 10，　17 到 6，　19 到 4.

但在下列威尔德函数

[2|3|5|0|11|13|17|19]，[2|3|5|7|11|10|17|19]，[2|3|5|7|11|13|6|19]，[2|3|5|7|11|13|17|4]

中，只有第三个可以是零(扫视一下 17 的配偶，即可得知其他数字的二进位展开式中都有一个 16 数码). 所以唯一的正确走法是从 17 到 6.

当钱币数不是 4 的倍数时又怎么办呢? 譬如说，今有六枚钱币，分别置放于

1,2,3,5,8,13,

则你可以设想，实际上是有八枚钱币，分别放于

−2,−1,1,2,3,5,8,13,

而这条纸带是可以认为从−2 开始编号的. 若重新再从 0 开始编号，于是得到

0，1，3，4，5，7，10，15，其尼姆和为 1.

从而产生

1，0，2，5，4，6，11，14
×　×　　　×　×　　　×

故而有三种好的走法，

在新记法下，它们是

3 到 2，　7 到 6，　15 到 14，

而在老的记法下是

1 到 0，　5 到 4，　13 到 12.

如果有五枚钱币，分别置放于

2,3,5,7,11,

加上 3 个数目之后，我们得出　0　1　2　5　6　8　10　14，

其尼姆和为 12,

这时将得到　　9　10　4　6　2
　　　　　　　×　×　　　×　×

再次减 3 后,得　　1

这就表明,唯一的正确走法是从 5 走到 1.

饰带模式*

一些数的模式具有许多奇妙性质.例如:

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   …
  1   2   2   3   1   2   4   1   2   2   3   1   …
    1   3   5   2   1   7   3   1   3   5   2   …
      1   7   3   1   3   5   2   1   7   3   …
    1   2   4   1   2   2   3   1   2   4   …
  1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   …
```

其中每一个方块中的数

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$ 满足关系式 $ad=bc+1$,从而有 $d=\dfrac{bc+1}{a}$,

如果你从两个有着许多 1 的水平行出发(它们中间由一些锯齿形的 1 加以连接),例如

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
  1   ?   ?   ?   ?   !   ?   ?   !   .   .
    1   ?   ?   ?   !   ?   ?   ?   !   .
  1   ?   ?   ?   !   ?   ?   ?   !   .   .
    1   ?   ?   ?   !   ?   ?   ?   !   .
      1   ?   ?   !   ?   ?   ?   ?   !   .
        1   1   1   1   1   1   1   1   1
```

---

* 译者注:Frieze 是一建筑学名词,其意思为柱的中楣.我国敦煌石窟中有很多飞天模式.我国前辈数学家段学复先生的名著《对称》一书中的带饰就是这种东西.

那时你将发现,模式中所有的数都是整数而每个！都是 1,从而该模式一再周期性地再现了自身.这些自我验算的性质意味着你家孩子们在做算术题目时能找到他们的乐趣.如果你自己想在上述例子中进行验算,请看本章后面的增补材料.

G・C・希弗德(G. C. Shephard)注意到,我们可用加法来取代乘法,使得每个方块中的数字

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

能满足$(a+d)=(b+c)+1$, 亦即 $d=b+c+1-a$.

如在初始状态中用 0 取代 1,则由此而形成的模式

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 …
0 1 2 4 3 0 1 2 4 3 0 1 …
0 2 5 6 2 0 2 5 6 2 0 2 …
0 4 6 4 1 0 4 6 4 1 0 …
0 1 4 3 2 0 1 4 3 2 0 1 …
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 …

具有类似的性质,使锯齿形状得以重复再现.

我们曾认为,如果将上述基本运算改为尼姆加法而不是普通的乘法或加法,那也许是个好主意.出人意料的是,我们竟然发现了计算威尔德函数的一种新办法!

开始时你有一排零,写在你要计算的威尔德局势的上面,然后使每一方块中的四个数字

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

满足$(a\overset{*}{+}d)=(b\overset{*}{+}c)+1$,即$c=((a\overset{*}{+}d)-1)\overset{*}{+}b$.

如果你在计算中不出错误,那么你就会在三角形的底部得出威尔德函数;例如

0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 3 5 7 11 13 17 19
0 5 1 11 5 27 1
7 6 14 6 16 8
5 6 12 16 12
4 7 29 11
4 21 5
23 18
17

得出了与以前同样的答数，所以我们十之八九是没有算错！这一规则与下列恒等式

$$[a|b|\cdots|y|z]_{k+1}=[[a|b|\cdots|y]_k|[b|\cdots|y|z]_k]\overset{*}{+}[b|\cdots|y]_{k-1}$$

等价，你在 ONAG 书中(见该书 159 页)可以找到此式.

虽然这种办法执行手算时比较冗长，但如果想教会你的计算机来做威尔德游戏，这倒不失为一种好办法.

逆转威尔德函数

假定你已经算出

$$[a|b|c|\cdots]=n,$$

而心中还有一数 $n'\neq n$，则必然存在着唯一的一些数

$$a'\neq a,\quad b'\neq b,\quad c'\neq c,\quad \cdots$$

以使得

$$[a'|b|c|\cdots]=n',$$
$$[a|b'|c|\cdots]=n',$$
$$[a|b|c'|\cdots]=n',$$
$$\cdots\cdots$$

另外，还可以证明，如果偶数个字母 $a,b,c,\cdots,n$ 都由相应的 $a',b',c',\cdots$ 等字母替代，则等式

$$[a|b|c|\cdots]=n$$

依然能够成立，对于这种令人赏心悦目的事情，我们可用单一"方程"

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & \cdots \\ a' & b' & c' & \cdots \end{array}\right]=\begin{array}{c} n \\ n' \end{array}$$

来表示. 利用这一**偶数个替代定理**，再加上饰带的性质，你的计算机就能逆转威尔德函数.

例如，如果你有五个数目的威尔德函数

$$[a|b|c|d|e]=n,$$

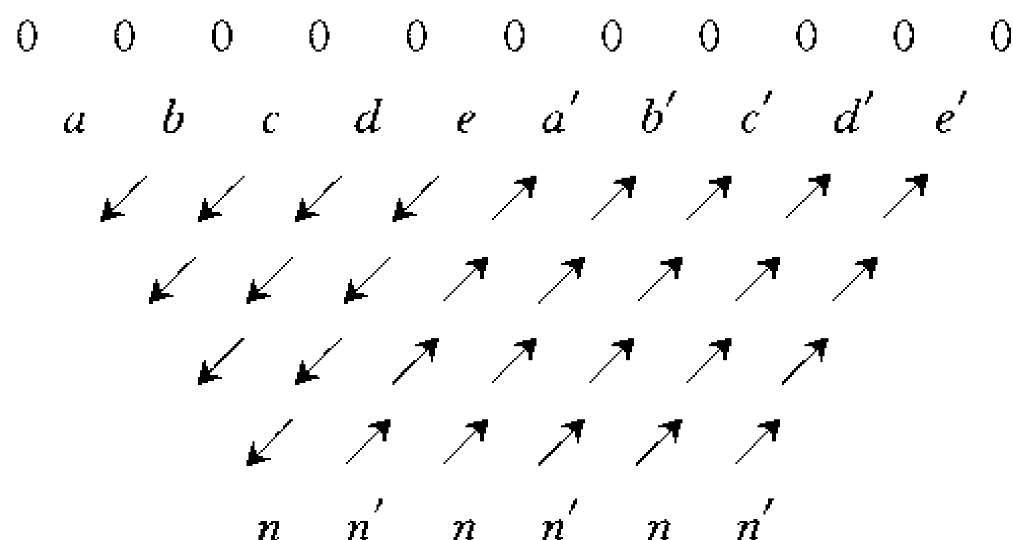
并企图求出

$$a',b',c',d',e$$

以使得

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \end{bmatrix} = \begin{matrix} n \\ n' \end{matrix}$$

你就应当把下面的饰带模式填补完全，其中 n 与 n' 在最后一行中交替出现，而计算时应遵循图中的箭头.



譬如说，我们要想找出局势

1　4　9　16　25

的正确走法，我们必须改变其中的一个数目以使威尔德函数为 0. 下列计算

0　0　0　0　0　0 / 0　0　0　0　0 / 0　0
1　4　9　16　25 / 36　33　12　13　28 / 1　4
4　12　24　8 / 60　4　44　0　16 / 28　4
3　26　31 / 42　19　6　39　2 / 23　22
20　28 / 60　4　16　12　36 / 4　28
29 / 0　29　0　29　0 / 29　0

(图中最右面的两条对角线仅是用来作为验算)表明

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 36 & 33 & 12 & 13 & 28 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 29 \\ 0 \end{matrix}$$

所以唯一的正确走法是从 16 走到 13.

算盘局势

有一天我们闲得发慌，随手写下无穷带饰：

```
… 0   0   0   0   0   0   0   0 / 0 \ 0   0   0   0   0   0   0   0 …
  … 14  12  10  8   6   4   2 / 0   1 \ 3   5   7   9   11  13  15 …
      … 1   5   1   13  1   5 / 1   0   1 \ 5   1   13  1   5   1 …
        … 15  9   3   13  7 / 1   0   1   0 \ 6   12  2   8   14 …
            … 0   8   0   8 / 0   1   0   1   0 \ 8   0   8   0 …
              … 14  4   10 / 0   1   0   1   0   1 \ 11  5   15 …
                  … 1   13 / 1   0   1   0   1   0   1 \ 13  1 …
                    … 15 / 1   0   1   0   1   0   1   0 \ 14 …
                        … / 0   1   0   1   0   1   0   1   0 \ …
                        / …   …   …   …   …   …   …   …   …   … \
```

它向我们提示了以下一串方程：

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\quad \left[\begin{array}{c|c}2&0\\1&3\end{array}\right]=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\quad \left[\begin{array}{c|c|c}4&2&0\\1&3&5\end{array}\right]=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\quad \left[\begin{array}{c|c|c|c}6&4&2&0\\1&3&5&7\end{array}\right]=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\quad\cdots$$

$$\cdots\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}14&12&10&8&6&4&2&0\\1&3&5&7&9&11&13&15\end{array}\right]=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\quad\cdots$$

由于我们可以交换任意偶数个对子

$$(a,a'),(b,b'),(c,c'),\cdots,(n,n'),$$

所以我们可对这些方程进行重新排序，得出

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}0&1\\3&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c}0&1&2\\5&4&3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c|c}0&1&2&3\\7&6&5&4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}0&1&2&3&4\\9&8&7&6&5\end{array}\right]=\cdots=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$$

那个特殊方程

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}0&1&2&3&4\\9&8&7&6&5\end{array}\right]=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$$

使我们不禁想起了算盘(见图 11)，从而我们可以把由方程

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}0&1&2&\cdots&k-3&k-2&k-1\\2k-1&2k-2&2k-3&\cdots&k+2&k+1&k\end{array}\right]_k=\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$$

进行计算的局势称作 k 枚钱币的**算盘局势**. 譬如说，方程

$$[9|1|2|6|5]_5=1$$

给出了一个五枚钱币的算盘局势，它的威尔德函数(或尼姆值)为 1.

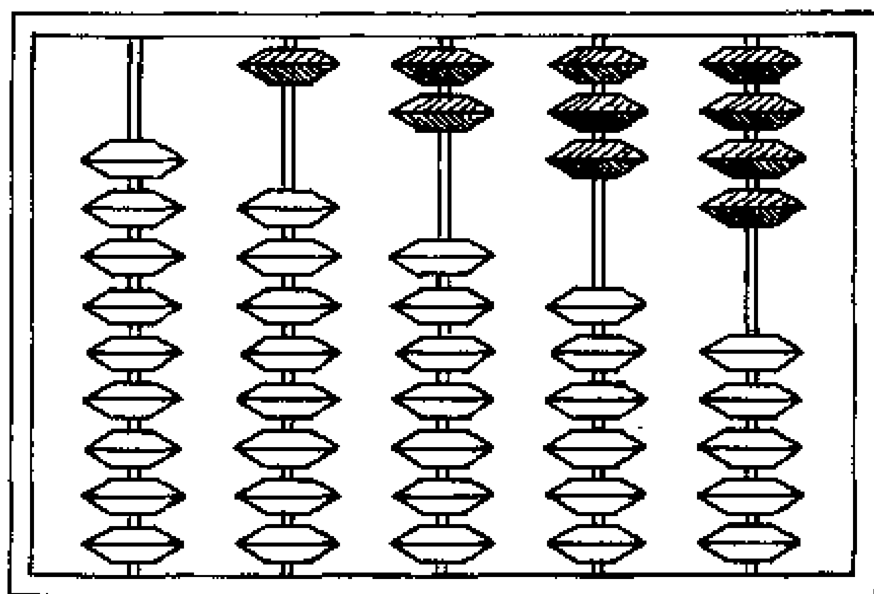


图 11. 算盘.

算盘策略

对算盘局势,我们可以给出一个明确的策略.

假定方程
$$[a|b|c|\cdots]_k=0$$
代表一个我们认定其威尔德函数为 0 的算盘局势. 现在定义
$$a'=2k-1-a,\quad b'=2k-1-b,\quad c'=2k-1-c,\quad \cdots$$
并注意到我们有着偶数个数的
$$a>a',\quad b>b',\quad c>c',\quad \cdots$$
现在假定你的对手走出一步动作,用 x 来取代 a. 由于每个 $\leqslant 2k-1$ 的数在表
$$a,a',b,b',c,c',\cdots$$
中出现,故而 x 必然是
$$a',b',c',\cdots$$
中的一个. 设它为 b' 或 a'. 若 $x=b'$,我们必然有
$$a>b',\quad 于是\ b>a'.$$

所以我们可用从 b 到 a' 的动作来回应,这是由于
$$[b'|a'|c\cdots]_k=0$$
表示一个更简单的算盘位置. 若 $x=a'$,则我们有 $a>a'$,并随之而有奇数个数的
$$b>b',\quad c>c',\quad \cdots$$
所以我们可用

$$b\text{ 到 }b',\quad c\text{ 到 }c',\quad \cdots$$

等走法中的一个来回应.

一个类似的策略表明,若

$$[a|b|c|\cdots]_k=1$$

代表一个威尔德函数之值为 1 的算盘局势,则我们对手所走出的任何一步,除了游戏的最后一步动作之外,我们都有办法来作出回应.

威尔德游戏的反常形式

我们刚才所作的说明表明,算盘局势不仅真的具有所断言的尼姆值 0 与 1,而且实际上它们在威尔德游戏的反常形式中等价于大小为 0 与 1 的尼姆堆,因为容易看出,从非端点的算盘位置出发,有一步动作可走到具有其他值的算盘局势. 用第 13 章的语言来说,那就是

每一个算盘局势是轻浮的,

因为我们从正常玩法转为反常玩法时,大小为 0 与 1 的尼姆堆将互换结果. 另一方面,

每个非算盘局势是坚实的,

这一结果建立了以下事实:

威尔德游戏实际上是驯化的!

它足以表明,如果我们能从某个非算盘局势

$$(x,b,c,\cdots)\cdots$$

走到算盘局势

$$(a,b,c,\cdots),$$

则我们也能走到具有相反值的算盘局势. 但在我们以前的记法中,若 $x>a'$,则我们可走到

$$(a',b,c,\cdots).$$

否则我们必然有 $x<a'$,这是因为

$$(a',b,c,\cdots)$$

是一个算盘局势之故. 由于所有小于或等于 $2k-1$ 的数都在

$$a, a', b, b', c, c', \cdots$$

中出现，所以我们可以假定，譬如说 $x=b'$，

$$\text{而有} \quad b'<a', \quad \text{从而有} \quad a<b.$$

于是我们可以定到局势

$$(b', a, c, \cdots).$$

> 如果你想输掉威尔德游戏，则可以定得佯装你要赢，一直走到你的行动将到达一个算盘局势，然后突然改弦易辙，走到与之相反的算盘局势.

T・H・奥皮奈(T. H. Ó'Beirne)曾经研究过威尔德游戏的反常形式. 但是我们的完整分析(它同日本学者山崎的结论不谋而合)表明，他的简单法则只能适用于极小的数目.

柯齐格的尼姆游戏

你们可以在圆形纸片上置放钱币来做这游戏. 开始时，可以把一枚钱币放在其中的任意一格——在此之后，双方轮流按顺时针方向，在最后放上去的一枚钱币的前方 m 个位置处放入钱币. m 必须从事先商定的**步法集**中选取. 如果你要放钱的所有位置上都已经有钱币占据，那时你就输了——因为你只能在这些位置中的一个放入钱币. 图 12 便是本游戏的有向图(这便是安东・柯齐格(Anton Kotzig)原来描述的游戏)，它给出了**步**法集为{1,2}时，有七个位置的圆形纸带上，下一步可以置放钱币的地方. 现在请你们看看，会发生什么情况呢?

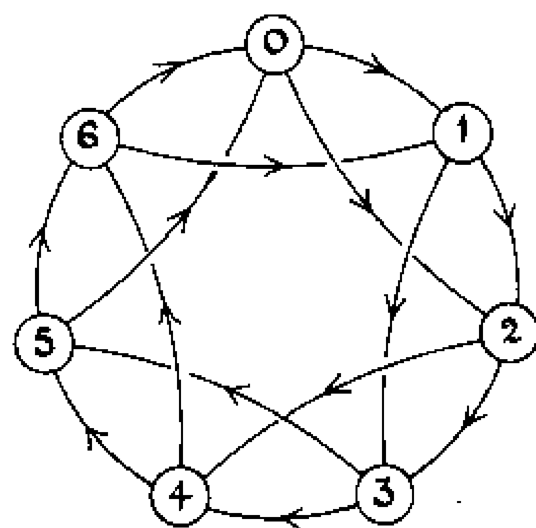


图 12. 七个位置圆形纸带，步法集{1,2}上的柯齐格尼姆游戏.

从对称性考虑问题，我们可以假定先走者把钱放在 0 的位置，然后他可以按下列走法获胜：

后走者	先走者	后走者	先走者	后走者	先走者
1?	3!	～	6!		
2?	4!	5?	6	1	3.
		6?	1	3	5.

图中的记号～表示"任意的符合游戏规则的走法"，当有走法可供选择时，我们用"!"或"?"表示

妙着或败着；其他走法则非走不可，并无选择之余地.

如果步法集中只有一种走法 m，则本游戏实质上就是“她爱我”或“她不爱我”游戏，此时若纸带上有 n 个位置，则正好有 n/d 步可走，而 d 则为 m 与 n 的最大公约数. 若 n/d 为偶数，则后走者可赢，若为奇数，则先走的人可赢.

若步法集是{1,2}，则除了 $n=1,3,7$ 以外，n 的一切其他值都是 $\mathscr{P}$—局势. 我们已经看到 $n=7$ 是一个 $\mathscr{N}$—局势，容易看出，$n=1,3$ 时也是如此. 下面是在所有其他情况下后走者可以实施的策略：

	先走	后走	先走	后走	先走	后走		后走	先走	后走	先走	后走
$n=3k+2(k\geqslant 0)$	0?	1!	～	4!	～	7!	～…～	$(3k+1)$!				
$n=3k(k\geqslant 2)$	0?	2!	3?	4!	～	7!	～…～	$(3k-2)$!	$3k-1$	1		
			4?	5!	～	8!	～…～	$(3k-1)$!	1	3		
$n=3k+1(k=1,k\geqslant 3)$	0?	2!	3?	5!	～	8!	～…～	$(3k-1)$!	$3k$	1		
			4?	6!	7?	8!	～…～	$(3k-1)$!	$3k$	1	3	5
					8?	9!	～…～	$(3k)$!	1	3	5	7

（在最后这种情况，若 $k=1$，则走到 4 是不合乎游戏规则的，所以游戏的进行情况将是 0? 2! 3 1）.

如果游戏的进行状况是有规律的，则仅不过开始时有些例外，而游戏持续下去之后就会看出名堂. 若步法集为{1,3}，则该游戏完全是有周期性的，其周期为 6. $\mathscr{N}$—局势是 $n\equiv 1$ 或 3，mod 6 的那些情形. 下面是理查德·诺瓦科夫斯基(Richard Nowakowski)的解释.

若 n 为偶数，先走者老是下在偶数位置上，从而后走者可赢，这是因为 $m=1$ 的走法对他总是有求必应的.

若 n 为奇数，则在绕行纸带的第一圈时，如果局中人 A 对放在 p 处的钱币，回敬一枚放在 $p+1$ 处的钱币，则另一局中人可赢，他只须把一枚钱币放在 $p+2$ 处（只要 $p+2<n$）就行了. 这样一来，A 将发现他已被“封锁”，下一轮将无路可走. 所以每位局中人都想尽其可能地走出 $n=3$ 这种步子.

故当 $n\equiv 3$，mod 6 时，先走者将能到达 $n-3$ 处，逼得后走者走到 $n-2$，而将 $n-1$ 留给先走者，他在下一轮就赢了.

若 $n\equiv 1$，mod 6，先走者将到达 $n-1$. 第二轮走子时，两位局中人都被迫在 $p\equiv 2$，mod 3 的一些位置上置放钱币，而在最后一轮迫使他们把钱币放置于 $p\equiv 1$，mod 3 处. 由于 n 是奇数，先走者可赢.

若 $n\equiv 5$，mod 6，后走者可赢，因为在第一轮行走时他可到达 $n-2$. 这时先走看只能把钱币放在 $n-1$ 或 1 处，而相应的取胜回应是下在 2 与 4 的地方.

如果步法集是{2,3}，我们留给读者自己去证明：

除 $n=1,5,11$ 外，$n\equiv 0,1,4 \bmod 5$ 是 $\mathscr{P}$—局势；

除 $n=2$ 外，$n\equiv 2,3 \bmod 5$ 是 $\mathscr{N}$—局势.

本书的勤奋读者将能验证,若步法集为{1,2,3},

则　　$\mathscr{P}$—局势是 $n\equiv0,1,2,\bmod 4$,但 $n=1$ 与 5 要除外;

　　$\mathscr{N}$—局势是 $n\equiv3,\bmod 4$,但 $n=7$ 除外.

他们还可以对更复杂的步法集进行探索.

斐波那契尼姆游戏

假定你们在一堆筹码中做游戏,先走者可在堆中取走任意个数的筹码,但不准把全堆统统拿光.在此之后,每个局中人至多只能拿走前一局中人所取筹码数的二倍.试问,谁能获胜?该游戏的 $\mathscr{P}$ 局势是堆中筹码数正好是斐波那契数

$$\mu_1=\mu_2=1,\mu_3=2,\mu_4=3,\mu_5=5,8,13,21,34,^*55,89,\cdots$$

的情况.蔡根道夫(Zeckendorf)有一个很著名的定理说:任意整数都有一个唯一的表达式,可以将它表示为不相邻的斐波那契数之和,例如

$$54=34+13+5+2.$$

如果堆中的筹码数不是一个斐波那契数,则下一局中人可用下列办法取胜:他可根据这一表达式,取定任意个数的较小的项(要求它们的和必须小于下一个较大项的一半).例如,他可以在 54 的一堆中拿走 2,但不能拿定 2+5=7,因为若那样做的话,对方就可取走 13.**

更一般的有界尼姆游戏

假定上述游戏规则要略加修改,从

“最多只能拿二倍”

改作

“拿走的筹码数要比二倍少”

试问结果会不会有差别.奇妙的是,结果竟然一样,就好像我们把规则改成

“拿走的筹码数不得超过……”.

如果筹码数为 2 的一个乘幂,则在两种情况下它都是一个 $\mathscr{P}$—局势;否则下一个局中人可获

---

* 译者注:原书(见 483 页倒数第 15 行)在此处误排为 24,已代为改正.

** 译者注:这时留下数 34,前已说过,它是一个 $\mathscr{P}$—局势了.

胜. 他只要取走可以整除整堆筹码数的 2 的最高次幂就行.

当然,若规则改为

“拿走的筹码数应小于上一个人拿走的筹码数”,

则若堆中筹码数多于一个时,你马上就可以赢,因为你只须拿走一只筹码,对方就无法行动. 此时的情况,无非就是“**她永远爱我**”游戏的变相而已.

此类游戏有整整两个系列,相应的游戏规则为:

“拿走的筹码数应小于 k 倍”,

或

“拿走的筹码数,至多是 k 倍”.

对“小于”类游戏而言,$\mathscr{P}$ 局势序列$\{a_n\}$应满足以下的递推关系式:

$$a_{n-1}=a_n+a_{n-l}\text{,对 } n\geqslant n_l \text{ 成立.}$$

而“至多”类游戏的递推关系为:

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-m}\text{,对 } n\geqslant n_m \text{ 成立.}$$

此处的 l,m,n_l,n_m 都由下表给出:

k	=1	2	3	4	5	6	7	…
l	=—	0	2	5	7	10	13	…
m	=0	1	3	5	7	10	13	…
n_l	=—	2	5	13	14	23	28	…
n_m	=2	3	6	9	11	19	24	…

为了同通常的斐波那契数记法取得一致,上述序列都要从 $a_2=1$ 开始.

“小于”序列的持续情况为:

$$a_i=i-1(2\leqslant i\leqslant k+1),a_i=2i-k-2(k+1\leqslant i\leqslant (3k+2)/2),\cdots$$

而“至多”序列的进行情况为:

$$a_i=i-1(2\leqslant i\leqslant k+2),a_i=2i-k-3(k+2\leqslant i\leqslant (3k+5)/2),\cdots$$

但当 k 增大时,在序列落定以前它将越来越长. 跟随我们如此之久的本书的勤奋读者无疑会找到这些序列与上述表格的继续规律.

埃泼斯坦氏加、减平方数游戏

它也是在一堆筹码上所玩的游戏. 每走一步有两种选择:取走或加上一个目前堆中现有筹码数中所能包含的最大平方数. 譬如说,若堆中的筹码数是一个异于 0 的完全平方数,则下一位

理解，为什么我们不对埃泼斯坦游戏作出全面解析. 在这个图上，平方数及其他 $\mathscr{N}$—局势用方框表示，$\mathscr{P}$ -局势则用圆框表示.

下面给出一张表格，包括了遥远度≤14，筹码数在 5000 以下的一切 $\mathscr{P}$- 局势，以及一些很有趣的 $\mathscr{N}$ —局势.

$\mathscr{P}$— 局势	$\mathscr{N}$— 局势
遥远度 0 : 0	遥远度 1 : 一切平方数
遥远度 2 : 5, 20, 45, 80, 145, 580, 949, 1305, 1649, 2320, 3625, 4901, 5220, …	遥远度 3 : 11, 14, 21, 30, 41, 44, 54, 69, 86, 105, 120, 126, 141, 149, 164, 174, 189, 216, 291, …
遥远度 4 : 29, 101, 116, 135, 165, 236, 404, 445, 540, 565, 585, 845, 885, 909, 944, 954, 975, 1125, 1310, 1350, 1380, 1445, 1616, 1654, 1669, 2325, 2340, 2405, 2541, 2586, 2705, 3079, 3150, 3185, 3365, 3380, 3405, 3601, 3630, 3705, 4239, 4921, 4981, 5225, 5265, …	遥远度 5: 52, 71, 84, 208, 254, 284, 296, 444, …
遥远度 6 : 257, 397, 629, 836, 1177, 1440, 1818, 1833, 1901, 1937, 1988, 2210, 2263, 2280, 2501, 2516, 2612, 2845, 2861, 3039, 3188, 3389, 3621, 3654, 3860, 4053, 4105, 4541, 4693, 4708, 4813, 4930, …	遥远度 7 : 136, 436, 1291, …
遥远度 8 : 477, 666, 5036, …	遥远度 9 : 252, 342, …
遥远度 10 : 173, …	遥远度 11 : 92, …
遥远度 12 : 3341, 3573, 3898, 4177, 4229, 4581, …	遥远度 13 : 1809, 1962, …
遥远度 14 : 1918, …	
……………………	……………………

开始时堆中有 92 只筹码，怎样取胜？如果你想了解正确走法，请看本章后面的增补材料. 本游戏的反常形式毫无兴趣可言，因为增添动作始终是可以采用的.

增减三角形数或斐氏数

如果我们不用平方数，而改用其他类型的数目，情况又将如何？一个较为简单的情况是 2^k-1，但人们已向我们建议了其他更有趣的数，即三角形数 1，3，6，10，15，21，…（西蒙・诺顿）与

加上 1 的斐波那契数 1,2,3,4,6,9,14,22,35,…(迈克·盖伊),请参看本章增补材料.

检第三根者交好运

通常情况下的尼姆是,谁拿最后一根,游戏就结束了.反常尼姆游戏则可以看成,留下最后一根,游戏就告中止.如果游戏规则是拿最后第三根者算赢,而现在只留下二根,我们于是宣告游戏终止,此时的情况应如何处理?对这种游戏来说,即使只有三堆筹码,仍然相当困难.

若第一堆中有 m 件东西,第二堆中有 n 件东西,则为了取得一个 $\mathscr{P}$—局势,第三堆的大小是唯一确定的.对固定的 m 来说,这一大小最终表现出 n 的算术周期性.对相应的 m,周期如下:

$m=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	…
周期为	1	2	4	2	12	12	12	8	8	10	60	60	84	84	84	16	18	180	20	…

分三堆游戏*

迪安·希克逊(Dean Hickerson)提供了这个游戏,它的走法是将有着 n 个筹码的一堆分作三堆,其大小分别为

$$k, n-k, n-2k,$$

其中 k 必须满足条件 $$1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}n.$$

此种游戏看来很像上一章讲过的萝卜游戏,但实际上,$n=1,2,3,\cdots$ 的尼姆值是直尺游戏(见第 14 章的图 7)中尼姆值的指数 0,1,0,2,0,1,0,3,0,…

D. U. D. E. N. E. Y. 游戏

此游戏是由下面几个英语单词:

总是可以减,不准马上重复,不超过 Y

的首字经过缩略而编造的新词,以纪念英国数学游戏大师杜登尼,它是杜登尼曾经描述过的"第

---

* 译者注:原文为 Hickory, Dickory, Dock,按 Hickory 的意思为山核桃木,Dock 的意思为船坞,码头或月台,在此处均不可理解.实际上它们是作者根据该游戏的发明人 Hickerson 而随心所欲地编造出来的英语单词.

37 号游戏"的一个特例.

任何一个局中人都能从只有一堆的筹码中拿掉 1 到 Y 只筹码.

"不超过 Y"

但是,紧接在前的减少数不准许重复,

"不准马上重复"

如果你永远能走,那么就算你赢,

"总是可以减少筹码",

但在某个阶段,你的对手就无法行走.

如果马上重复并非不能允许,则 $\mathscr{P}$—局势将是 Y+1 的倍数,而得胜者永远可以遵循一种策略. 在 Y+1−X 中之一减去 X. 当 Y 为偶数时,这一策略在 D. U. D. E. N. E. Y. 游戏中还是可用,因为 Y+1−X 等于 X 是不可能的. 故而从现在开始,我们将假定 Y 为奇数.

下面给出 Y=3 时,N 为各个自然数时的正确走法:

N=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
应减少	?	1	1,2	3	?	1	1,2,3	3	?	1	1,2,3	3	…

Y=5 时的相应减数为:

N=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
应减少	?	1	1,2	3	4	5	**3**	?	1,4	2,3	3,5	4	5	
N=	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	…
应减少	?	1	1,2,4	3	4,5	5	**3**	?	1	1,2,3	3,5	4	5	…

对 Y=3 来说,存在着一个最终周期 4;对 Y=5,周期为 13. 最容易获胜的办法是走到上面数字中的一个珍珠,所谓珍珠,就是表中打着? 记号的数,它表明下一位局中人将根本没有良好的对策可以采取. 所以珍珠就是 $\mathscr{P}$—局势而不问以前的走法如何,但是也存在着一些其他的 $\mathscr{P}$—局势,可是唯一的取胜走法却违反了"不准马上重复"的规定而无法采取.

一般说来,各个珍珠之间是有一定间隔的,要末是

E=Y+1,即 Y 之后的下一个偶数,要末是

D=Y+2,即下一个奇数.

因为,如果 P 是一个珍珠,则从 P+E 或 P+D 出发的绝大多数走法,* 我们立即可以回到 P. 唯

---

* 译者注:此处之所以只是绝大多数而不是"一切"走法,这是因为有的走法是违反了"不准马上重复"的规定而不能采用的.

一的例外是从

$$P+E走到P+\frac{1}{2}E \quad 以及从P+D走到P+E$$

的走法. 若这些走法中的第一个是坏的走法，则 P+E 是一个珍珠；如果它是一个好的走法，那么 P+D 是一个珍珠.

从一个给定局势出发，通常只有一种走法可以防止你的对手把它化简到其前面的一个珍珠，但有时也可能有两种走法. 因此很容易判明决定性的一步走法

$$P+E \quad 走到 \quad P+\frac{1}{2}E$$

的状况，这只要沿着一或二个通道进行回溯就行. 譬如说，在 Y=5 时，从

13 到 10　以及　从 26 到 23

的决定性动作是坏的走法，因为它们将遭到以下走法的反击：

10 到 5　以及　23 到 18.

但从

6 到 3　以及　19 到 16

的走法是好的，我们已在表中用粗体字的 3 加以表示.

珍珠串

了解珍珠能帮助你赢得本游戏：如果你有可能，就直接走到一颗珍珠，要是做不到，那就应当阻止对方这样做. 所以我们需要告诉你的一切便是分隔各颗珍珠的 D，E 序列. 它们最终是有

Y	珍珠串	Y	珍珠串
3 或 8r+3	(E)EEE …	41	(DDDEDE) …
5 或 8r+5	(DE)DEDE …	55	DD(EDE)EDE …
7	(DEE)DEE …	63 或 128r+63	(E)EE …
9	(DDE)DDE …	65 或 128r+65	(DDDE)DDDE …
15 或 32r+15	(E)EE …	71 或 64r+71	(DE)DEDE …
17 或 32r+17	(DDE)DDE …	73 或 128r+73	(DDEDE)DDEDE …
23	(DDEDDDDEE) …	87 或 128r+87	(DDE)DDE …
25 或 32r+25	(DE)DE …	95	DDEE(DDE)DDE …
31 或 128r+31	(DEE)DEE …	97	(DDEDDDE) …
33	(DDDEDDE) …	103	(DE)DEDE …
39 或 128r+39	(DEE)DEE …	105 或 128r+105	(DE)DEDE …

表 6. D. U. D. E. N. E. Y. 游戏中对大部分 Y 的奇数值$\left(其比例达\frac{53}{64}\right)$的珍珠串.



周期性的(见表中的 55 与 95),在表 6 中,周期表示在括号里,而 $r \geqslant 0$. 在这方面,大量工作是约翰·赛夫里奇(John Selfridge)与罗迦·埃加里顿(Roger Eggleton)干的.

席罕(Schuh)在其著作中讲到减数游戏的一章里,讨论了这种游戏,附带还讲到了游戏的反常形式以及两种变异形态,若游戏在 1 处终止,则结局就改变了.

席罕串

席罕教授也讨论了游戏的一种变异形式,减去 0 也是可以允许的走法,但规定谁首先得到 0 的是赢家.

从任意正数 n 开始,你将永远能有至少一个好的走法,因为如果没有正的减数可使你取胜,那么你就可以减去 0,而为你的对手也提供这样一种类似的处境,不过其时 0 却是非法的了. *

一个正数的减少

$$n \text{ 到 } n-g$$

怎样才算是好的一步? 唯一要禁止的走法是

$$n-g \quad \text{到} \quad n-2g$$

所以这必然是从 $n-g$ 走出的唯一好走法. 但类似的走法

$$n-2g \quad \text{到} \quad n-3g,$$
$$n-3g \quad \text{到} \quad n-4g,$$
$$\cdots\cdots$$

定然也是好的走法,而其中的最后一个必定是从

$$g \text{ 到 } 0.$$

从而一个正数的减少 g 只能是在一串 g 的倍数

$$g, 2g, 3g, \cdots, kg, \cdots,$$

才是好的走法. 当且仅当它是发自 kg 的唯一好走法时,它才能是发自 $(k+1)g$ 的好定法. 存在着其他好走法的第一个 g 的倍数将意味着 g 串到此为止了.

譬如说,当允许的减少数是 0,1,2,3,4,5 时,我们发现好的走法为:

从 n=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	⋯
减少 1	1,2]	3	4	5	3	0	4	3	5	0	3,4]	0	0	5	0	0	0	0	5	⋯

* 译者注:因为游戏规则规定,不准下一步立即重复.

1—，2—串终止于 2，3—，4—串终止于 12，但 5—串将无限地继续下去.

一般地说，如有两个或更多个数

$$a, b, \cdots$$

它们的“串”还没有终止，则在两个或更多个“串”中出现的第一个数将使这些“串”终止，最多只有一个串永远继续下去. 在表 7 中，(a,b)的意思是 a—串与 b—串在它们的 l. c. m.（最小公倍数）处终止，而表中的数字 $g\infty$则对应于一个无限的 g—串，只同最大减数为奇数有关. 人们还不知道三个或更多的数串同时终止的席罕游戏是否存在.

2 或 3	4 或 5	6 或 7	8 或 9	10 或 11	12 或 13	14 或 15
(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)
3∞	(3,4)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)	(3,6)
	5∞	(4,5)	(4,8)	(4,8)	(4,8)	(4,8)
(1,2)		7∞	(5,7)	(5,10)	(5,10)	(5,10)
(3,6)		(1,2)	9∞	(7,9)	(9,12)	(7,14)
(4,8)		(3,6)	(1,2)	11∞	(7,11)	(9,12)
(5,10)		(4,8)	(3,6)	(1,2)	13∞	(11,13)
(7,14)		(5,10)	(4,8)	(3,6)	(1,2)	15∞
(9,18)		(7,14)	(5,10)	(4,8)	(3,6)	(1,2)
(11,22)		(9,18)	(7,14)	(5,10)	(4,8)	(3,6)
(12,24)		(11,22)	(9,18)	(7,14)	(5,10)	(4,8)
(13,26)		(12,24)	(11,22)	(9,18)	(7,14)	(5,10)
(15,20)		(15,20)	(12,16)	(12,16)	(9,18)	(7,14)
(21,27)	(16,17)	(13,16)	(15,20)	(15,20)	(12,16)	(9,12)
(16,17)	(19,21)	(17,19)	(13,17)	(11,13)	(11,13)	(11,13)
(19,23)	(23,25)	(21,23)	(19,21)	(17,19)	(15,17)	(15,16)
25∞		25∞	23∞	21∞	19∞	17∞
27	26	25 或 24	23 或 22	21 或 20	19 或 18	17 或 16

表 7. 与各种最大减数相对应的席罕串.

公主与玫瑰

在我们原来的对本书《稳操胜券》的编写计划中，公主本来是要占一个整章篇幅的，但由于其他漂亮而有魅力的女人陪伴着我们，使我们浪费了大量时光，所以，为今之计，只好对她作一番简略介绍了. 或许我们的叙述将独辟蹊径，在席罕教授的干巴巴叙述与菲力特·德·卡特勃朗加先生(Filet de Carteblanche)的充满幻想的故事中走一条中间道路吧.

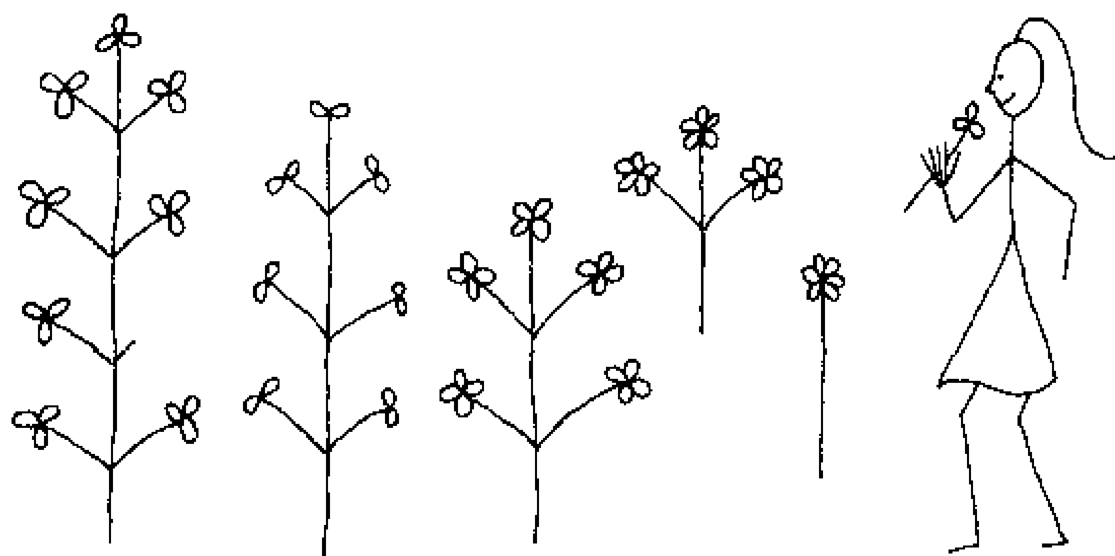


图 14. 罗曼蒂克公主在欣赏查尔斯王子馈赠的玫瑰花.

罗曼蒂克有两位王子向她求婚;漂亮的汉斯与可爱的查尔斯. 这两个人轮流到玫瑰园里去，从不同的树上摘取一朵或二朵玫瑰花送给公主. 在图 14 中，你可以看到公主正在欣赏芳香的玫瑰花，它是可爱的查尔斯王子刚刚在一株最大的玫瑰树上摘下来的. 最后有一位求婚者会发现花园里的玫瑰花统统采光了，没有东西可以送给公主，于是他只好灰溜溜地溜之大吉，而让另一位求婚者遂了他的心愿(见图 15). 请问:谁是那个幸运的王子呢?

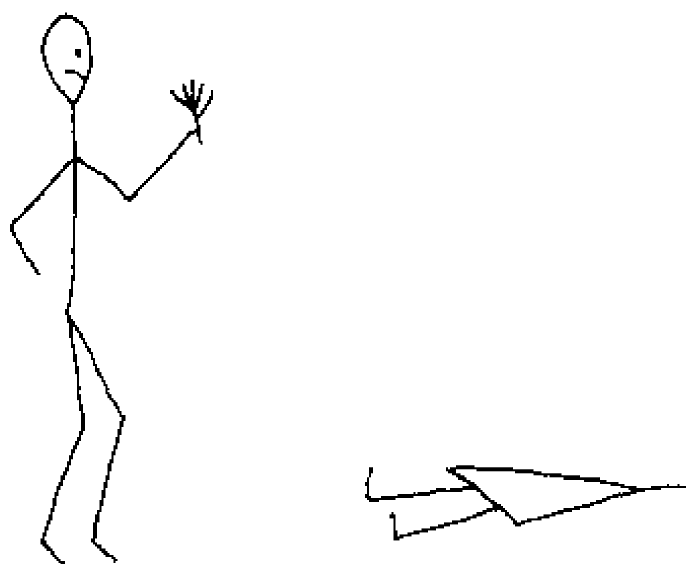


图 15. 谁能获得公主之爱?

当然，你也可以像尼姆游戏那样用各堆筹码来做此游戏，这时的合法动作是拿走任一只筹码，或取走二只筹码，但必须从不同的堆上各取一只. 席罕教授已经证明，一个老成持重而俗不可耐的王子，在五棵灌木的玫瑰园中应当尽量作出下列安排，即数字按递降顺序排列时，它们应该是下列四种模式之一，即

偶—偶—偶—偶—偶，
偶—奇—奇—奇—奇，
奇—偶—偶—奇—奇，
奇—奇—奇—偶—偶.

显然查尔斯王子懂得这种策略，于是席罕教授的研究无疑使他可以赢得美人的芳心，他定然是图 15 中所画出的那个人.

从席罕教授所揭示的法则中你们可以看到，当园中玫瑰树的株数很少(然而每株树上可能有大量花朵)时，

考虑奇偶性是至关重要的.

然而，株数极多时(尽管每株树上的花朵为数很少)，

胜负同 3 的整除性有关.

这是由于，$\mathscr{P}$—局势最终正是那些花朵总数为 3 的倍数的局势.

这件事可以从表 8，9，10 表中看出，表中各数最后一个下标都是 3，而它们已囊括了形如

$$3^x 2^y 1^z \quad 或 \quad a \cdot 2^y 1^z \quad 或 \quad a \cdot b \cdot 1^z$$

中所有的 $\mathscr{P}$-局势.

上述记号的意思分别为：

$$\left.\begin{array}{l} x\text{ 株 3 朵花的树，} \\ y\text{ 株 2 朵花的树，} \\ z\text{ 株 1 朵花的树} \end{array}\right\} \quad 或 \quad \left\{\begin{array}{l} \text{1 株 } a\text{ 朵花的树} \\ y\text{ 株 2 朵花的树} \\ z\text{ 株 1 朵花的树} \end{array}\right\} \quad 或 \quad \left\{\begin{array}{l} \text{1 株 } a\text{ 朵花的树} \\ \text{1 株 } b\text{ 朵花的树} \\ z\text{ 株 1 朵花的树} \end{array}\right.$$

在这些表格中，像 n_3 这样的数，所表示的是下列项数无限的算术级数

$$n, n+3, n+6, n+9, \cdots$$

而 $m_d n$ 表示有限项的算术级数

$$m, m+d, m+2d, \cdots, n,$$

依此类推；例如表中的数字${}_6 7_5 17_3$ 所表示的就是 1，7，12，17，20，23，26，29，…如此等等.

表中数字也告诉我们，有些区域是介乎奇偶性与三的可除性之间的. 这时，其结果要取决于 4 或 5 的整除性考虑，从而有

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0_3	${}_4 4_3$	${}_5 5_3$	0_3	${}_4 4_3$	${}_5 5_3$	0_3	${}_4 4_3$	${}_5 5_3$	0_3	${}_4 4_3$	${}_5 5_3$
1	${}_4 6_3$	4_3	2_3	3_3	4_3	2_3	3_3	4_3	2_3	3_3	4_3	2_3
2	${}_5 6_3$	4_3	2_3	3_3	1_3	2_3	3_3	1_3	2_3	3_3	1_3	2_3
3	0_3	${}_4 4_3$	${}_5 5_3$	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3
4	3_3	4_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3
5	${}_5 6_3$	4_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3
6	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3
7	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3	0_3	1_3	2_3

表 8. $3^x 2^y 1^z$ 型的 $\mathscr{P}$—局势. 表中数字为 z 依的集合.

$y \backslash a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0_3	2_3	${}_4 4_3$	${}_4 6_3$	${}_4 8_3$	${}_4 10_3$	${}_4 12_3$	${}_4 14_3$	${}_4 16_3$	${}_4 18_3$	${}_4 20_3$	${}_4 22_3$
1	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	${}_6 6_3$	$4_4 8_3$	${}_6 6_4 10_3$	$4_4 12_3$	${}_6 6_4 14_3$	$4_4 16_3$	${}_6 6_4 18_3$	$4_4 20_3$
2	${}_5 5_3$	4_3	0_3	2_3	${}_4 4_3$	${}_4 6_3$	${}_4 8_3$	${}_4 10_3$	${}_4 12_3$	${}_4 14_3$	${}_4 16_3$	${}_4 18_3$
3	0_3	2_3	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	${}_6 6_3$	$4_4 8_3$	${}_6 6_4 10_3$	$4_4 12_3$	${}_6 6_4 14_3$	$4_4 16_3$
4	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	0_3	2_3	${}_4 4_3$	${}_4 6_3$	${}_4 8_3$	${}_4 10_3$	${}_4 12_3$	${}_4 14_3$
5	${}_5 5_3$	4_3	0_3	2_3	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	${}_6 6_3$	$4_4 8_3$	${}_6 6_4 10_3$	$4_4 12_3$
6	0_3	2_3	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	0_3	2_3	${}_4 4_3$	${}_4 6_3$	${}_4 8_3$	${}_4 10_3$
7	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	0_3	2_3	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	${}_6 6_3$	$4_4 8_3$

表 9. $a \cdot 2^y 1^z$ 型的 $\mathscr{P}$—局势. 表中数字为 z 值的集合.

$b \backslash a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0_3	2_3	${}_4 4_3$	${}_4 6_3$	${}_4 8_3$	${}_4 10_3$	${}_4 12_3$	${}_4 14_3$	${}_4 16_3$	${}_4 18_3$	${}_4 20_3$	${}_4 22_3$
1	2_3	1_3	3_3	${}_4 5_3$	${}_4 7_3$	${}_4 9_3$	${}_4 11_3$	${}_4 13_3$	${}_4 15_3$	${}_4 17_3$	${}_4 19_3$	${}_4 21_3$
2	${}_4 4_3$	3_3	${}_5 5_3$	4_3	6_3	$4_4 8_3$	$6_4 10_3$	$4_4 12_3$	$6_4 14_3$	$4_4 16_3$	$6_4 18_3$	$4_4 20_3$
3	${}_4 6_3$	${}_4 5_3$	4_3	${}_5 6_3$	${}_5 8_3$	${}_6 7_3$	${}_6 9_3$	${}_6 7_4 11_3$	${}_6 9_4 13_3$	${}_6 7_4 15_3$	${}_6 9_4 17_3$	${}_6 7_4 19_3$
4	${}_4 8_3$	${}_4 7_3$	6_3	${}_5 8_3$	${}_5 10_3$	${}_5 9_3$	${}_6 6_5 11_3$	${}_6 10_3$	${}_6 12_3$	${}_6 10_4 14_3$	${}_6 12_4 16_3$	${}_6 10_4 18_3$
5	${}_4 10_3$	${}_4 9_3$	$4_4 8_3$	${}_6 7_3$	${}_5 9_3$	${}_5 11_3$	${}_5 13_3$	${}_6 7_5 12_3$	${}_6 9_5 14_3$	${}_6 13_3$	${}_6 15_3$	${}_6 13_4 17_3$
6	${}_4 12_3$	${}_4 11_3$	$6_4 10_3$	${}_6 9_3$	${}_6 6_5 11_3$	${}_5 13_3$	${}_5 15_3$	${}_5 14_3$	${}_6 6_5 16_3$	${}_6 10_5 15_3$	${}_6 12_5 17_3$	${}_6 16_3$
7	${}_4 14_3$	${}_4 13_3$	$4_4 12_3$	${}_6 7_4 11_3$	${}_6 10_3$	${}_6 7_5 12_3$	${}_5 14_3$	${}_5 16_3$	$3_5 18_3$	${}_6 7_5 17_3$	${}_6 9_5 19_3$	${}_6 13_5 18_3$
8	${}_4 16_3$	${}_4 15_3$	$6_4 14_3$	${}_6 9_4 13_3$	${}_6 12_3$	${}_6 9_5 14_3$	${}_6 6_5 16_3$	$3_5 18_3$	${}_5 20_3$	${}_5 19_3$	${}_6 6_5 21_3$	${}_6 10_5 20_3$
9	${}_4 18_3$	${}_4 17_3$	$4_4 16_3$	${}_6 7_4 15_3$	${}_6 10_4 14_3$	${}_6 13_3$	${}_6 10_5 15_3$	${}_6 7_5 17_3$	${}_5 19_3$	${}_5 21_3$	${}_5 23_3$	${}_6 7_5 22_3$
10	${}_4 20_3$	${}_4 19_3$	$6_4 18_3$	${}_6 9_4 17_3$	${}_6 12_4 16_3$	${}_6 15_3$	${}_6 12_5 17_3$	${}_6 9_5 19_3$	${}_6 6_5 21_3$	${}_5 23_3$	${}_5 25_3$	${}_5 24_3$
11	${}_4 22_3$	${}_4 21_3$	$4_4 20_3$	${}_6 7_4 19_3$	${}_6 10_4 18_3$	${}_6 13_4 17_3$	${}_6 16_3$	${}_6 13_5 18_3$	${}_6 10_5 20_3$	${}_6 7_5 22_3$	${}_5 24_3$	${}_5 26_3$

表 10. $a \cdot b \cdot 1'$ 型的 $\mathcal{P}$—局势. 表中数字为 z 值的集合.

> 4 的整除性是一重要性质,

> 5 的整除性有时也颇为重要,

甚至还有暗示

> 性也许是重要的;*

但是我们也对其他区域进行了一番探索,可惜其结果令人失望,那些地方似乎在向人诉说

> 随机性主宰着一切.

德·卡特勃朗加先生在这个问题的第一篇论文中说到,他想找出求婚王子的一种策略代码以解决一个有 6 株玫瑰树的问题,其中某一株树上只有一朵花. 你可以在本章末尾的增补材料中找出这些代码中的一种. 在他的第二篇论文里,他又进一步描述了,王子兄弟同罗曼蒂克公主

---

* 译者注:six(6)的英语发音同性(sex)极其类似. 作者行文极富幽默情趣,由此可见.

及其更美丽的妹妹贝拉唐娜公主结婚以后,怎样把摘玫瑰游戏转变为与之不同的巧克力游戏以及一些更有趣的游戏以供消遣.

走一步,走二步

这是一种在纸带上玩的游戏,同一格子里可以放入任意数量的钱币,而游戏规则是局中人可以走一步或走二步,所谓走一步,是把一枚钱币向左方移动一格,而所谓"走二步"的意思是指,这二步可由同一枚钱币或不同的钱币来行走.

设 a_n 为放在第 n 格上的钱币个数,我们的问题是,什么情况下

$$a_0a_1a_2\cdots$$

是一个 $\mathscr{P}$-局势. 这个问题的答案显然不取决于 a_0,因为放在 0 格上的钱币已经是根本不能动弹矣.

此游戏同前一游戏竟然有着出人意外的联系!事实上,上述局势的性态同公主与玫瑰游戏的局势

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,\quad a_2+a_3+\cdots+a_n,\quad a_3+\cdots+a_n,\quad \cdots,\quad a_{n-1}+a_n,\quad a_n$$

简直完全一样. 我们打算让本书的勤奋读者自己去发现,为什么是这种样子.

所以,当你的所有钱币都放在前面 6 个位置时,你可以把席罕教授的法则转译,以便得出 $\mathscr{P}$-局势,它们将是

$$?eeeee,\quad ?deeed,\quad ?deded,\quad ?eedee,$$

其中 e 代表偶数,d 代表奇数,而? 则无所谓.

相减游戏的若干补充

由于相减游戏(见第 4 章)

$$S(s_1,s_2,\cdots,s_k)$$

中,n 粒豆子的一堆的 $\mathscr{G}(n)$值只依赖于以前的 k 个值,即

$$\mathscr{G}(n-s_1),\mathscr{G}(n-s_2),\cdots,\mathscr{G}(n-s_k),$$

所以 $\mathscr{G}(n)\leqslant k$. 另外,这 k 个值的序列最后必然要重复,所以一切相减游戏的尼姆序列最终定然是有周期性的. 但是,同事实相较,此项论证所给出的周期长度之上界长得像是天文数字. 你能不能作出什么发现,使之更接近事实呢?

我们已经看到,若最大公约数 g. c. d. $(s_1,s_2,\cdots,s_k)$是 $d>1$,则该游戏不过是较简游戏的 k 重类似物. 例如 $S(s_1)$是 $S(1)$的 s_1 重,即"她爱我","她不爱我"游戏,其周期为 $2s_1$,而尼姆序列

为 $\dot{0}.00\cdots0111\cdots\dot{1}$.

我们也能对 $S(s_1,s_2)$ 与 $S(s_1,s_2,s_1+s_2)$ 进行完全分析. 记

$$s_1=a,\quad s_2=b=2ha\pm r,\quad 对\ 0\leqslant r\leqslant a\quad 及合适的\ h.$$

在注解 g. c. d. 后我们无需考虑 $r=0$ 或 a, 除非 $a=1$.

$S(1,2h)$ 具有周期 $2h+1$ 与尼姆序列 $\dot{0}.10101\cdots01\dot{2}$, 以及 $S(1,2h+1)=S(1)$. (实际上 $s_1=1$ 而一切奇数 s_i 将给出**她爱我,她不爱我**游戏.)

$a>1$ 时, $S(a,b)$ 的周期中包含 $a+b$ 位数字, 其中 a 个 0 与 a 个 1 两段相互交错, 但最后的 $a-r$ 个 0 要被 2 替代, 而 r 的意义如上. 譬如说 $a=3,r=1$ 时, $S(3,11)$ 及 $S(3,13)$ 的尼姆序列为

$$\dot{0}.00111000111\dot{2}\quad 与\quad \dot{0}.0011100011102\dot{1}$$

这里有一个分析 $S(s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 的一般方法. 把数字写在 $k+1$ 列中, 第一行为

$$0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \cdots,\quad s_k.$$

而每一个后面的行, 其形状为

$$l,\quad l+s_1,\quad l+s_2,\quad \cdots,\quad l+s_k,$$

其中的 l 是在前面的行中不出现的最小整数. 表格最终会表现出周期性, 即 c 个连续行所形成的一块可由前面的 c 的块得出来, 即对适宜的 c 与 p, 把所有表中的数字全都加上 p.

第一列中包含着能使 $\mathscr{G}(n)=0$ 的一切 n 值, 而根据福格森的配对性质, 第二列就是那些能使 $\mathscr{G}(n)=1$ 的值. 以后的各列包含着使 $\mathscr{G}(n)\geqslant2$ 的各数, 除了第二列中重复的那些数目. 我们将用 $S(1,b,b+1)$ 来说明. 若 b 为偶数(见图 16(a)), 就不会有这种重复, 其时, 周期为 $2b$, 而尼姆序列为

$$\dot{0}.101\cdots012323\cdots2\dot{3}.$$

(a)

$\mathscr{G}(n)=$	0	1	2	3
$n=$	0	1	10	11
	2	3	12	13
	4	5	14	15
	6	7	16	17
	8	9	18	19
	20	21	30	31
	22	23	32	33
	24	25	34	35
	26	27	36	37
	28	29	38	39
	40	41	50	51
	42	…		

(b)

$\mathscr{G}(n)=$	0	1	3	2	除非
$n=$	0	1	9	10	$\mathscr{G}(9)=1$
	2	3	11	12	
	4	5	13	14	
	6	7	15	16	
	8	9	17	18	$\mathscr{G}(28)=$
	19	20	28	29	1
	21	22	30	31	
	23	24	32	33	
	25	26	34	35	
	27	28	36	37	$\mathscr{G}(47)=$
	38	39	47	48	1
	40	…			

图 16. 相减游戏 $S(1,10,11)$ 及 $S(1,9,10)$.

若 b 是奇数，则每个周期中有一重复(9,28,47,…)其长度为 $2b+1$. 尼姆序列如上，但最后的 3 要省略：

$$\dot{0}.101\cdots012323\cdots\dot{2}.$$

为了完成 $S(a,b,a+b)$ 的分析，应注意情况 $a>1, b=2ha-r, 0<r<a$ 的分析是相当顺利的. 它可用图 17 加以说明，一个周期为 ha 行，有着 r 个重复(图上打着方框)，故而周期是 $4ha-r=2b+r$. 周期由每块含有 a 个 0 与 a 个 1 的 h 块，其后接着 a 个 2 与 a 个 3 的 $h-1$ 块，然后则是 a 个 2 与 $a-r$ 个 3.

G(n) =	0	1		
n =	0	a	$2ha-r$	$(2h+1)a-r$
	1	$a+1$	$2ha-r+1$	$(2h+1)a-r+1$
	2	$a+2$	$2ha-r+2$	$(2h+1)a-r+2$
	……	……	……	……
	$r-1$	$a+r-1$	$2ha-1$	$(2h+1)a-1$
	r	$a+r$	$2ha$	$(2h+1)a$
	……	……	……	……
	$a-1$	$2a-1$	$(2h+1)a-r-1$	$(2h+2)a-r-1$
	$2a$	$3a$	$(2h+2)a-r$	$(2h+3)a-r$
	$2a+1$	$3a+1$	$(2h+2)a-r+1$	$(2h+3)a-r+1$
	……	……	……	……
	$3a-1$	$4a-1$	$(2h+3)a-r-1$	$(2h+4)a-r-1$
	$4a$	$5a$	$(2h+4)a-r$	$(2h+5)a-r$
	$4a+1$	$5a+1$	$(2h+4)a-r+1$	$(2h+5)a-r+1$
	……	……	……	……
	$5a-1$	$6a-1$	$(2h+5)a-r-1$	$(2h+6)a-r-1$
	……	……	……	……
	$(2h-2)a$	$(2h-1)a$	$(4h-2)a-r$	$(4h-1)a-r$
	$(2h-2)a+1$	$(2h-1)a+1$	$(4h-2)a-r+1$	$(4h-1)a-r+1$
	……	……	……	……
	$(2h-1)a-r-1$	$2ha-r-1$	$(4h-1)a-2r-1$	$4ha-2r-1$
	$(2h-1)a-r$	$2ha-r$	$(4h-1)a-2r$	$4ha-2r$
	……	……	……	……
	$(2h-1)a-1$	$2ha-1$	$(4h-1)a-r-1$	$4ha-r-1$

图 17. $S(a,b,a+b), b=2ha-r, 0<r<a, (a,b)=1$ 的分析.

情形 $b=2ha+r, 0<r<a$ 则更加复杂. 周期将是 a 倍那样长，即 $(2b+r)a$. 我们用特例 $a=5$, $b=43, h=4, r=3$ 来说明，见图 18. $ar(=15)$ 次重复在图上用方框加以表示.

无论是 $b=2ha\pm r$ 的那一种情形，使 $\mathcal{G}(n)=0$ 的 n 的第 i 值为

$$n_i=i+\left\lfloor \frac{i}{a}\right\rfloor a+\left\lfloor \frac{2i}{b+r}\right\rfloor b$$

根据福格森配对性质，使 $\mathcal{G}(n)=1$ 的第 i 值应该是 $a+n_i$.

0	5	43	48	93	98	136	141					269	274	312	317				
1	6	44	49	94	99	137	142					270	275	313	318				
2	7	45	50	95	100	138	143					271	276	314	319				
3	8	46	51	96	101	139	144					272	277	315	320				
4	9	47	52	97	102	140	145					273	278	316	321				
10	15	53	58	103	108	146	151	186	191	229	234	279	284	322	327	362	367	405	410
11	16	54	59	104	109	147	152	187	192	230	235	280	285	323	328	363	368	406	411
12	17	55	60	105	110	148	153	188	193	231	236	281	286	324	329	364	369	407	412
13	18	56	61	106	111	149	154	189	194	232	237	282	287	325	330	365	370	408	413
14	19	57	62	107	112	150	155	190	195	233	238	283	288	326	331	366	371	409	414
20	25	63	68	113	118	156	161	196	201	239	244	289	294	332	337	372	377	415	420
21	26	64	69	114	119	157	162	197	202	240	245	290	295	333	338	373	378	416	421
22	27	65	70	115	120	158	163	198	203	241	246	291	296	334	339	374	379	417	422
23	28	66	71	116	121	159	164	199	204	242	247	292	297	335	340	375	380	418	423
24	29	67	72	117	122	160	165	200	205	243	248	293	298	336	341	376	381	419	424
30	35	73	78	123	128	166	171	206	211	249	254	299	304	342	347	382	387	425	430
31	36	74	79	124	129	167	172	207	212	250	255	300	305	343	348	383	388	426	431
32	37	75	80	125	130	168	173	208	213	251	256	301	306	344	349	384	389	427	432
33	38	76	81	126	131	169	174	209	214	252	257	302	307	345	350	385	390	428	433
34	39	77	82	127	132	170	175	210	215	253	258	303	308	346	351	386	391	429	434
40	45	83	88	133	138	176	181	216	221	259	264	309	314	352	357	392	397	435	440
41	46	84	89					217	222	260	265	310	315	353	358	393	398	436	441
42	47	85	90	177	182	220	225	218	223	261	266					394	399	437	442
				178	183	221	226	219	224	262	267	354	359	397	402	395	400	438	443
86	91	129	134	179	184	222	227					355	360	398	403	396	401	439	444
87	92	130	135	180	185	223	228	263	268	306	311	356	361	399	404				

图 18. $S(5,43,48)$的分析.

摩尔的 NIM$_k$ 游戏

E・H・摩尔(E. H. Moore)提出一种堆上拿筹码的游戏，其合法动作是允许任意减少至多 k 个堆(k 为正数)的大小. 例如 Nim$_1$ 就是通常的尼姆，而 Nim$_2$ 则是可以减少一或二堆的大小. 本游戏的原理相当令人惊讶，它要涉及二进制与 $k+1$ 进制的计算. 你必需

把堆中的数表为二进制，

并在 $k+1$ 进位中将这些数相加，
但不能进位.
你应走到上述"和数"为零的位置上去.
例如，$k=2$，而你遇到的情况是

5= 101	在二进制中做加法，得出	5= 101
6= 110		6= 110
9=1001		3= 11
10=1010		7= 111
2222		000

为了取胜，你必须减少 9，10 这两堆，把它们分别变为 3 与 7. 史密斯对次可选复合物游戏(见第 12 章)的分析与此相似. 摩尔游戏的尼姆值已由琴肯斯(Jenkyns)与梅白利(Mayberry)求出. 山崎已证明这种游戏是驯服动物，反复无常的局势只是下列情况，所有非零堆的大小统统是 1，而其个数按模 $k+1$ 来说，是 0 或 1.

越多越开心

鲍勃·李建议，通常的尼姆游戏也可供 n 个人来玩. 他们可按固定的顺序进行轮转，胜负也可分成等级.

一等奖给予走出最后一步的局中人，
二等奖给予在他之前的那个局中人，
……依此类推，
笨蛋或呆子奖给予第一个无法行动的局中人.

不允许瓜分奖品：游戏一旦结束，每个局中人必须拿了他的奖品，马上动身回家，不允许在背地里做交易，以防止他在其他局中人那里捞到好处.

李先生感到很惊讶，因为他发现这种游戏居然同摩尔游戏极其类似. 你只要将面临的局势转换成二进位数，把这些数目在 n 进位制中相加，但不必进位. 仅仅当和数为 0 时，你才是笨蛋.

摩尔的众多追随者

如果我们同意让 n 个局中人在他行动时可以拿走一堆，二堆直至 k 堆中的东西，这种游戏

的理论也与以上类似，它也是由李先生发现的. 此时的笨蛋是看到0的那个局中人，其时他把堆中的二进位数按模数 $k(n-1)+1$ 相加，但不要进位.

在本书中我们不想去讨论多于两个局中人的游戏，因为防止通同作弊的规定是人为的，而且会导数“吃惊的测试”这类悖论. 有兴趣的读者不妨参阅本章后附参考文献中保罗·赫德逊的论文.

尼姆游戏的形形色色的推广而兼具有趣理论者委实太多了，在这个问题上我们所说的肯定不是最后的一句话. 因此，

只好暂时告一段落.
本章于此结束，
本章就此搁笔.

不要砰的一声关门，还有一个怪异游戏哩！

也许你想玩尼姆游戏，但有一次却碰到这样的情况，准许两位局中人之一可以不照通常的游戏规则去行动，而由一种**怪异**的游戏 **Whim** 来决定结果是按正常游戏规则或反常游戏规则来办.

若我们采用

0—尼姆表示正常尼姆，
1—尼姆表示反常尼姆，
2—尼姆表示 Whim.

按照这种思路继续下去，则还有

3—尼姆＝**Trim**，
4—尼姆＝**Quam**，等等.

则在 d—尼姆(**Denim** 游戏)，$d\geqslant 2$ 的行动是：

或者像通常尼姆一样行动，
或者 减少 d(但不能两种走法都采取).

若引入一个**怪异**堆来记录你所玩的游戏，则这种游戏是易于分析的. 此时，这类游戏中的每一个，其性态都像添加一堆的尼姆游戏一样. 若 $2^k\leqslant d<2^{k+1}$，则怪异堆的性态就像是大小为 d 的一堆，若所有其他堆的大小都小于 2^{k+1} 的话；如果情况不是那样，则怪异堆的性态便像是大小为 $d-1$ 的一堆.

增　补

你能赢得银元吗?

如果你把银元$ 后面的钱币移动 2 格或 1 格(取决于你玩的游戏是哪一种形式),留下(3,2,1)或(2,3,1),那么你能达到目的.注意,在后一情况下,在$ 与钱袋之间只有一枚钱币.

你在做什么样的算术

当你用数字填满饰带模式之后,它的形状如下:

1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　…
　1　2　3　2　2　1　4　3　1　2　3　…
　　1　5　5　3　1　3　11　2　1　5　5　…
　1　2　8　7　1　2　8　7　1　2　8　…
　　1　3　11　2　1　5　5　3　1　3　11　…
　　　1　4　3　1　2　3　2　2　1　4　3　…
　　　　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　…

在加、减平方数游戏中,92 是一个 $\mathcal{N}$—局势

在图 19 中,$\mathcal{P}$—局势位于中间一列,平方数位于右边,而其他 $\mathcal{N}$—局势则位于左边.

三角形数与斐波那契数

诺顿猜测在他的加减三角形数游戏中,不存在平局,而 $\mathcal{N}$—局势远远多于 $\mathcal{P}$—局势,其比值

接近于黄金分割数. 理查德・派克(Richard Parker)对 5000 以下的数证明了上述断言(其计算工作量为数多达百万). 表 11 中给出了遥远度与悬数(可能总是有限数). 从 51,52,56 开始做这种游戏是特别有趣的;请读者们仿照图 19 的办法来画出它们的状态转移图.

对密克・盖伊的加、减斐波那契数游戏,我们已经证明了有关论断,并实际上给出了完备分析. 众所周知,任意正整数都可通过**蔡根道夫算法**最经济地表为一些斐波那契数之和:总是尽你所能,减去最大的斐氏数. 经济性略有逊色的是**次大数算法**[*]总是尽你所能,取第二个最大的斐氏数,例如

$$100=89+8+3(\text{蔡根道夫算法})$$

或 $$55+21+13+5+3+2+1(\text{次大数算法})$$

在这种游戏中,一个数是 $\mathscr{P}$—局势,当且仅当:

要末是它的次大数算法表达式以 3+1+1 或 5+2+1 结尾;

要末是它比一个斐氏数(至少是 8)正好**大** 3.

数　　0,11,5,8,13,21,34,55,89,144,…

的遥远度为 0, 8,2,2, 2, 4, 6, 8,10, 12,…

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
R	1	2	1	6	3	1	5	3	2	1	2	3	4	3	1	9	3	6	7	8	1	10	3	2	3
S	3	2	1	4	3	1	3	3	2	5	4	5	2	5	1	3	3	2	5	4	3	4	5	2	5

n	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
R	4	5	1	4	3	8	7	5	9	7	1	14	3	4	7	4	2	9	4	1	2	3	4	7	8
S	4	3	5	4	3	2	5	3	5	5	3	4	5	2	5	4	2	5	4	7	2	5	2	5	4

n	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
R	12	16	9	3	1	12	3	14	7	6	4	8	6	3	2	1	6	3	5	7	11	4	13	8	3
S	2	4	5	3	5	4	5	2	5	4	2	4	4	7	2	1	4	3	3	5	5	2	3	4	5

表 11. 加、减三角形数游戏中的遥远度及悬数.

其他 $\mathscr{P}$—局势的遥远度可用下法计算. 为了达到上面表中的一个数,你在次大数算法中所应取的数,再把此数乘以 2. 而一个 $\mathscr{N}$—局势的遥远度是其 $\mathscr{P}$—选择中最小的遥远度再加上 1. 例如,我们从 1000 出发,经过 4 次相减(减少 610,233,89 与 34)以后可得 34(遥远度 6),所以 1000 的遥远度为 6+(4×2)=14. 另一方面,1001 的遥远度为 3(走到 13). 我们相信,本书的某一位勤奋读者或许能够证实,悬数(它们都是有限数)及尼姆值(它们是 0,1,2 或 ∞_0)将具有类似的模式.

---

[*] 译者注:此处作者们又故弄玄虚. 原文 Zeckendorf 与 Secondoff 发音相近,但前者是人名,而后者则根本不是.

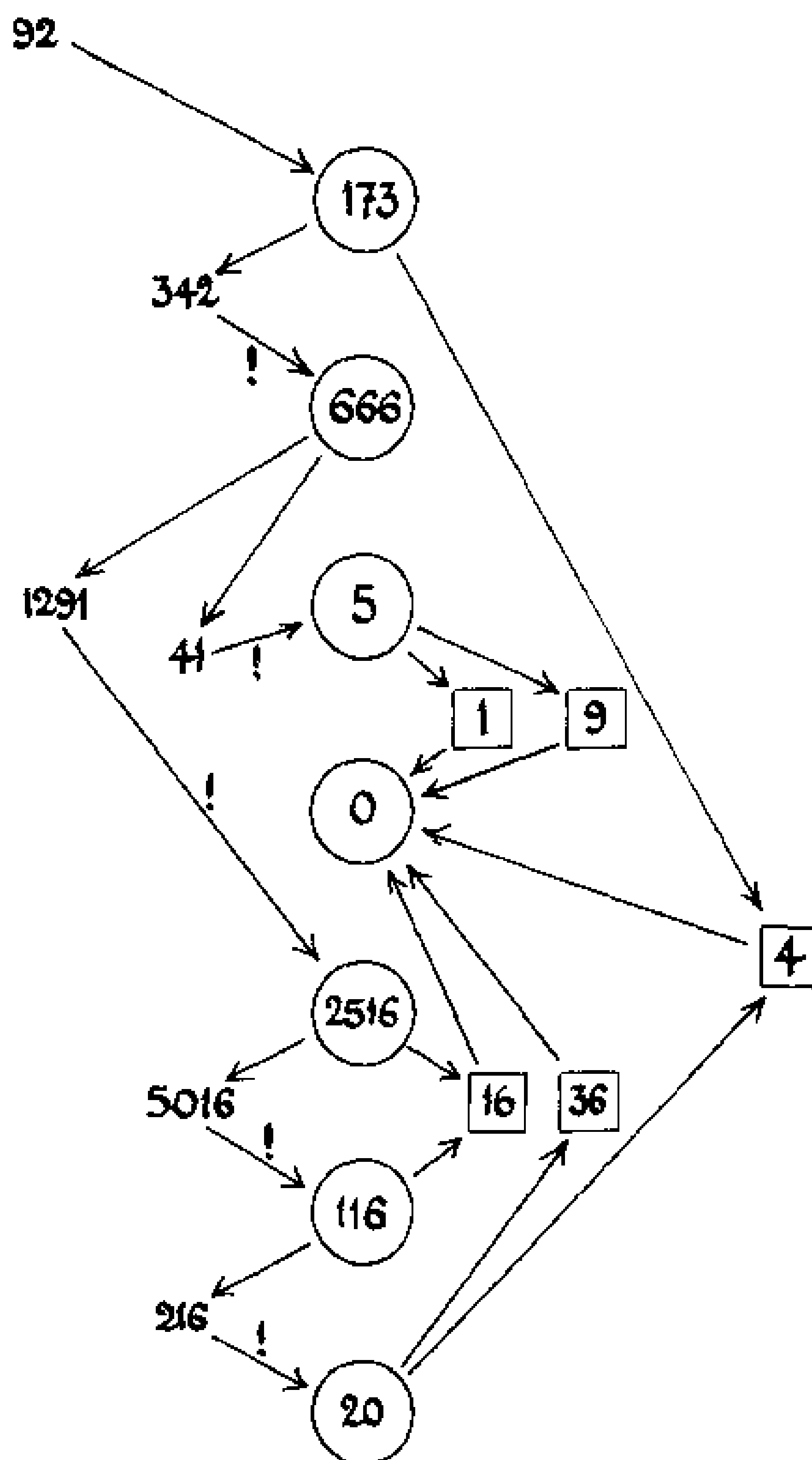


图19. 怎样赢得初始状态为 92 的埃泼斯坦游戏.

王子求婚行动的代码

在 6 棵灌木的玫瑰园(其中的一棵灌木只有--朵玫瑰)游戏中,最好是用走一步,走二步游戏来加以转译. 可以查明,由此而产生的局势,除去

?*edede*1	?*eddde*1	?*ddede*1	?*dddde*1
?*ededd*1	?*edddd*1	?*ddedd*1	?*ddddd*1
?0*eeee*1	?0*edee*1	?*ed*0*ed*1	?*dd*0*ee*1

之外都能走到一个席罕的 $\mathscr{P}$—局势中去，而以上 12 类局势，在联合了可能的走法之后，将能形成图 20 的图. 在这个图形中打上方框的是 $\mathscr{P}$—局势，未打方框的是 $\mathscr{N}$—局势，而

e　表示任何偶数，包括 0

d　表示任何奇数，

E　表示任何≥2 的偶数，

D　表示任何≥3 的奇数，

?　表示任何数.

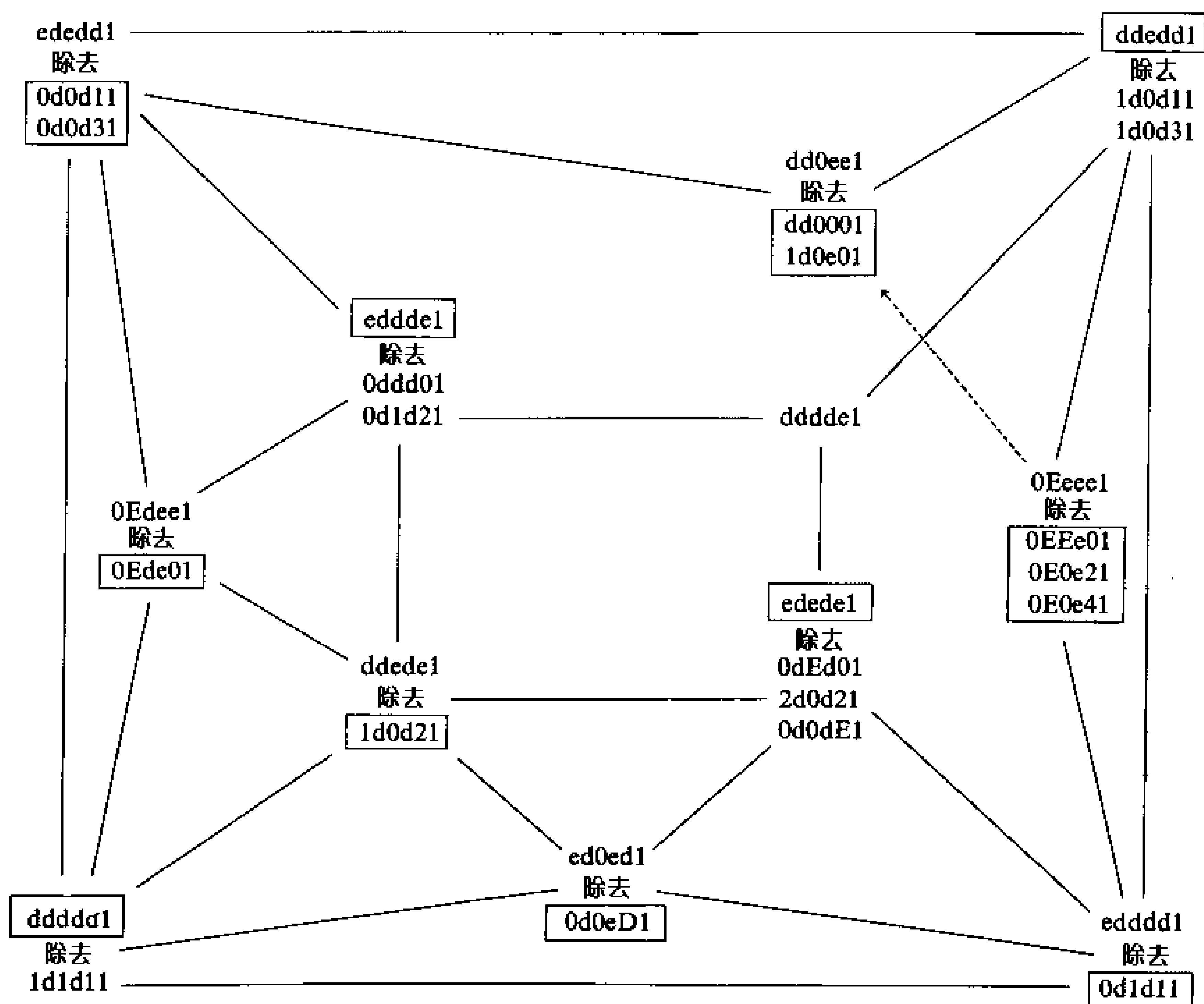


图 20. 6 株灌木的玫瑰园中(有一株灌木上只有 1 朵玫瑰)求婚王子行动的代码.

图中的虚线则表示只能作这样的单向行走. ?00dee1 以及?00eee1 的局势在图中被省略了，因为从别的局势根本走不到这两者. 所以为了使图形完整起见，尚须添上它们.

?00*dee*1	?00*eee*1
除去	除去
?00*dEE*1	?00*EEE*1
?001021	?000*E*01
?001041	?002021.

参考文献及进一步阅读材料

Richard Austin, Impartial and Partisan Games, M. Sc. thesis, University of Calgary, 1976.

W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, "Mathematical Recreations & Essays", 12th edn., University of Toronto Press, 1974(esp. pp. 38—39).

E. R. Berlekamp, Unsolved problem #4, in W. T. Tutte(ed.) "Recent Progress in Combinatorics", Academic Press, New York and London, 1969, pp. 342—343.

E. R. Berlekamp, Some recent results on the combinatorial game called Welter's Nim, Proc. 6th Conf. Information Sci. and Systems, Princeton, 1972, 203—204.

F. de Carteblanche, The princess and the roses, J. Recreational Math. **3**(1970)238—239.

F. de Carte Blanche, The roses and the princes, ibid. 7(1974)295—298.

J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, London and New York, 1976, Chapters 11 and 13, and p. 181.

J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns, Math. Gaz. **57**(1973)87—94, 175—183; MR **57**#1254—5.

H. E. Dudeney, "536 Puzzles and Curious Problems"(ed. Martin Gardner) Chas. Scribner's Sons, N. Y., 1969; #475 The 37 Puzzle Game, 186—187, 392—393.

Robert J. Epp and Thomas S. Ferguson, Remarks on take-away games and Dawson's Game, Abstract 742—90—3, Notices Amer. Math. Soc. **24**(1977)A—179.

Jim Flanigan, Generalized two-pile Fibonacci Nim, Fibonacci Quart, **16**(1978)459—469.

Richard K. Guy, Anyone for Twopins?, in David Klarner(ed.) "The Mathematical Gardner", Prindle Weber and schmidt, 1980.

Paul D. C. Hudson, The logic of social conflict: a game-theoretic approach in one lesson, Bull. Inst. Math. Appl. **14**(1978)54—66.

Thomas A. Jenkyns and John P. Mayberry, The skeleton of an impartial game and the nim-function of Moore's Nim_k, Internat. J. Game Theory **9**(1980)51—63.

S.-Y. R. Li, *N*-person Nim and *N*-person Moore's games, Internat. J. Game Theory, **7** (1978)31—36; MR **58**#4367.

Eliakim H. Moore, A generalization of the game called Nim, Ann. of Math. Princeton(2)**11** (1910)93—94.

J. von Neumann and O. Morganstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton, 1944.

T. H. O'Beirne, "Puzzles and Paradoxes", Oxford University Press, London, 1965, Chapter 9.

I. C. Pond and D. F. Howells, More on Fibonacci Nim, Fibonacci Quart. **3**(1965)61.

Fred. Schuh, "The Master Book of Mathematical Recreations", (transl. F. Göbel, from "Wonderlijke Problemen; Leerzaam Tijdverdrijf Door Puzzle en Spel", W. J. Thieme, Zutphen, 1943; ed. T. H. O'Beirne) Dover, London, 1968. Chapter VI, 131—154; Chapter XII, 263—280.

Allen J. Schwenk, Take-away games, Fibonacci Quart. **8**(1970)225—234,241; MR **44**#1446.

G. C. Shephard, Additive frieze patterns and multiplication tables, Math. Gaz. **60**(1976)178—184; MR **58**#16353.

Roland Sprague, "Recreations in Mathematics"(trans. T. H. O'Beirne) Blackie, 1963; #14; Pieces to be moved, pp. 12—14,41—42.

R. Sprague, Bemerkungen über eine spezielle Abelsche Gruppe, Math. Z. **51**(1947)82—84; MR **9**, 330—331.

C. P. Welter, The advancing operation in a special abelian group, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. er. A **55**=Indagationes Math. **14**(1952)304—314; MR **14**, 132.

C. P. Welter, The theory of a class of games on a sequence ofsquares, in terms of the advancing operation in a special group, ibid. **57**=**16**(1954)194—200; MR **15**, 682; **17**, 1436.

Michael J. Whinihan, Fibonacci Nim, Fibonacci Quart. **1**(1963)9—13.

Yōhei Yamasaki, On misère Nim-type games, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980)461—475.

第16章

造房子游戏(点与盒)

孩子们,来吧,让我们关上盒子.

——威廉·迈克拔斯·萨克雷,《名利场》,第67章

我从来也看不出这些要命的点子究竟是什么意思.

——伦道尔夫·丘吉尔勋爵

“造房子”是一种两人玩的纸与笔游戏,它在世界各地有着形形色色的名称.开始时有着许多点子形成一个矩形阵列,两位局中人轮流地把两个相邻点子或横或竖地联接起来.如果有位局中人完成了一个单位正方形(**盒子**)* 的第四边,他就在盒子里记上其姓氏的第一字母,并且必须再画上一个线段(完成一只盒子就可奖励多走一步).所有的盒子都署上姓氏后,游戏即告结束,谁的盒子多,他就是赢家.

有能力完成一只盒子的局中人也可以另外走别处,并没有义务非去完成盒子不可.如果强行规定必须这样做,那么游戏就会变得更简单些,请参看好来台(Holladay)的论文,见本章后附之参考文献.

图1画出了亚瑟与蓓莎的第一局游戏,由亚瑟先走.开局时情况相当正常,无可指责,直到亚瑟走出不幸的第13步,造成蓓莎可以完成两只盒子的机会.然而作为奖赏,她的最后一步却使亚瑟领有了底下的三只盒子,可是他又丢掉了最后的四只盒子.

---

* 译者注:自下节起改称“房子”,以便与大多数国家的同类游戏取得一致.

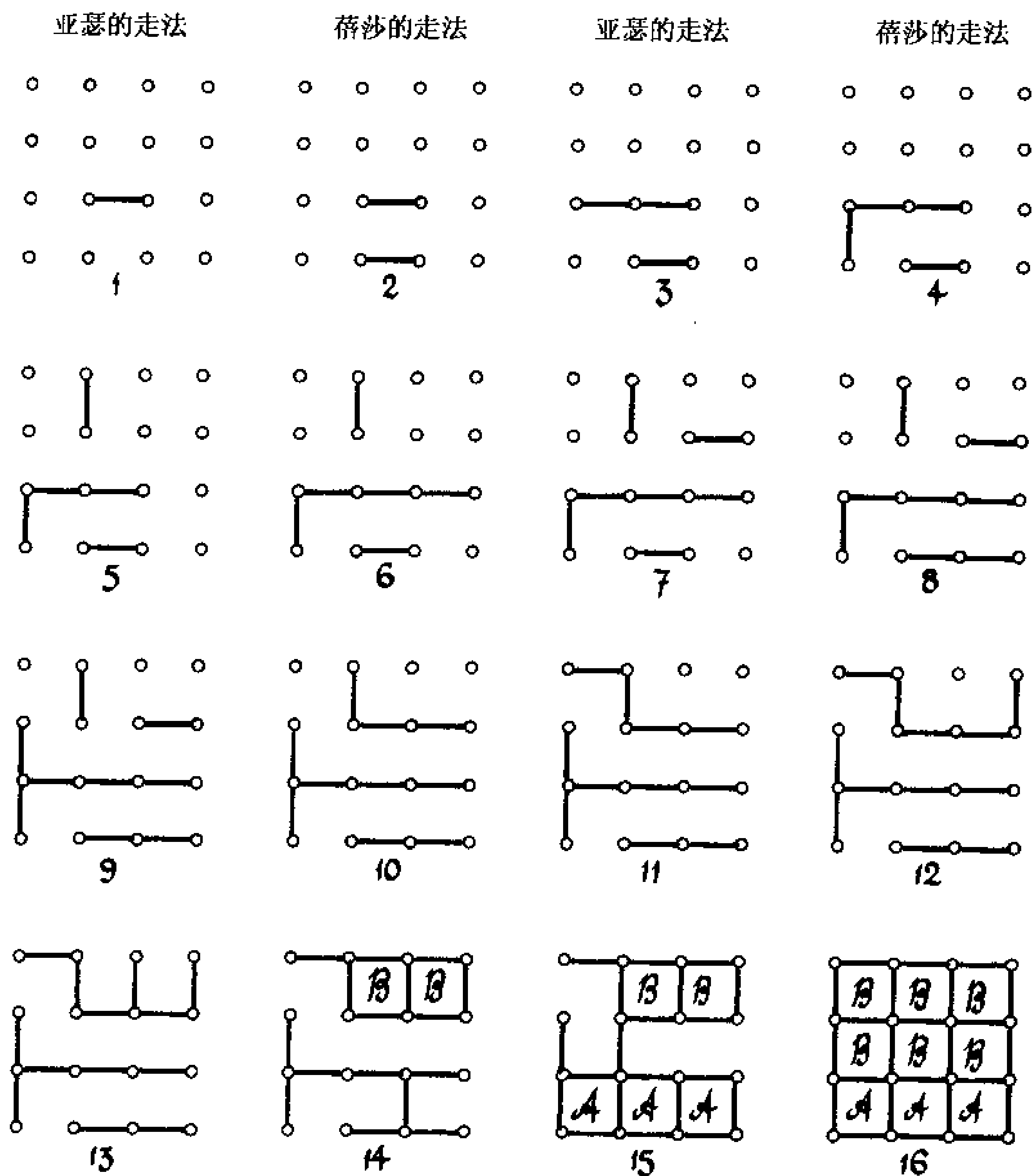


图 1. 亚瑟与蓓莎的第一局游戏.

绝大多数孩子正是这样来做游戏的,但蓓莎却要比大多数孩子聪明得多. 第二局由她先走,竟然采用了第一局中亚瑟用过的开局法. 亚瑟当然很乐意,他逐一照抄了蓓莎在那一局中的走法. 他非常开心,因为蓓莎走得如此之远,竟然照抄了他的导致失利的第 13 步走法(见图 2). 于

是他立刻抓住了那两只盒子，打算牺牲下面3只盒子，而最后再捞进4只盒子．然而蓓莎令他惊讶之至，她走出了一步妙着，再送上2只盒子．他猛的扑过去抓住这两只盒子，然而当他要去走奖励性的一步时，他顿然发觉上了大当！

蓓莎用这种机灵办法打败了她所有的朋友．绝大多数孩子都很随便地玩这种游戏，除非他们通过顽强努力发现了每一步可以开启造房子的连锁行动．然后他们把最短的造屋链奉送给对手，让自己来取次短的链，……就这样轮流交替，依此类推下去．

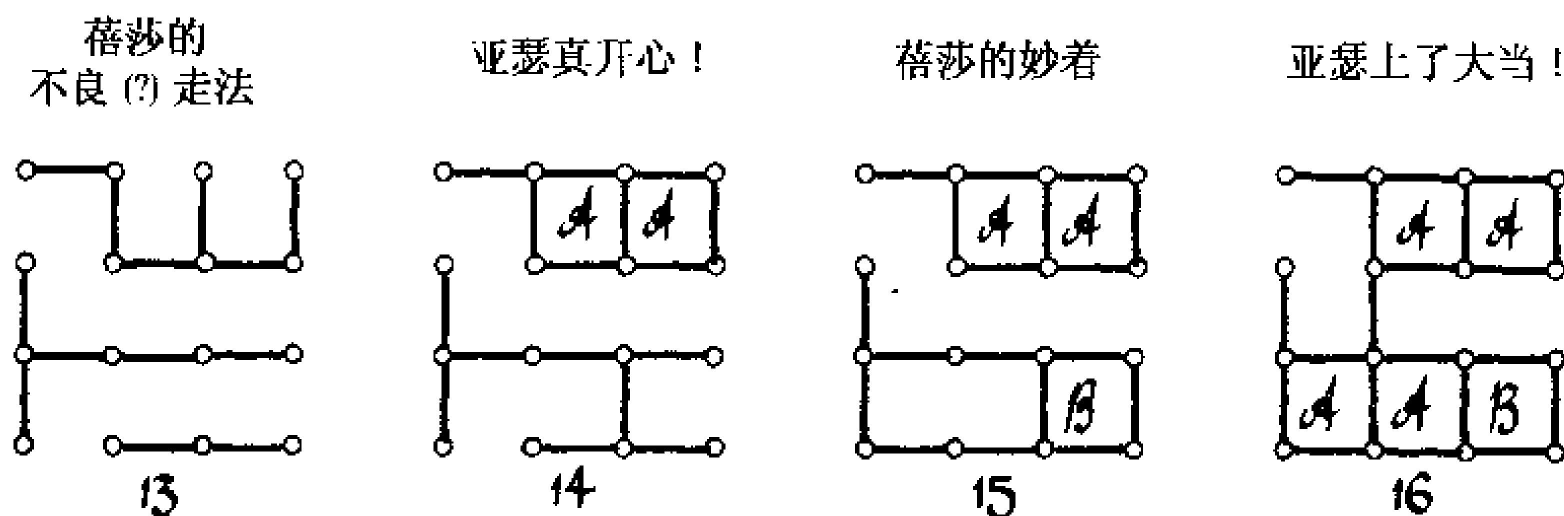


图2. 蓓莎的妙着令亚瑟大吃一惊．

但是当你为蓓莎打开一条长链时，她可以用一步高招将它关上，奉送给你最后两间房子，但却迫使你给她开启下一个长链行动（见图3）．用这种方式她取得了优势，并一直保持到游戏的末尾．

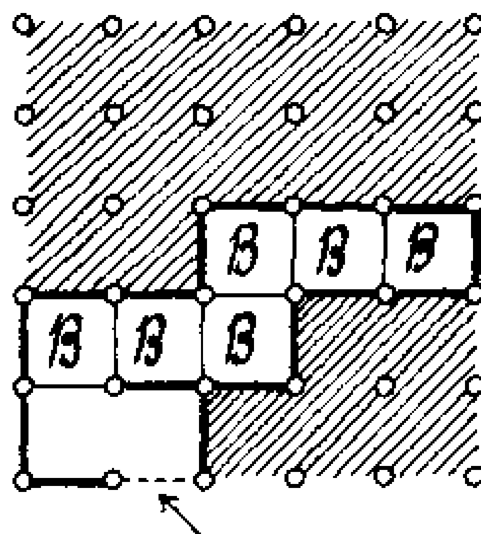


图3. 蓓莎的一步妙着．

你们可以在图4中看到这策略是何等的有效．蓓莎谦逊地谢绝了每个盘子上的两块饼，然后笑纳了你送给她的最后馈赠，这样一来，她取得了19对6的辉煌胜利．而在同样的局势下，你却是以14对11的优势打败了智力一般的孩子．

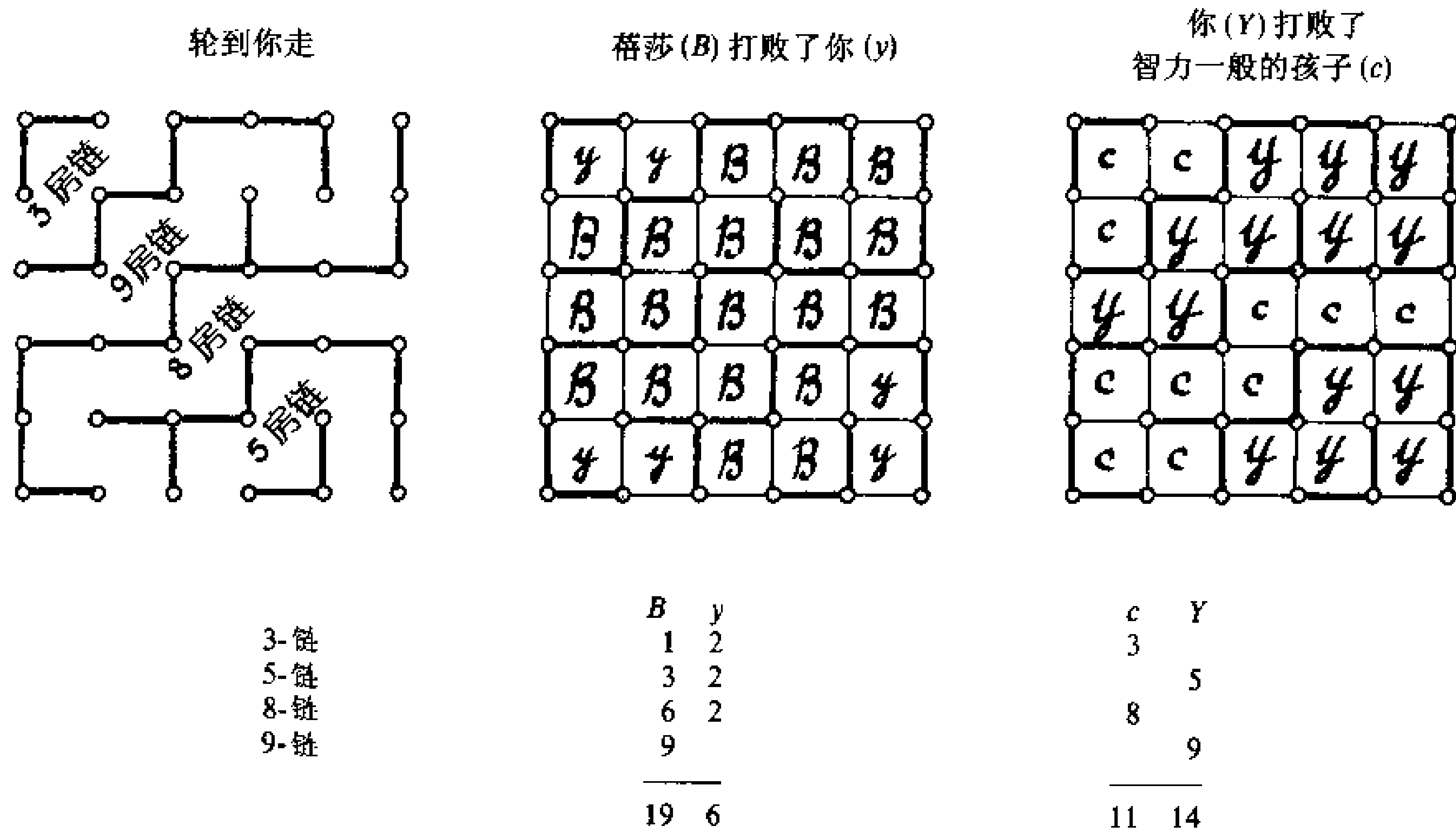


图 4. 给妙着算一笔明细账!

妙着导致上当

妙着通常会紧接着带来一箭双雕,也就是说,用一笔就完成两间房子(见图 5). 这些行动在本游戏的理论中是十分重要的. 我们将称之为**失败的一箭双雕**,* 因为谁搞这种行动,谁就会倒霉!

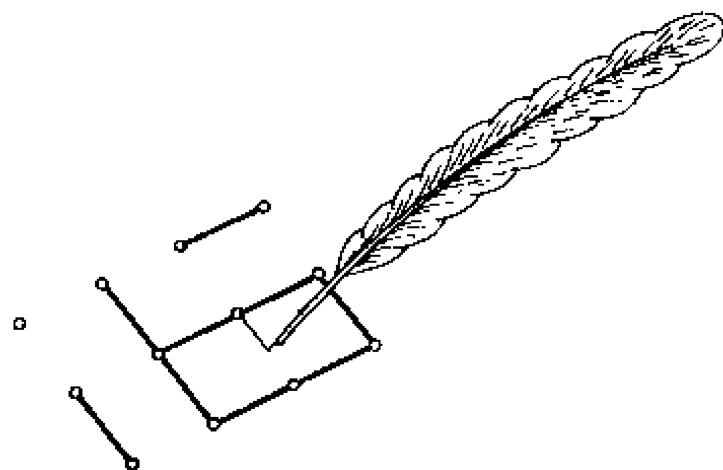


图 5. 叫你上当的动作——只画一笔就净得两间房子.

* 译者注:简称“**上当动作**”.

蓓莎的策略似乎在遵循下列方针：

> 确认游戏存在着长链，并力图迫使对手首先开启一条长链.

力图取得控制……

我们认为，谁能迫使其对手开启一条长链，他便是取得了**控制权**，然后：

> 当你取得了控制权之后，应当确保它，其办法是，在每一个长链中谢绝两只盒子，但最后一次例外.

……并牢牢地保持它

存在着几条长链时，掌握控制权的局中人通常可取得决定性胜利.

所以战斗实际上是争夺控制权. 你怎样才能肯定取得了这个重要的法宝？它取决于你玩的是哪一轮：奇数还是偶数……

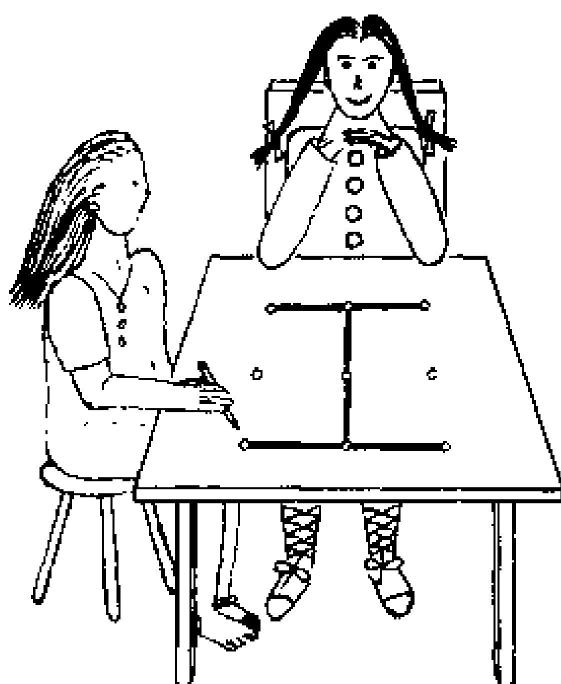


图 6. 谁是道迪？谁是爱维？

亚瑟与蓓莎的住处邻近帕尔一家，他家有两位小姑娘名叫道迪与爱维（蓓莎时常取笑她们，称之为鹦鹉姑娘！*）. 你可看到她们正在玩图 6 中的 4 间房子游戏. 道迪比爱维小一岁，所以在

---

* 译者注：即学舌者，应声虫之意. 由 Parr 演变而来. 有悟性的读者不难发现 parity，Parr 与 Parrotty 之间的微妙关连！

她们所玩的任何游戏中总是让她先走. 此种方式已经习以为常，所以即使玩其他游戏，道迪也总是走奇数轮，而爱维总是走偶数轮：

道迪·帕尔：奇性，
爱维·帕尔：偶性.

而帮助她们取得控制权的规则为：

道迪企图使原有点数＋上当行动数为奇数.
爱维要使上述数为偶数.

务必使点数＋上当行动数同自己的属性一致！

在简单游戏中，由于上当行动数要比长链数小 1，于是规则变为：

长链法则

务必使原有点数＋最终长链数为偶数，
若对手是爱维，为奇数，若对手是道迪.

点数＋长链数的对手规则！

这些规则的成立理由是，不论你在纸上画出什么形状的棋盘，你会发现：

开局时的点数
＋上当行动数
＝该游戏总的轮数

我们将在本章增补材料中加以证明.

所谓"长"链，究竟长到什么程度？

对蓓莎的残局技巧进行推敲，我们可以找到"长"的确切定义. 一个**长链**是包含 3 间或更多间房子的. 这是由于不管亚瑟在这种长链中画上哪一条边；蓓莎总是可以除去 2 间房子以外拿掉一切，并在她这轮结束时画上一条不至于造成一间房子的边. 图 7 是对 3 间房子的链说明了这一点. 2 间房子的链是短的，因为我们的对手可以在**中间**插画一边，使我们没有办法在此链中结束这一轮. 这叫做**硬心肠的施舍物**(见图 8(a)).

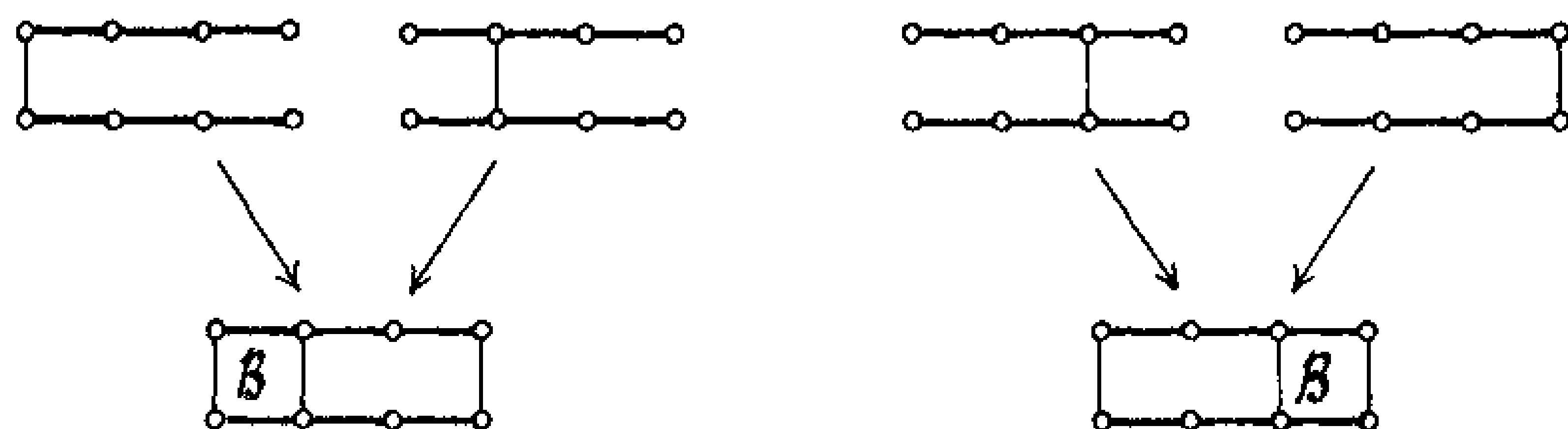


图 7. 蓓莎的残局技巧.

当你想着要赢，但被迫放弃一对房间时，你应该作出一个硬心肠的施舍，使你的对手别无选择，只好接受. 倘若你用了一个半心半意的施舍（见图 8(b)），那他有可能用妙着来作出回应，从而重新获得控制权. 但你如果正在走向失败，那么，根据长绳原理（见第 1 章增补材料），你倒可以试一试半心半意的施舍. 当然这是一种不良走法，因为神志清醒的对手将会一举拥有两间房子，但绝大多数男孩被蓓莎的胜利搞得晕头转向，会茫然不知所措地把两间房子拱手送还.

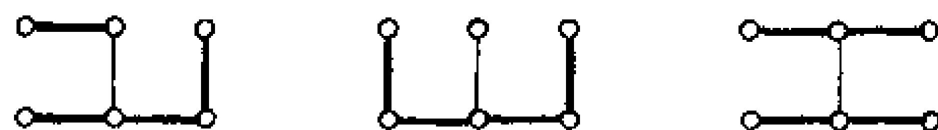


图 8(a). 硬心肠的施舍物.

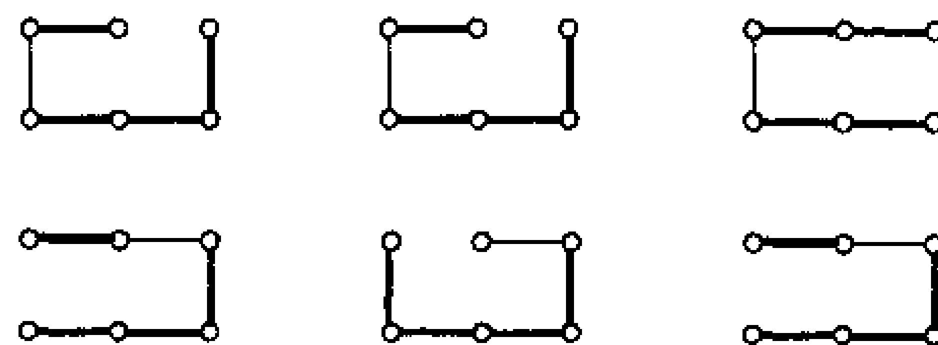


图 8(b). 半心半意的施舍物.

4 间房子的游戏

道迪很年轻时，她和姐姐经常在玩 4 房游戏，当姐妹两人各得 2 间房子时则认为爱维（后走者）是赢家以使抵销道迪的先走之利.

各得两间房子的话，第二人算赢.

开始时,道迪决不肯放弃一间房子,如果她能看到有别的事情可干的话,至于爱维呢,你们可以看出她是一个按对称原则办事的局中人,她老是在棋盘的相对一侧模仿道迪的行动而取胜. 但是后来,在看到蓓莎在扮演爱维的角色之后,道迪发现了怎样挫败爱维的办法:她可以在第 7 步送给她一个希腊礼物. 爱维还是可以赢的,如果道迪胆敢偏离正道的话,但她必须自觉地抵制每一步都要走成对称的那种倾向.

尽管道迪可以赢,但要写出她的全过程以应付一个狡猾的对手,却要困难得多. 在本节增补材料的图 34 中,我们将给出道迪的一套完整战术,另外在图 35 中对两位局中人都给出了一张

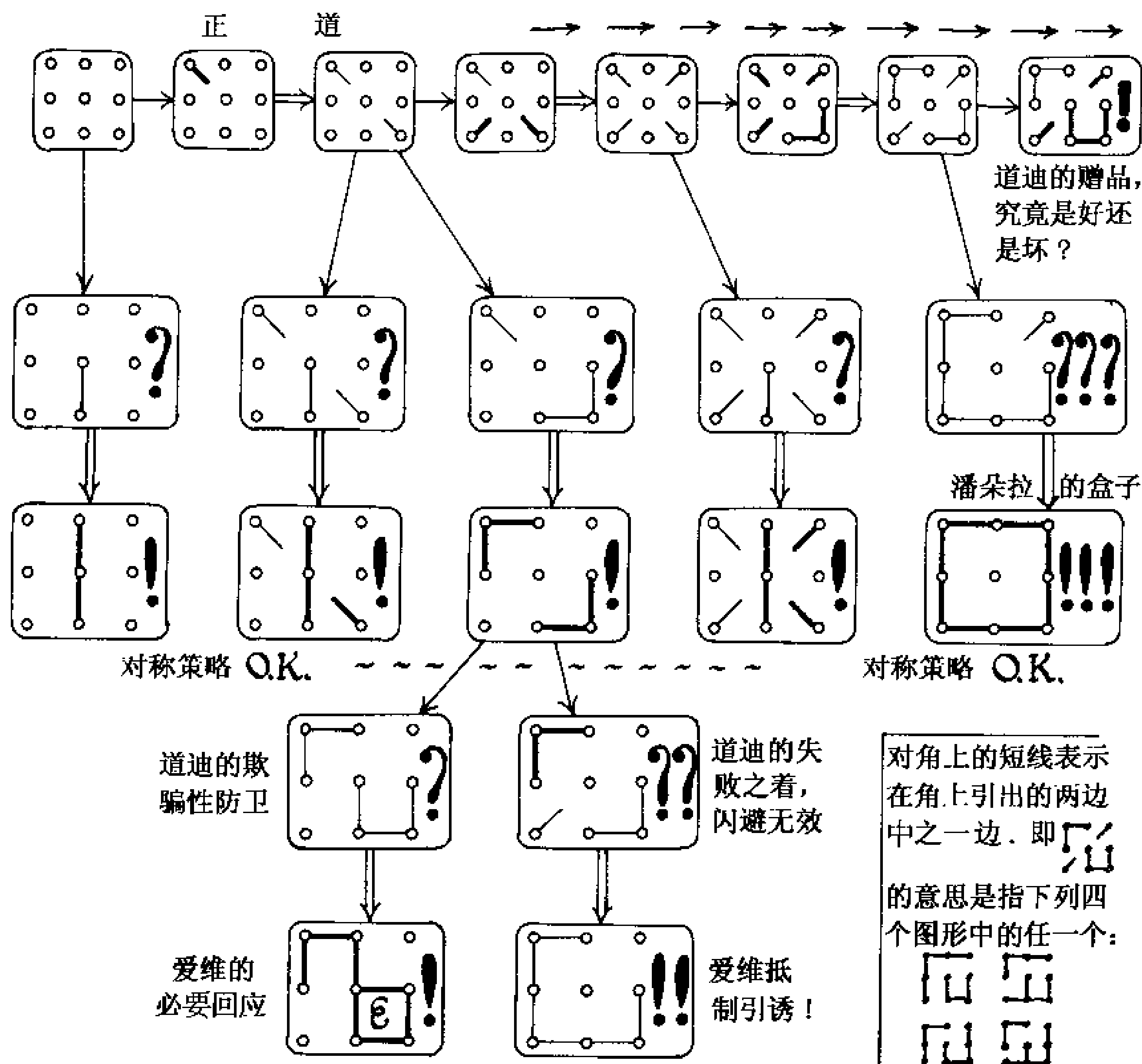


图 9. 爱维正视每一种可能出现的情况.

完备的 $\mathscr{P}$-局势表格. 对粗心大意者来说,这个小小的游戏充满着陷阱,而对那些写信给我们,希望成为专业的"造房子"游戏的好手来说,你们将发现这些表格对4间房子的初级比赛是很有用处的.

若链长为

4		4的环圈
	或	2+2
3+1		1+1+1+1

则赢家通常是

道迪　或　爱维

这同长链法则是一致的. 但在如此小的棋盘上,道迪经常可以无视该法则,把长链分割为2+1+1而取胜.

9间房子的游戏

令人惊讶的是,长链法则竟使9间房子的游戏看上去要比4间房子的游戏更为容易一些. 这次是爱维获胜,而她的基本战略是画出四根辐条,如图10所示,以迫使每个长链都要经过中心. 对大多数孩子来说,爱维的获胜比分至少为6对3. 然而道迪却可使优势反差降到5对4,这种办法也许是有意牺牲中间的一间房子,以迫使爱维放弃她的辐条战略. 当然,爱维的真实意图是想安排一条长链,她往往通过其他办法形成这条长链而提高她的得分.

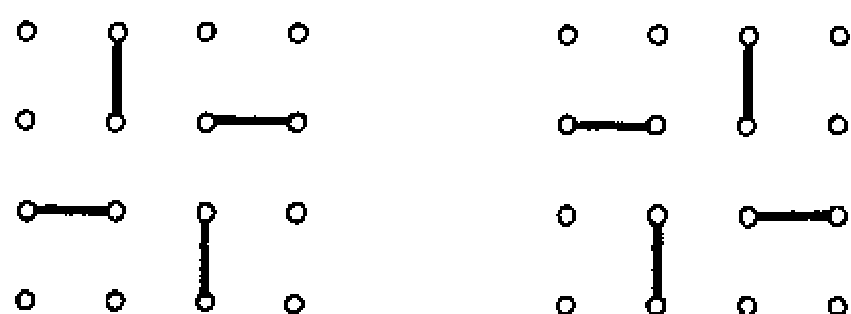


图 10. 用灵符防止生成一条以上的长链;爱维在道迪的轮子里加上了辐条.

当另一边已经画出时,爱维宁愿把她的辐条作成正方形,她小心翼翼地在图10的两种卍字图案之一中作其辐条. 一般说来,在此种情况下并无上当走法,所以爱维将在第16轮(16+0)获胜.

道道则尽量安排她的步子以使得某些插人的辐条成为一种牺牲品,同时达到以下两种目的之一,要末尽量多切割长链,要末在爱维没有考虑到的地方形成两条长链. 于是,一个半心半意

的施舍时常会使游戏反败为胜,而恰在其时,她认为一切都已经无可挽回了.

16 间房子的游戏

我们不知道究竟谁能在 4×4 棋盘上获胜,它是一种非常有趣的游戏. 爱维尽量企图形成 2 条长链,而道迪则力图使长链数减少为 1 或抬高到 3. 爱维用她的对称战略打败许多孩子,但道迪回忆起 4 间房子游戏中她的把戏. 如果她认为其对手正在亦步亦趋地模仿她的每一步动作,则她将把他* 诱入图 11(a)中的蜘蛛网,但如果他的行为较难捉摸,则她认为采用中间的一种模式更为牢靠一些(见图 11(b)). 道迪一般不会采用图 11(c)的开局法,因她认为在那种形势下是很难挫败对称战略的.

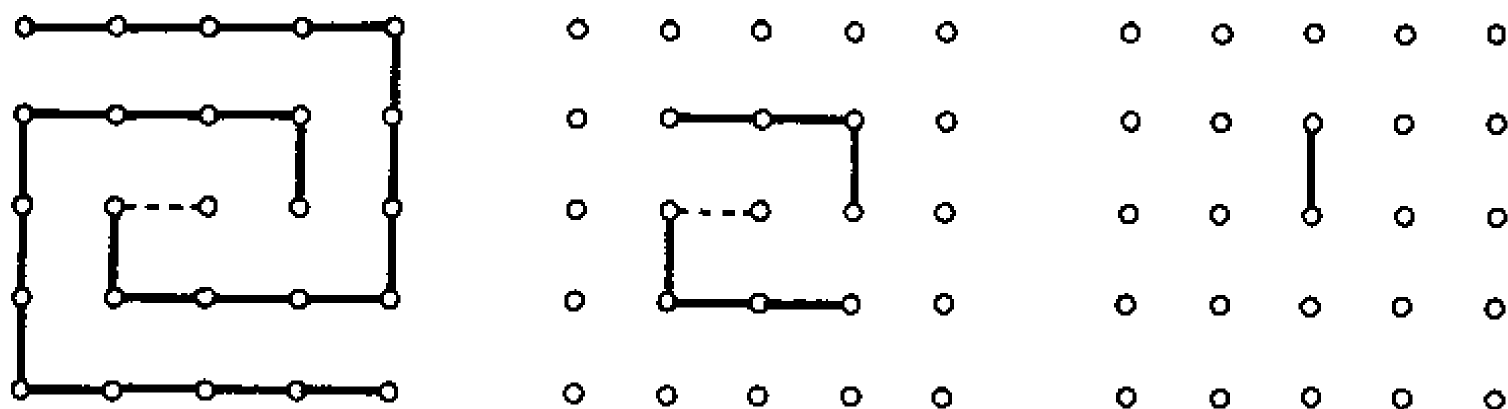


图 11. "请进入我的对称大厅!"

其他形状的棋盘

为了在更大的正方形或长方形棋盘上击败你的所有朋友,你当真需要长链法则. 要记住,你应把一个 4 或更多单元的闭环看成两条长链,而每一个诱人上当的行动,不论何方作出,都将改变你所需的长链数.(把一个上当行动看做一条已经填充好的长链.)作为一种好的战术,长链是越长越好,并尽你所能地避免封闭的环圈. 因为在谢绝一个环圈时你将丧失四间房子. 这些规则对一切很大的棋盘都管用,甚至适用于图 12 那样的三角形房子的棋盘.

当然,如果你的对手也在应用长链法则,那么,争夺控制权的斗争也许是十分艰苦的. 本章剩余部分将要讲到的尼姆串游戏将讨论控制权究竟是什么东西. 在本章的增补材料里有一段,将涉及某些罕见情况,那时你将认为,失去控制权倒不失为明智之举.

---

* 译者注:据图 6 可知,道迪与爱维都是女孩,此处当指道迪与其他男孩的对局,而不同爱维做游戏.

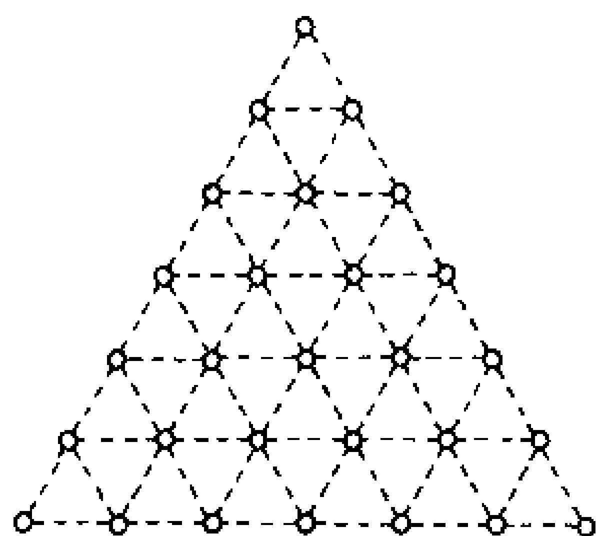


图 12. 有 28 个点子与 36 间房子的三角形棋盘.

造房子游戏与钱币串线游戏

现在你可以用一些线头、钱币与剪刀来玩造房子游戏的对偶游戏了,它叫做**钱币串线**游戏. 每根线的两头要末接在两枚不同的钱币上,要末是一头接一枚钱币,另一头接地(每段线头至多只能有一端接地),然后两位局中人轮流地使用剪刀来剪线头. 倘若你在一剪之下把一枚钱币完全分离,那么你就可以把它放进口袋,但此时必须再剪另一根线头(如果还有一根线头没剪的话). 当所有的钱币都与线头分离时,本游戏宣告结束. 谁口袋里的钱多,谁就是赢家.

图 13 是亚瑟与倍莎所进行的第一局游戏的对偶图形(请对照图 1)开始时有 9 枚钱币由 24 根线头连接,其中的 12 根连接不同钱币,另外 12 根则连接着钱币与大地. 图上,我们用小箭头表示与大地连接的线头. 钱币与线头形成了图的结点与边. 我们很容易画出一个图,使它对应于任一造房子游戏的局势. 然而,仍有一大批图是同这种游戏的局势不相对应的;譬如说,图中具有奇数边长的环圈,多于四条边的结点,以及**非平面图**等等. 实际上,钱币串线游戏是造房子游戏的一种推广.

尼姆串

尼姆串游戏是在同钱币串线游戏完全一样的图上玩耍的,剪线头的动作(当你把一枚钱币完全分离时,这是一种有奖励的动作)也一模一样. 在钱币串线游戏中,赢家是分离钱币数枚多者,但尼姆串游戏不一样,它得遵照正常游戏规则来定输赢. 在通常的尼姆串局势下,分离出最后一枚者算输,因为游戏规则要求你再走一步,然而已经无法做到.(但有时,尼姆图本身也可以

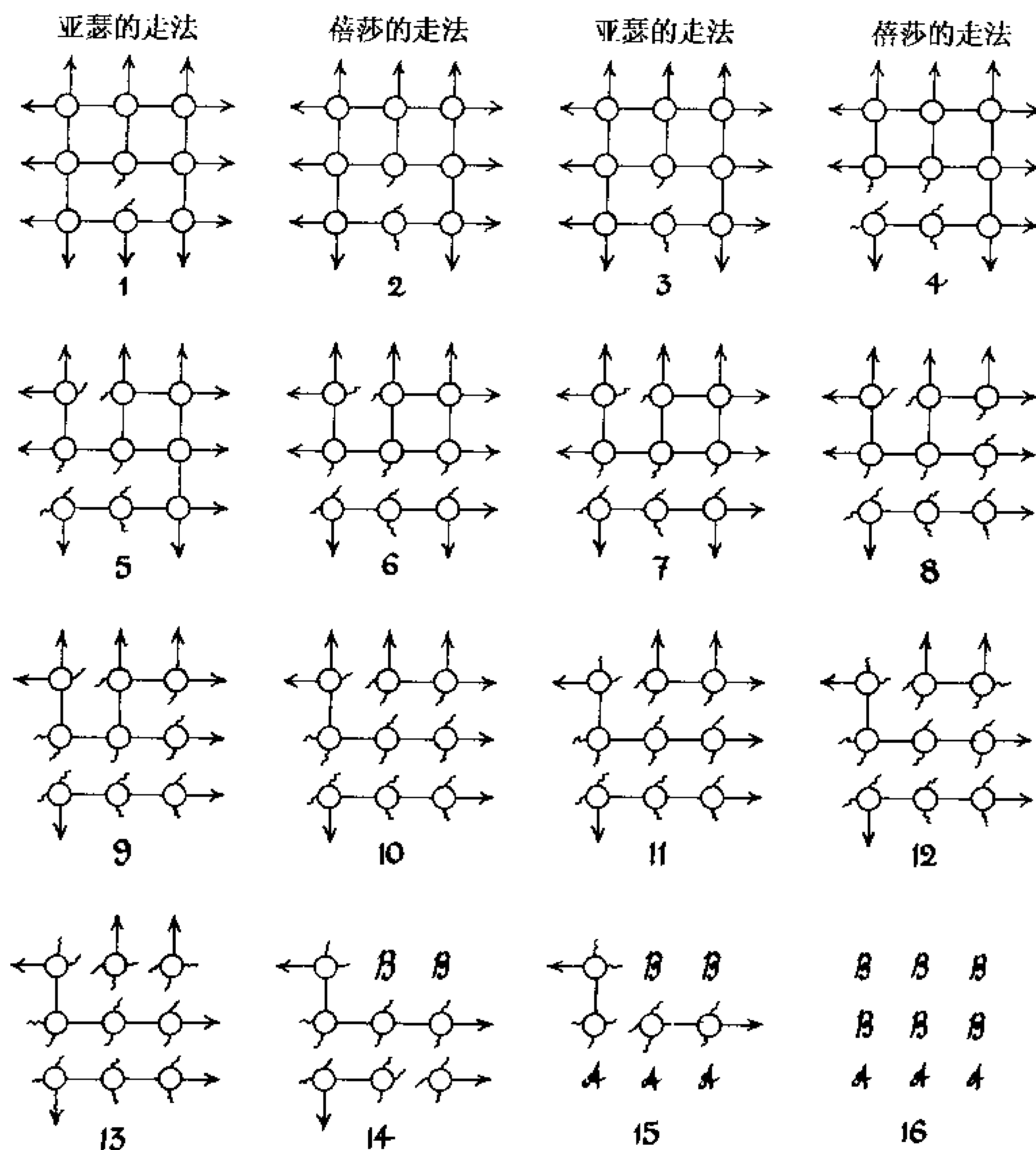


图 13. 一局钱币串线游戏——图 1 的对偶. *

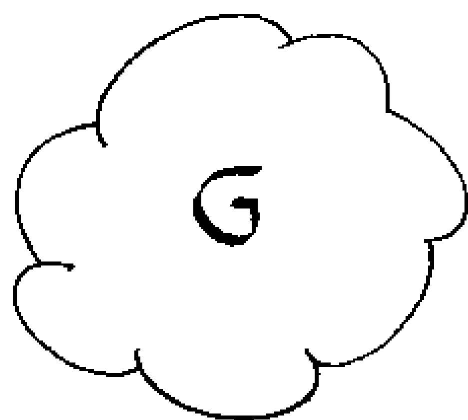
---

* 译者注:“对偶”是数学里的一个重要概念,其大量例子出现于射影几何学,例如帕斯卡定理、布里安桑定理等,请参看有关教材.

通过一根线头接地,若最后一步把它剪掉,则不至于分离钱币,于是可以算赢.)

尼姆串看来似乎同钱币串线很不一样,但通过仔细研究,它原来是钱币串线的一个特例.

> 除非你掌握尼姆串的一切知识,你就不能懂得钱币串线的一切!



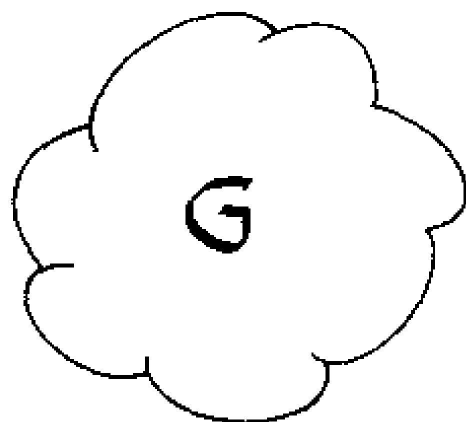




图 14(a). 一个困难的尼姆串问题. **图 14(b).** 这个钱币串线问题同它一样困难.

图 14 的结构证明了这一点. 设 G 表示一个任意的尼姆串问题,我们在它下面添加一条长链,并考察由此而生成的钱币串线问题——长链中应该拥有比 G 更多的钱币. 由于长链极长,谁第一个剪断它的一根线头,其对手就会在下一步囊括长链上所有的钱币. 所以两位局中人都想尽量避免剪断长链的线头. 而没有一个局中人能迫使其对手在长链上行动,直至 G 中所有的线段都已经统统剪断为止. 换言之,赢得图 14(b)所示的钱币串线游戏的唯一途径是设法赢得图 G 所示的尼姆串游戏.

图 15 表示的是另一种结构. 这次我们所得的钱币串线游戏是在尼姆串游戏 G 上面添加了几条长链与环圈. 如果这些东西长得足够的话,则该钱币串线游戏的获胜策略将是:

> 若你的对手在 G 中行动,则在 G 中用尼姆串获胜策略的行动来回应,若他在长链中行动,则除了两枚钱币之外,把其他钱币全部取走,仅仅留下联接两枚钱币的线头. 若他在环圈中行动,则除了四枚钱币外取走一切,把它们视为用一根线头联结起来的两对.

这一策略除每条长链留下2枚钱币,每个长圈留下4枚钱币之外;给了你其他一切,所以如果添加的长链与环圈中的结点总数超过

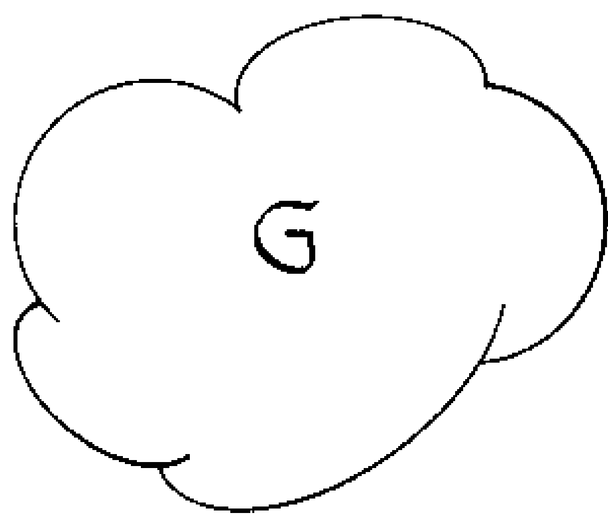


图 15(a). 另一个尼姆串游戏.

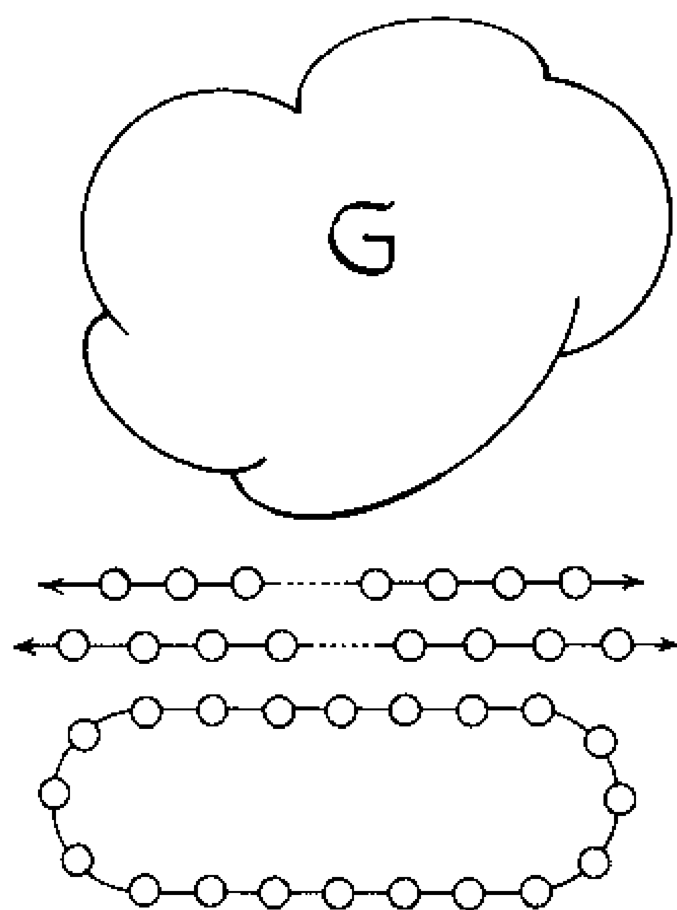


图 15(b). 相应的钱币串线游戏.

(*G* 中的结点数)
+4×(添加的长链数)
+8×(添加的长圈数)

时,那么你是会赢的.

实际上,尼姆串局势中往往含有它自身的(潜在)长链,所以这个策略有着广泛应用. 请回忆,"除2之外的一切"原理正是蓓莎在她同亚瑟的第二局游戏(见图2)中所使用过的. 玩得很好的造房子游戏通常同对应的尼姆串游戏玩法一样,只是在临近末尾时才有所差异. 尼姆串游戏中的最后一根长链处理时同别的长链一样,赢家除最后两枚钱币外取走其他一切,而最后那两枚他是冷酷无情地施舍给输家的. 然而,在造房子游戏的最后一根长链中,赢家当然是取走一切,涓滴不留了!

为何"长"要如此定义?

以下的论证将作出解释:为什么"长"要准确地如下定义. 我们将把一条链叫做**长**的,如果它

含有 3 枚或更多枚钱币的话,因为不管我们的对手怎样去剪断,我们总能做到:留下 2 枚钱币而取走一切并通过剪断长链的其他线头而完成之.我们必须把两枚钱币的链叫做短的,因为他可以割断中间的绳子,使我们不能不拿这两枚生气勃勃的钱币(硬心肠的施舍物).根据同样的理由,由 2 枚或 3 枚钱币构成的闭合环路也应该称为短的(矩形造房子游戏中不出现短的闭环).但是,由至少 4 枚钱币组成的闭环称为长的,因为不管我们的对手剪断哪一段绳子,我们总是可以有礼貌地谢绝最后 4 枚钱币.图 16(a)表明在 6 枚钱币组成的闭环上怎样办到这一点.当你的对手如附图所示剪断第一段绳子时,你只要取走 2 枚钱币,并在剩下的 4 枚钱币中剪断中间那一段绳子.图 16(b)则是与其对应的、蓓莎在造房子游戏中的玩法.

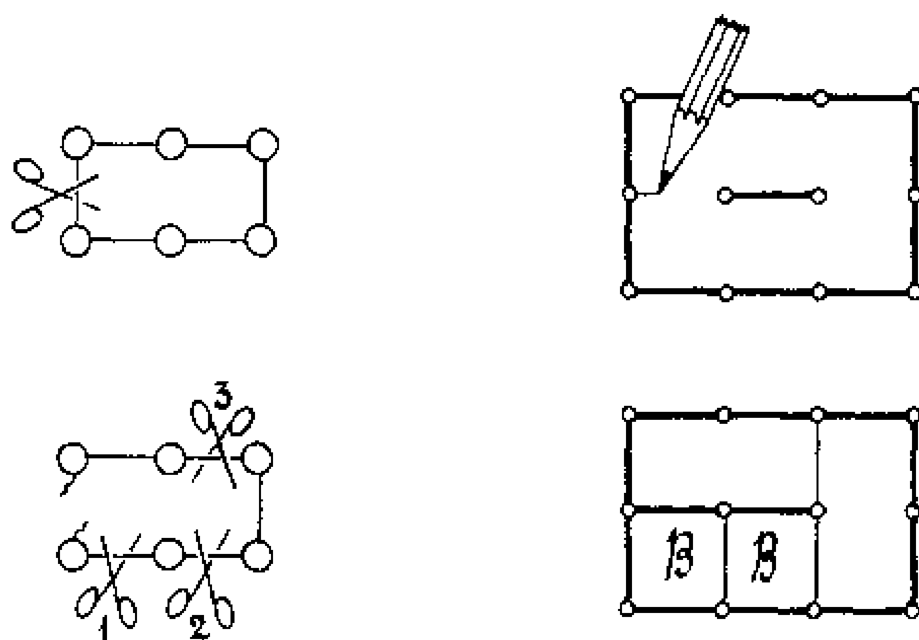


图 16. 蓓莎有礼貌地谢绝一个长的闭环.

玩得巧妙的造房子游戏经常导致图 15(b)那样的对偶局势.绝大多数钱币是在长的链与闭环中,获胜者是能够迫使其对手割断其中第一根绳子的一个局中人.看来似乎都是这种情况,即尼姆串的取胜策略同样也给出了钱币串线游戏的取胜策略.满足图 15(b)的条件时,可以证明必然发生上面的事情.除此之外,还有许多其他图形也是如此.要想在造房子或钱币串线游戏中获胜,你应尝试去赢与之对应的尼姆串游戏并在同时安排一些很长的链以供练习.在本章的余下部份,我们将教会你怎样成为一位尼姆串游戏专家.

尼姆串游戏中拿不拿一枚钱币

只有一根绳子将它缚住的一枚钱币称为**可缴获**的.一旦存在着一枚可缴获的钱币,下一局中人就可以剪断相应的分支,剥离钱币,并获得奖励性的多走一步.对某些图形来说这就是最佳走法了.但对于另外一些图来说,其中也包括蓓莎在图 2 的游戏中遇到的情况,获胜策略却是拒

绝剥离钱币. 正如你也许会猜想到的那样，究竟拿不拿钱币取决于整个图形的性质. 不过，只要去考察接近那枚可缴获钱币处的图形的局部性质，就可以推论出 ·大批结果.

任何一枚可缴获的钱币看来总不外乎图 17 中所示的六种可能性之一. 缚住可缴获钱币的绳子要末接地(图 17(a))，要末同另一枚钱币连接. 如属后一种情况，则绳的根数有一根(图 17(b))，二根(图 17(c)，(e)，(f))，三根及三根以上(图 17(d)). 如果有二根绳子，则第二根绳子要末联结到另一枚可缴获的钱币(图 17(c))，要末接地(图 17(e))，要来联到一枚由二根或二根以上绳子缚住的钱币上(图 17(f)). 在六种情况的每一种都画着一朵云，它包括了所有那些同可缴获的钱币靠得不够近的钱币与绳子. 图 17(d)与(f)中的虚线则是额外的绳子. 它可能在场，也可能不在场.

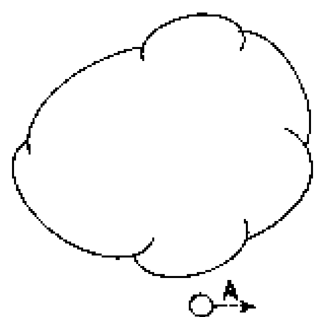


图 17(a). 拿！一枚游离的钱币.

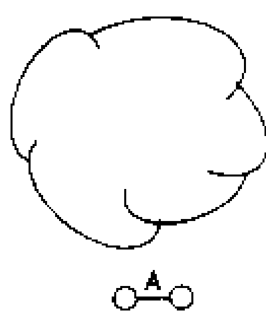


图 17(b). 拿！两枚游离钱币与一个骗局.

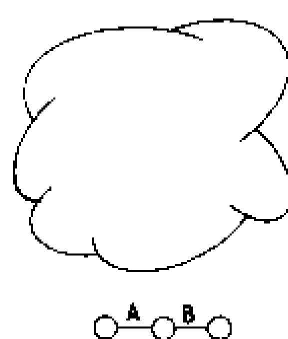


图 17(c). 拿！三枚游离钱币与一个骗局.

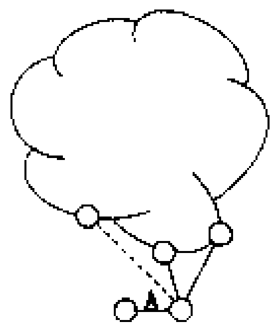


图 17(d). 拿！一枚游离的钱币.

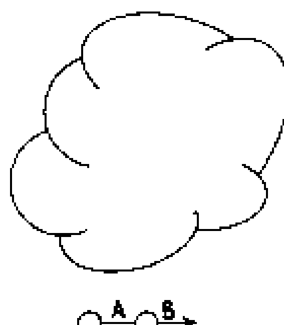


图 17(e). 赢！



图 17(f). 赢！

半心半意的施舍

我们断言，在前四种情况(图 17(a)—(d))下，局中人可改变走法，结果也一样好，他可以剪断绳子 A，拿走钱币；在图 17(c)中，他可以剪断绳子 B，拿走另外两枚钱币. 假定从这些附图之一开始，你有着一个取胜策略. 如果它告诉你，应该剪断某些来标上字母的绳子来完成你的第一轮动作，那么你的对手在开始他的一轮时，就可以剪断标上字母的绳子. 但如果你不这样做，代之以先剪断 ·切标上字母的绳子，然后再像以前一样剪断没有标上字母的绳子，那么同样的局势还是可以达到的. 如果从这四种情况开始，真有取胜策略的话，那么，从剪断有字母的绳子开始，也

是存在着取胜策略的. 所以假定一个优秀的局中人在遇到图 17(a)-(d)四种情况之一时,可以把一枚钱币拿走,这种假定将不会失去普遍性.

另外两种局势(图 17(e),(f))则更加有趣得多. 如果轮到你走这两者之一,那末你可以剪断 A 绳,剥离那枚可缴获的钱币,或者剪断绳子 B,谢绝拿它. 不管剩下来的图形会是什么样子,上述两个动作中的一个或另一个将是可以获胜的. 但你需要视察整个图形以决定你的获胜策略究竟应该始于剪断 A 绳还是 B 绳!

这个乍看令人惊讶的结果可由窃取策略(图 18)的巧妙应用而加以证明.

对于图 17(e)与(f)中的游戏,我们要问:

在含有未标字母绳子的较小游戏 G(图 18(e)与 18(f))中,哪一方可以赢?

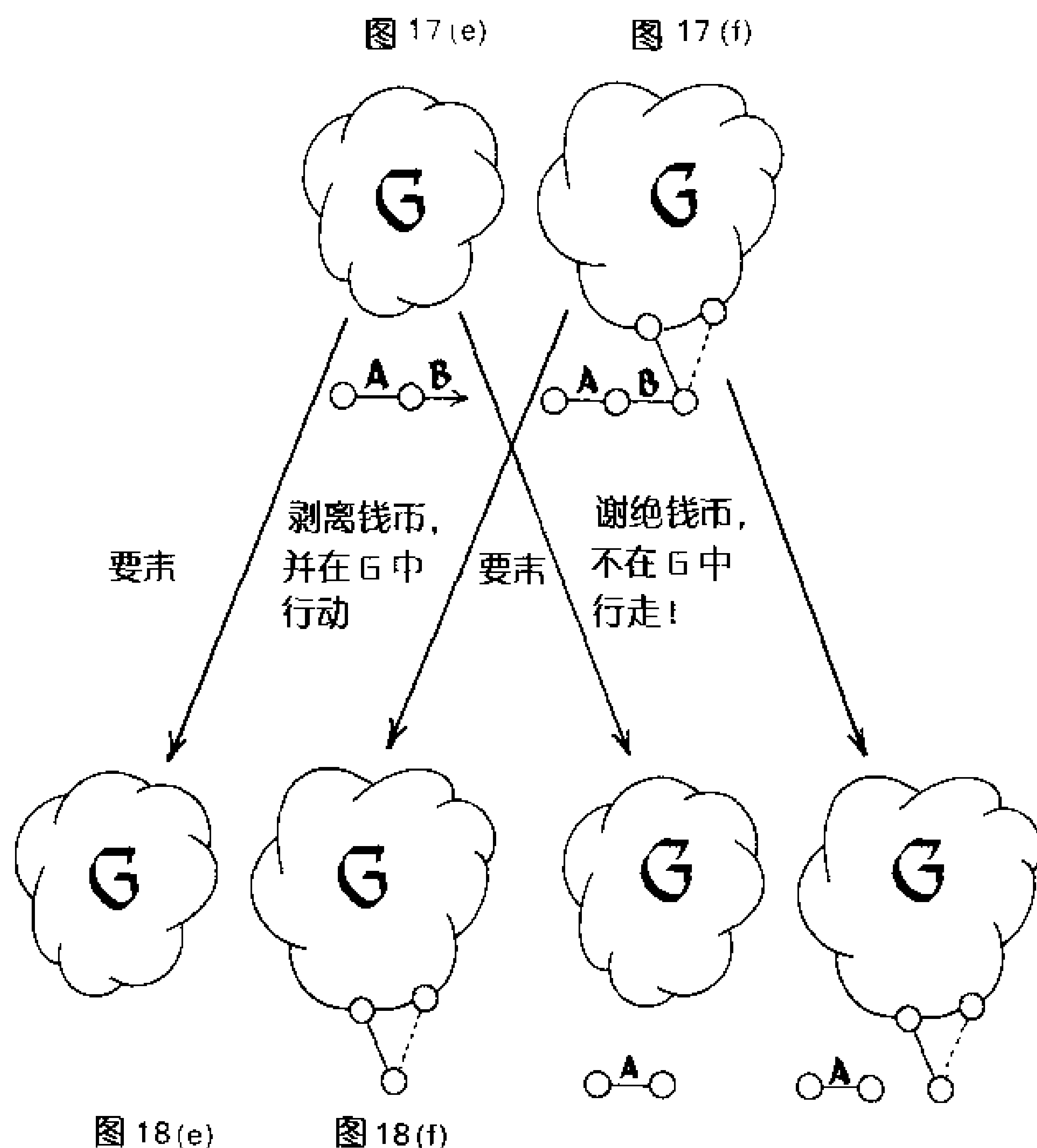


图 18. 在一次半心半意施舍后的窃取策略.

赢家要末是从 G 中行动的局中人,要末不是. 这位交上好运的局中人不论是谁,你都可以作出一种巧妙安排,来窃取他的策略. 如果从 G 中行走的局中人可赢,则在从图 17(e)或(f)开始玩游戏时,你可以从剪断绳子 A(这将剥离一枚钱币,于是你就可以继续走下去)开始,然后再剪断绳子 B(又拿走一枚钱币,你还可以往下走),然后你就开始在 G 中行动,此时你当然可以照抄第一位局中人的获胜策略了. 另一方面,如果 G 中先走的局中人不存在获胜策略,那么当你从图 17 的(e)或(f)开始玩时,你应当毫不犹豫地照以下做法来完成你这一轮的任务:剪断绳子 B,这样就迫使你的对手先开始做 G 中的游戏(他自然也可以先剪断绳子 A,如果他不干,那么以后你来干).

谢绝动作将使你的对手丧失 2 枚钱币的事实对尼姆串游戏并无差异,胜者是由最后动作决定的. 在钱币串绳游戏(以及造房子游戏)中,这桩事情可能会有点影响,但当极长的链存在时,似乎也不大可能.

尼姆串图形的斯普勒格—格隆第理论

我们现在试图对任意尼姆串图形来定义一些值. 我们希望这些值是拧数,以便我们利用通常的局外最小数 Mex 以及尼姆加法规则. 唯一的困难是存在着一些类似图 19 所示的局势.



图 19. 一个愚痴的尼姆串(或造房子)局势.

我们的有关图 17(e)的讨论已经表明,不管加上什么图 G,先走者可以赢. 从而图 19 的拟议中的值 $*x$ 应具有下列性质

$$*x+*y\neq 0.$$

对任一拧数 $*y$ 均应该如此,甚至包括 $*x$ 自身在内,因而就特例来看,即有

$$*x+*x\neq 0.$$

你们中间已经读过本书第 12 章的人一眼就能看出怎样解法这个怪论. 图 19 就是我们称为**愚痴**的局势,其值为⅁. 该章的奖励理论与有奉送的动作可应用于尼姆串(其中的有奖动作就是缴获钱币),并且证明任一局势要末是一个普通的拧数值,要末便是特殊值⅁. 但现在不必去重读第 12 章了,我们很容易概括出一些法则来求尼姆串的值:

> 无绳子的图形，其值为 0.
>
> 有一枚可缴获钱币图形(图 17(a)—(d)中四类型之一)之值等于除去钱币及所缚绳子后的子图之值.
>
> 有一枚可缴获钱币的图形(图 17(e)，(f)中两类型之一)之值为☽.
>
> 没有可缴获钱币的图形之值可由剩下来的图形之值而求得，后者是利用 Mex 法则(第 4 章)剪断绳子后所余者.

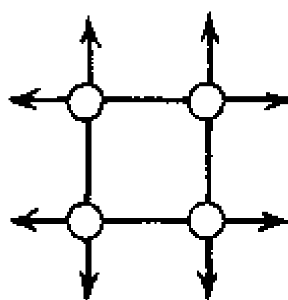
在把这些值相加时，应记住

$$☽ + 0 = ☽ + *1 = ☽ + *2 = \ldots = ☽ + ☽ = ☽,$$

以及通常的尼姆相加法则.

我们在图 20 中揭示了某些图形的计算. 图上没有钱币时，我们在每根绳子的边上写上剪断此绳后所得子图的尼姆值. 例如，最后的那幅图形有着尼姆值为 0，1，3 的各种选择，值为 $*0$，$*1$，$*3$，因而它的自身值为 $*2$，因为 $2=\text{mex}(0,1,3)$. 标记着☽记号的绳子对先走者来说是愚蠢透顶的选择——如果他剪断这根绳子，那么即使在局势上添加别的图形，面对一个保持正确走法的对手时他还是**必输**无疑. 每个图形的尼姆值可从它的各条绳子上所附数字的局外最小数求出——此时你无需考虑☽值，因为它所对应的是自杀性动作.

尽管道迪赢了造房子游戏中的 4 间房游戏，可是我们可以从图 20 中推论出：爱维能赢得对应的尼姆串局势：



这意味着即使在造房子游戏中她也能赢得

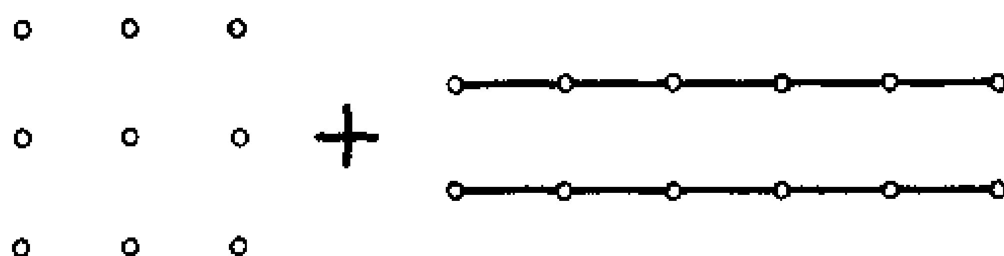


图 21 汇集了至多只有四个终端，且没有内部连接线路的一切尼姆串图形的答案. 在本章附录中还将推广到有五个终端的类似子树图的结构.

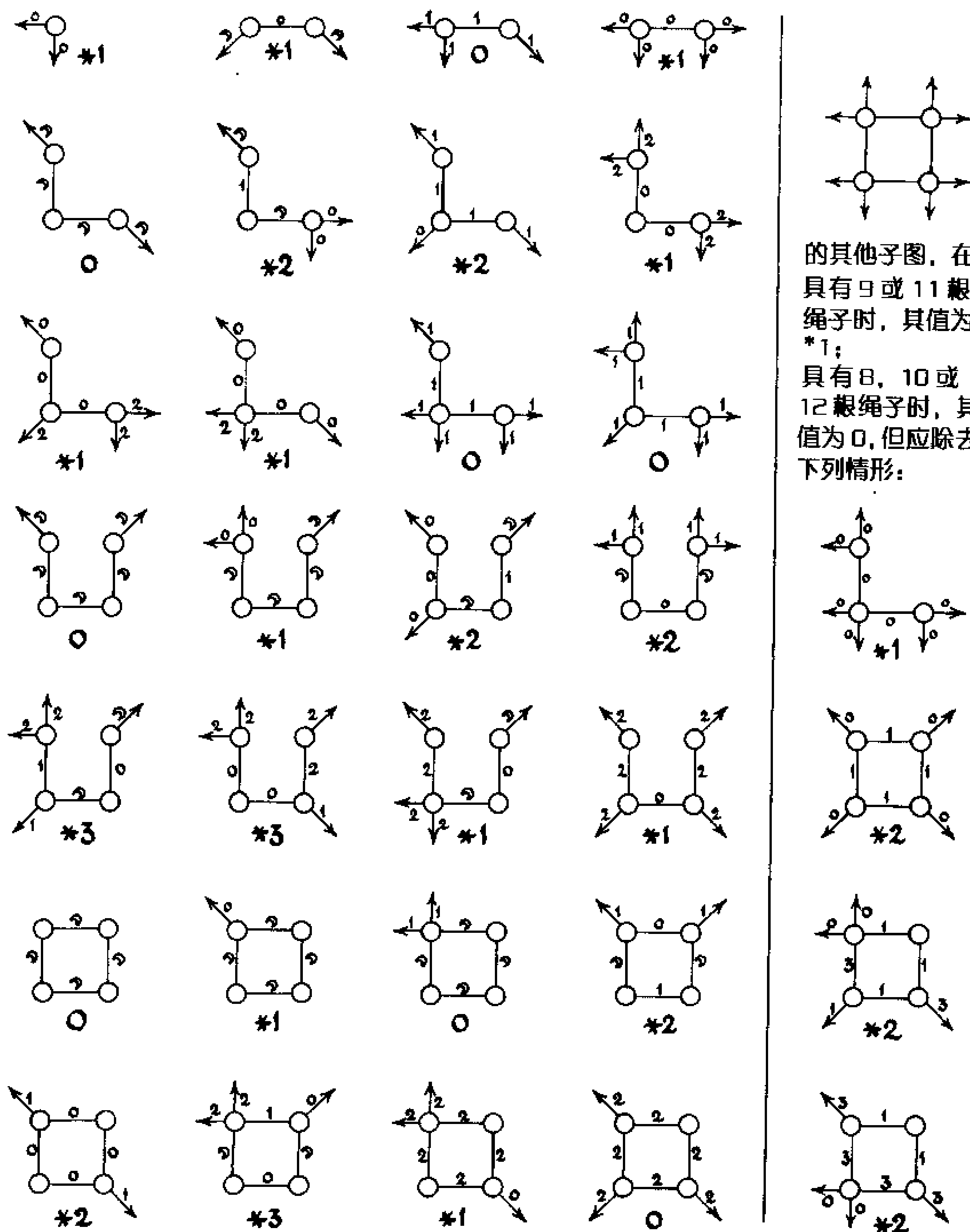


图 20. 算出各个尼姆串图形的值.

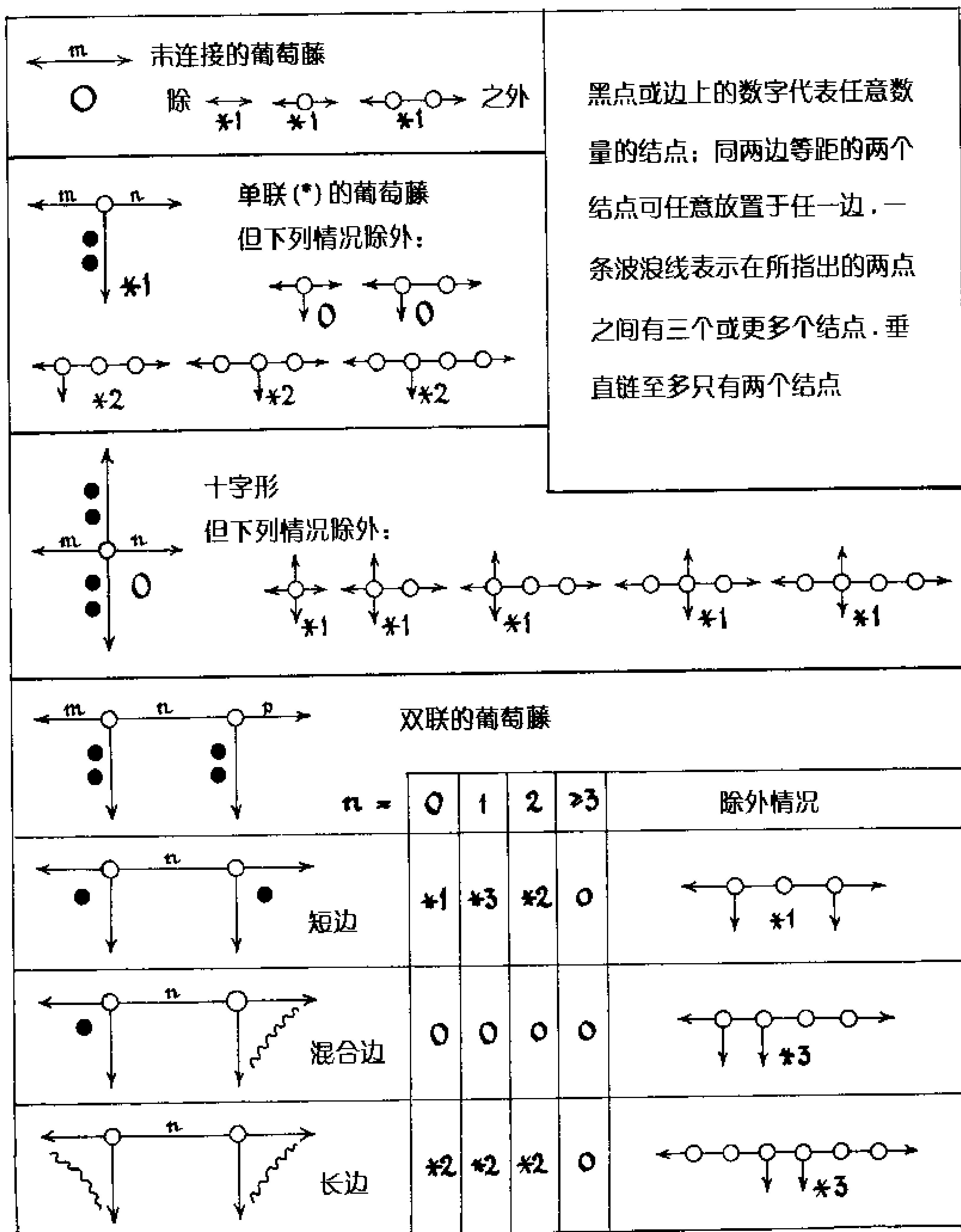


图 21. 值得注意的尼姆串拧数.

一切长链都是一样的

请观察一下图 22 的各种局势,其中所有的云朵掩盖的都是同样的货色,而悬挂着的项链则至少有三颗宝石. 在尼姆串游戏中所有图形的性态都完全一样,因为一切看得见的边都将是愚痴动作.

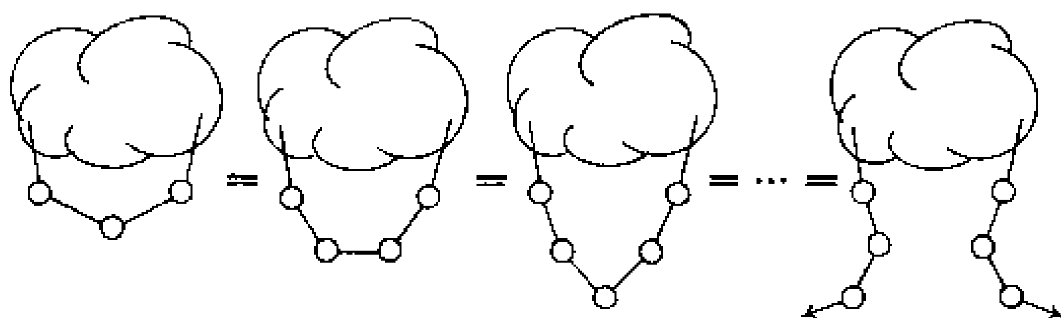


图 22. 戴着三颗或更多颗钻石者是一群臭味相投的人.

> 若一根链上有三个或三个以上结点,其确切数字对值不会有任何影响.

据此可知,用一个特殊记号来表示长链是很方便的.



的意思是指



什么样的变异是无害的?

更一般地,我们可以在尼姆串图 G 中加入或取出一些钻石(所谓**钻石**,当然是指有 2 条边的结点),以得出图的**变异**. 在图 23 中,画出了图 G 与它的两个变异 H,K.

我们将启用一个新名词**停留点**，它的意思是指一个箭头（图形有一个接地，即**终端**）或**接口**（有三条或多条边的结点）. 如果在两个停留点之间的一条路径通过三个或更多中间结点，则称它是**长**的，否则就称为**短**的. 变异通常要改变图的值，但也存在一大批不改变值的**无害**变异：

> 两图形之间的变异肯定是无害的，如果一个图形中停留点之间的每条短通路都同另一图形中的短通路对应的话.

无害变异定理

在图 23 中，H 是 G 的一个无害变异，因为唯一的短通路为 AE，Af，Ef，而异于 Aa 的通路不经过一个停留点. 但在 K 中，通路 AE 是长的，Cd 则是短的，因而我们的定理对这个变异不适用. 实际上，G，H 的值为 $*2$，而 K 的值却为 0.

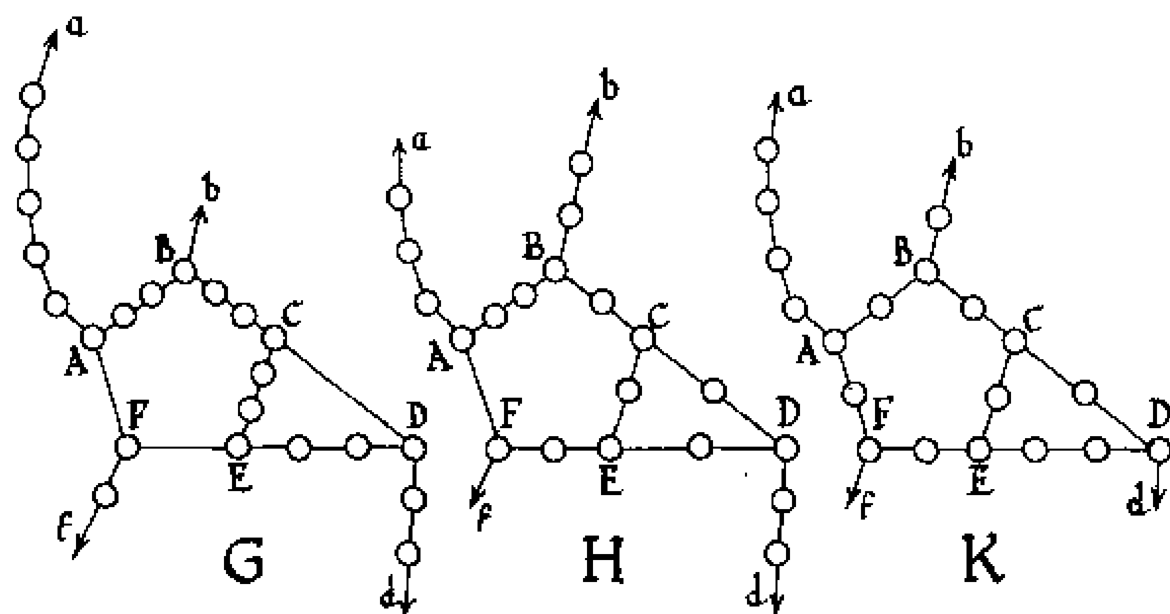


图 23. 图 G，无害变异 H，致命的变异 K.

若 G，H 由无害变异联系着，那么你可以像玩游戏 G 一样来玩游戏 H. 一个不愚蠢的动作必然要割断两点 A，B 之间的一短链的某根绳子，而 A，B 至少在切割动作之前是停止点. 在原图形中，A，B 也必然是停止点，由于 A，B 之间的距离是短的，所以我们在变异图形中肯定也能找到一个与其类似的不愚蠢动作（见图 24）.

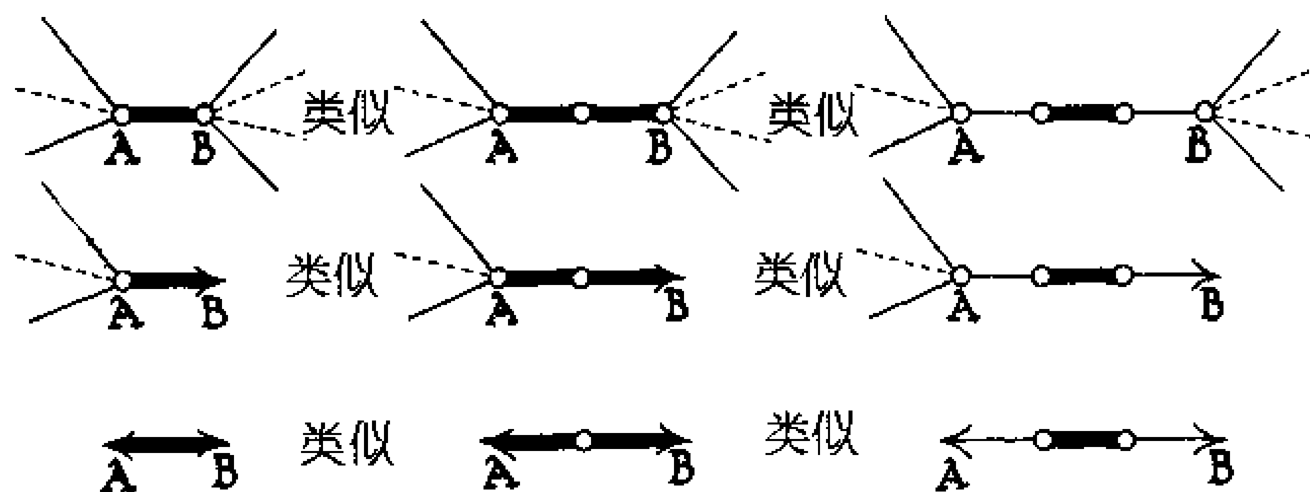


图 24. 无害变异中的类似动作.

我们还可以对咱们的变异定理略加强化：

> 如果在两个停止点之间的通路经过一条长链的一个终端，你就无需担心通路的长度会不会改变.

(因为在类似于图 25 的图中——其中 A 或 B 有可能是终端——AB 不会成为一链，除非有人走出极其愚蠢的一步，割断了终止于 C 处的长链.)

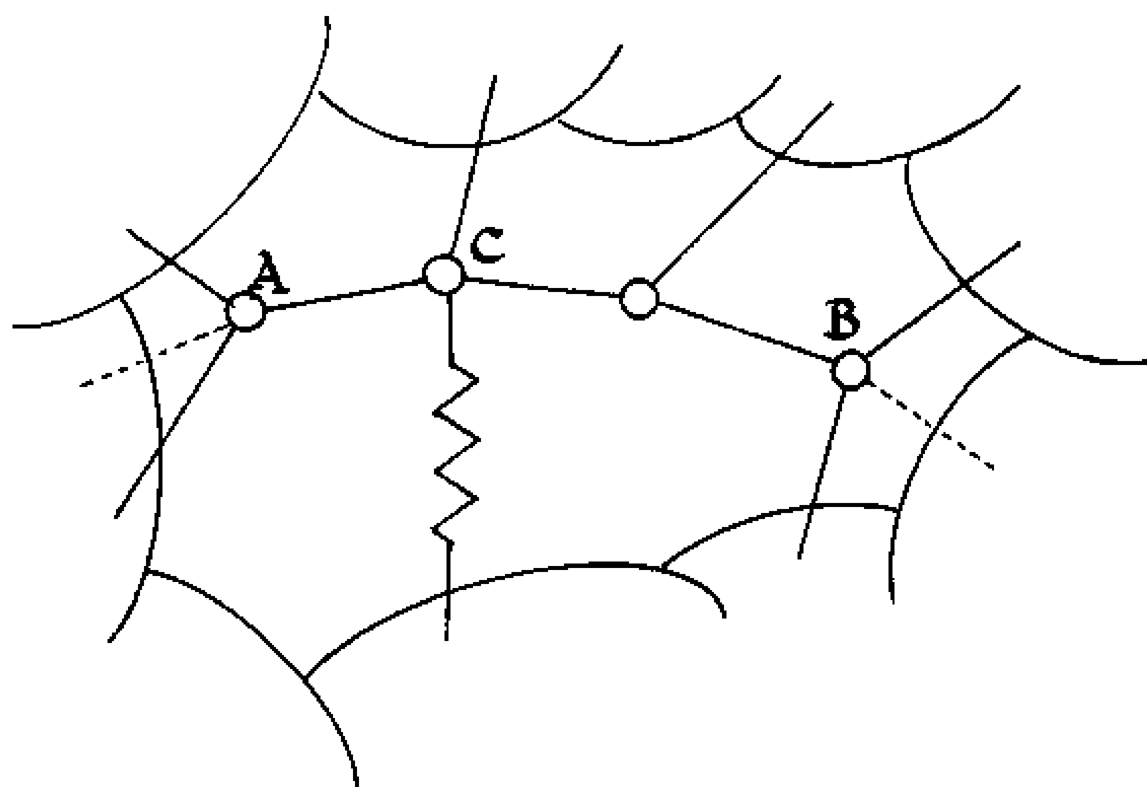


图 25. 穿过 C 处长链的通路 AB.

砍伐与变更

还有一些更剧烈的变化可以施加于尼姆串图形而不变其值. 例如：

> 长链可以拗断!

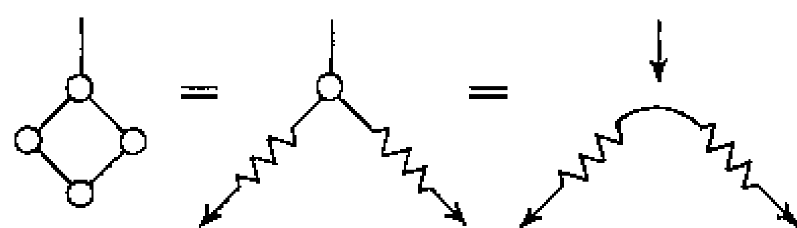
图 22 已作暗示，图 26(a)表明了使用长链语言的记法.

图 26 中剩下的等价关系则更为有趣. 图 26(b)中间的等价关系特别有用(左边的等价关系是一条拗断的长链). 它断言：如果有一条边接到一个结点(有两条长链发自该点)，则该边可以用一条直接接地的边予以取代. 更一般的情况是，若两条长链连接到一结点，则以它为终点的所有的边都可代之以直接接地的边(见图 26(c)).

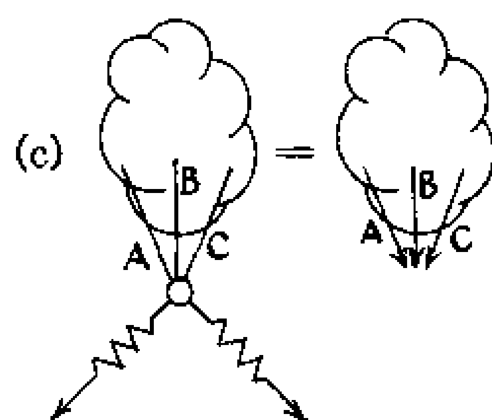
(a) 拗断每一根长链！



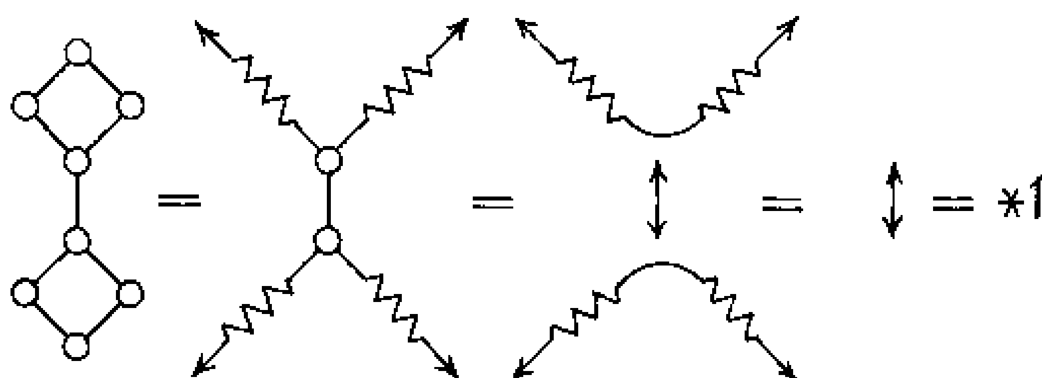
(b) 丢弃长的闭环与长链！



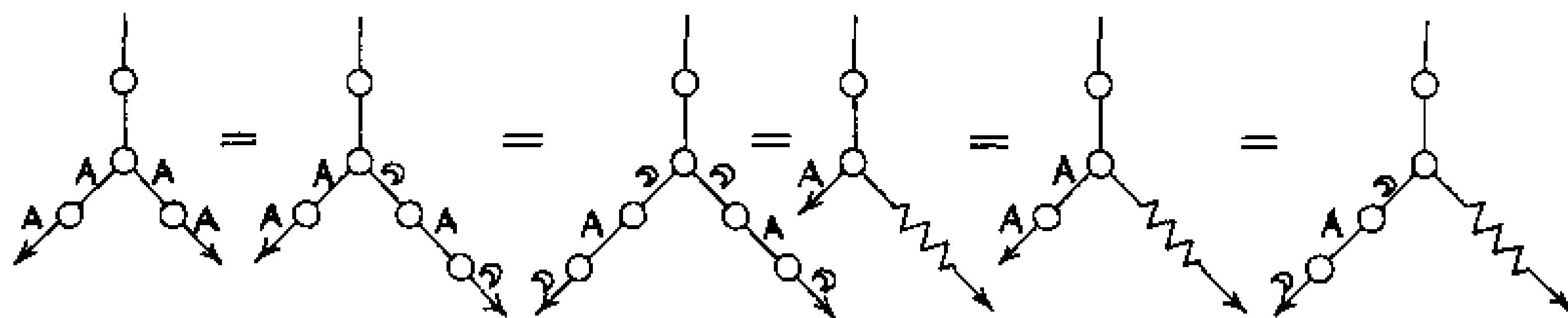
(c)



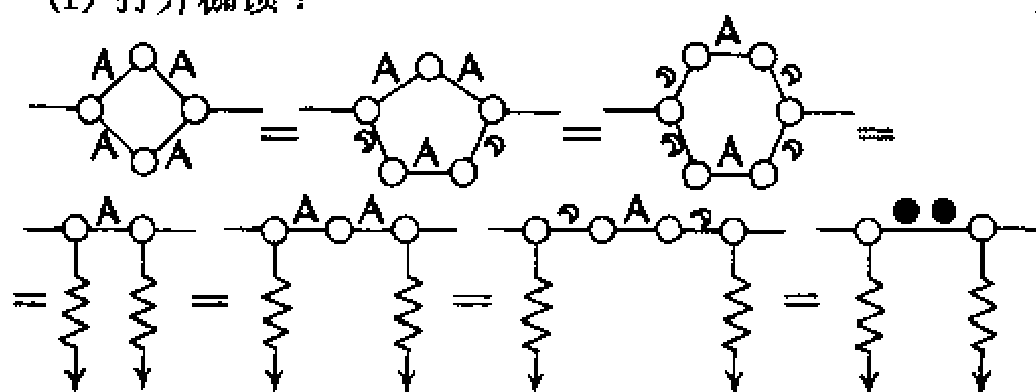
(d) 解除镣铐！



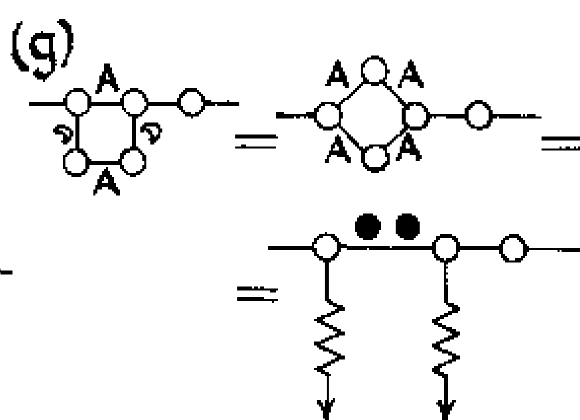
(e) 伸展四肢！



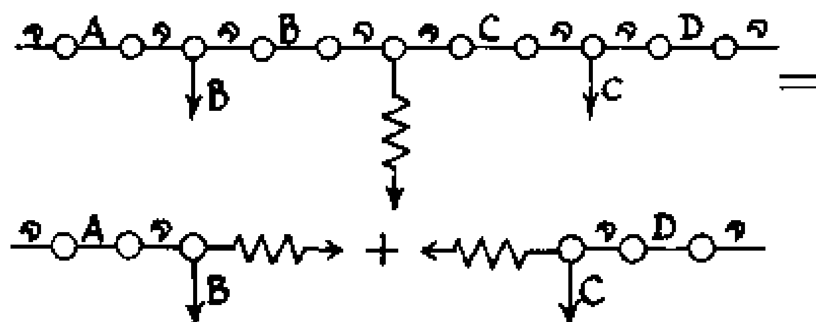
(f) 打开枷锁！



(g)



(h) 进行一些其他有利的变换！



(i)

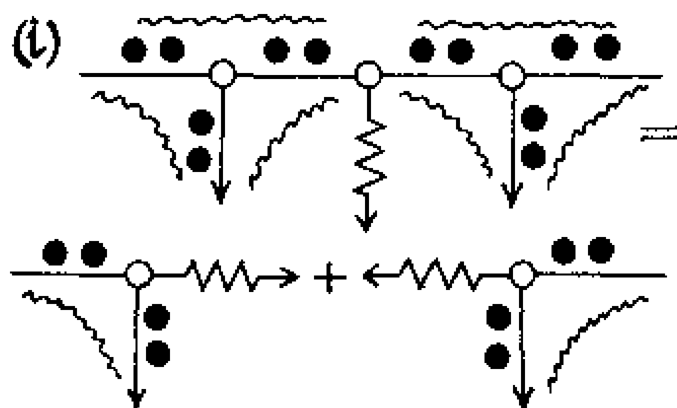


图 26. 一些有用的尼姆串等价关系.

证明的思路是位于两长链终端的一个结点不能俘获,直至有人走出一步愚痴动作,输掉这局为止.我们可以应用此等价关系于图 26(b)的第一部分到最后一部分,从而在每个图形上除去接地分支.但通常更便利的是它的反向应用,引入新的终端,消去许多分支与结点.有时候,如图 26(d)的情况,这将导致一个把大地与其本身连接的分支(相当于造房子游戏中的 0×1 博弈!);此种分支的值为 $*1$.

图 26(e)中前面三部分的等价关系可从无害变异定理导出,但它们与后面三部分的关系并非如此,因为有些短链已变作长链.图上的字母标出了对应动作,而⊃的动作可以不必理睬.图 26(b),(d),(f),(g)则表示我们有时可从图形中消除闭路——图 26(f)的最后一图是前面三个的省略记法,是它们相互之间的无害变异.图 26(h)有许多变异形式,可简记为图 26(i)(利用图 21 的记法).

葡萄藤

葡萄藤是一种没有闭路与可缴获结点的尼姆串图,其中所有的接合点都在唯一的长通道(称为**主干**)上,而且每个接合点都正好是三条边相连.将一终端与最近接合点相连的链称为**卷须**.所以一根单连葡萄藤有三个卷须(图 21).具有多个接合点的葡萄藤在其终端接点上有 2 个卷须,而在中间接点上有 1 个卷须.如果两个相邻接点的距离是长的,则葡萄藤可分解为两根较短的藤,因为长链是可以折断的,所以如果我们愿意,可以假定此种距离都是短的.

两柱葡萄藤是在不相邻停留点(既可为终端,也可以是接合点)之间每一个距离都是长的藤蔓.值得注意的事实是,任一两柱葡萄藤游戏的值都与对应的两柱游戏(第 15 章)构形之值相等.具有一短的卷须的接合点变成有两柱的列(即使它也有长的卷须),而每一个其他接合点则变成只有一柱的列,以长距离分隔开的两个相邻接合点则对应于没有柱的空白列(见图 27).两柱游戏中拿掉一列的投球动作对应于尼姆串游戏中的一个卷须动作;而拿掉两列的动作则对应于葡萄藤主干上的动作.

关于葡萄藤的问题,我们要讲的话是:

> 除非通晓两柱游戏,否则你就不能全部掌握尼姆串!

如果你已经看过本书第 15 章,你会懂得开勒司与道逊开勒司游戏只不过是两柱游戏的特例,于是,把本章已经讲过的几条标语结合起来,我们就有了下面的:

除非你通晓开勒司与道森开勒司游戏，
你就不可能全面掌握造房子游戏!

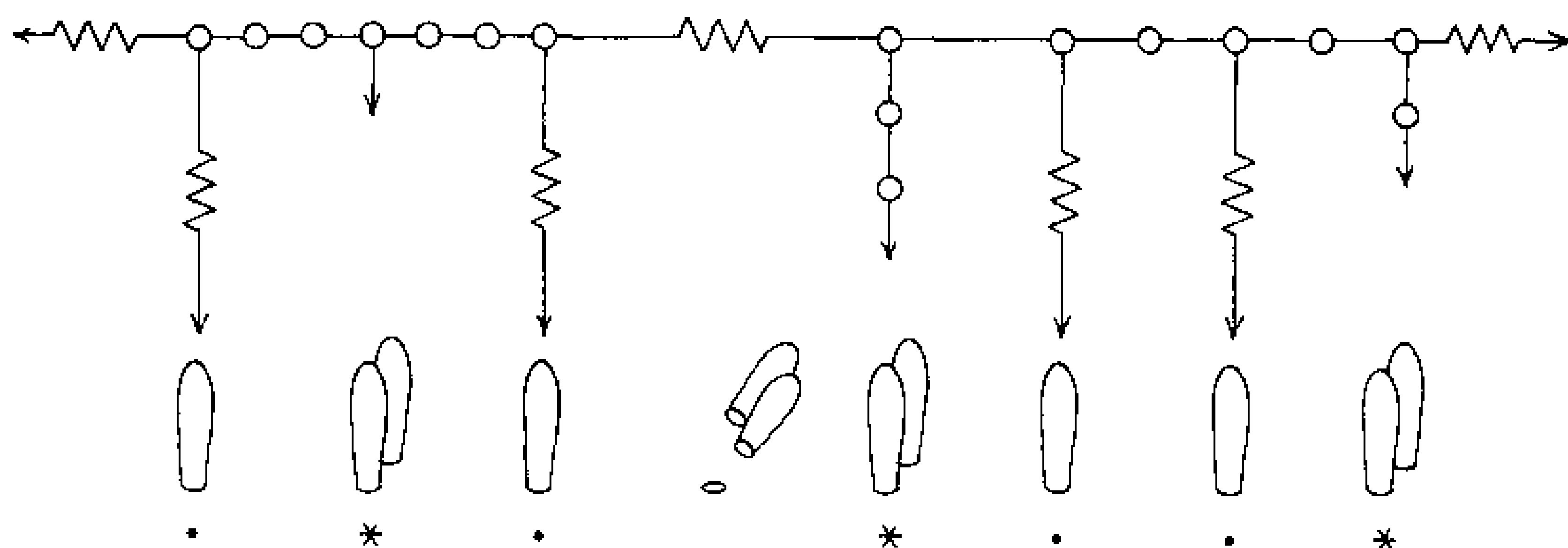


图 27. 两柱葡萄藤与两柱游戏的对应.

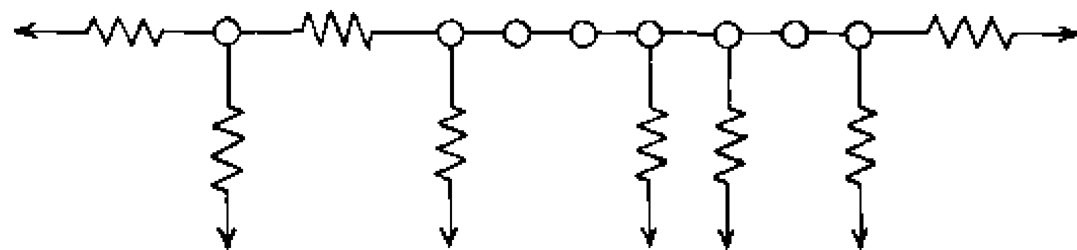


图 28. 一根可拗断的道森葡萄藤 D_1+D_4，值为 $0+*2=*2$.

道森葡萄藤* 是一种两柱葡萄藤，它的所有卷须都是长的. 当然，若相邻接合点的距离是长的话，则道森葡萄藤可以拗断，如图 28 中的那一个. 若所有这些距离都是短的，则 n 联道森葡萄藤的尼姆值 D_n 如下：(参看第 4 章)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		11		13		15		17		19		21		23		25		27		29		31		33
D_n	**0**	**0**	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	**0**	5	**2**	**2**	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	**2**	7
D_{n+34}	4	**0**	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	**2**	3	3	0	1	1	3	0	2	1	**1**	0	4	5	3	7
D_{n+68}	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	…						

开勒司游戏的一个局势对应着在每个接合点处有一短卷须的两柱葡萄藤. 尽管如此，由于注意到我们无需担心接点与终端间的某些距离：

* 译者注：原书括号内尚有一个词组，纯属作者杜撰，并无任何植物学意义，故予以删除.

> 一根葡萄藤是一开勒司葡萄藤,如果
> (i) 每一接合点有一短卷须,且有
> (ii) 两终端或两相邻接点之间的每一个距离都是长的.

如果你的开勒司葡萄藤中,相邻接点之间的任一距离都是长的,它就可以拗断(见图 29). 由第 4 章,不能拗断的 n 联开勒司葡萄藤的尼姆值 K_n 有如下表所示:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
K_n	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
K_{n+24}	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
K_{n+48}	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
K_{n+72}	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

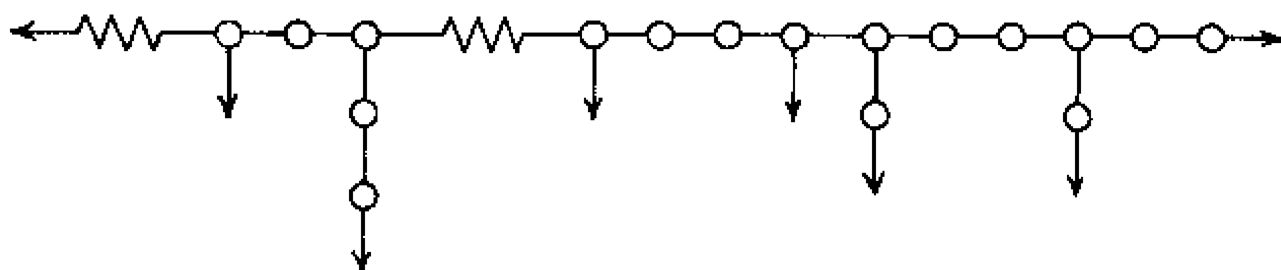


图 29. 一根可拗断的开勒司葡萄藤,K_2+K_4,值 $*2+*1=*3$.

两柱葡萄藤与两柱游戏之间的对应使我们有可能将图 26(h)与(i)所表示的分解定理解释成两柱分解定理的一个推广. 对一切两柱等价关系都存在着尼姆串的推广.

> ~~~~~~ * · * ~~~~~~ = ~~~~~~ * + * ~~~~~~
> ~~~~~~ * · · * ~~~~~~ = ~~~~~~ * * * ~~~~~~
> · * ~~~~~~ = * ~~~~~~
> · · ~~~~~~ = * ~~~~~~

后两式帮助我们作出假定:两柱葡萄藤极尽头处的接合点有着短的卷须(它们对应于图 26(b)的利用). 汇齐两柱游戏的等价关系使我们得以假定:没有短卷须的接合点必位于内部的三处或更多,因而一切最简形式的两柱葡萄藤都能简化成开勒司葡萄藤的复合物. 图 30 是从第 4

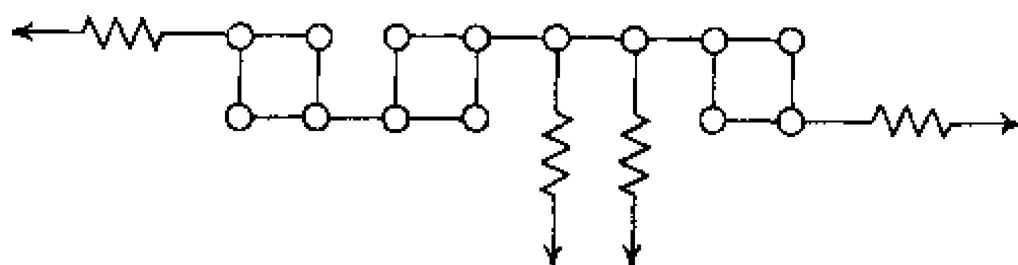
章及第 15 章选录过来的两柱游戏小辞典. 图 26 的等价关系可以帮助我们认识到,许多看来不像葡萄藤的图形实际上却与之等价;譬如说,图 31(a)即相当于 D_8.

开勒司葡萄藤, K_n		n	道森葡萄藤, D_n				其他两柱葡萄藤	
*	= *1	1	·		=	0	* * · · · *	
* *	= *2	2	· ·	=	*	= *1	* * * · · · *	= *3
* * *	= *3	3	· · ·	=	* ·	= *1	* * · · · * *	= *1
* * * *	= *1	4	· · · ·	=	* *	= *2	* * · · · · *	= *4
* * * * *	= *4	5	· · · · ·	=	* + *	= 0	* * * * · · · *	= *5
* * * * * *	= *3	6	· · · · · ·	=	* * *	= *3	* * * · · · * *	= *4
* * * * * * *	= *2	7	· · · · · · ·	=	* · · · *	= *1	* * * · · · · *	= *3
* * * * * * * *	= *1	8	· · · · · · · ·	=	* · · · · *	= *1	* * · · · · * *	= *3
* * * * * * * * *	= *4	9	· · · · · · · · ·	=	* · · · · · *	= 0	* * · · · · · *	= *3
* * * * * * * * * *	= *2	10	· · · · · · · · · ·	=	* · · · · · · · *	= *3	* · · · * · · · *	= *1

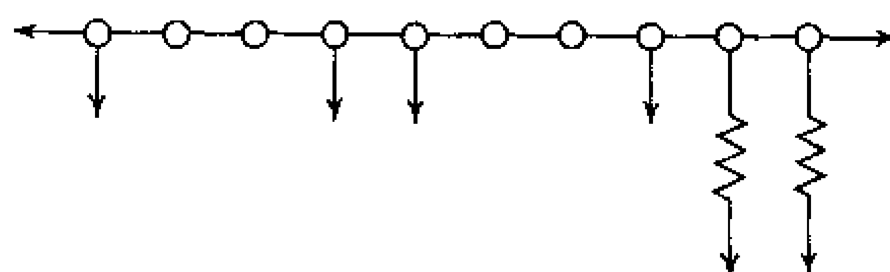
图 30. 各种葡萄藤的值.

所谓两柱葡萄藤正在分解,其意思是指:葡萄藤的任何一根桠枝被拿走后,剩下来的新藤就分解——通常用折断链的办法——为两个较短的藤蔓了. 一些其他藤蔓(其中也包括图 31(b))正在分解的意思也是照此理解. 从其子藤(其中也包括原有卷须的一切系列)的值来计算分解中的葡萄藤值相对说来是比较容易的. 由于此类子藤个数仅仅与卷须个数的平方成正比,因而此种想法对相当长的、分解中的藤蔓也是适用的,编写计算机程序也并不困难.

葡萄藤



(a) 与道森葡萄藤 D_8 等价的图形.



(b) 正在分解中的葡萄藤

图 31. 图 26 的两种应用.

(a) 爱维先走

(b) 爱维先走

(c) 道迪先走

计算链数

(d) 道迪先走

(e) 爱维先走

(f) 道迪先走

计算间数

(g) 道迪先走

(h) 爱维先走

(i) 道迪先走

计算牺牲品数

(j) 爱维先走

(k) 道迪先走

(l) 爱维先走

(m) 若省略最后的 6 间屋，爱维应该怎么办？

计算葡萄藤的接点数

图 32. 试解这些造房子难题.

同别的耐人寻味的小玩意一样，造房子游戏有着一个显著特点，它可以在不同层次，不同深度上来玩.

- 最初是亚瑟的玩法：别去打开任何房室，除非万不得已；即便如此，也要开得越少越好，看来许多做游戏的人只能达到这一水平.
- 然后是蓓莎的机灵终局技巧，它将使赢家在收场时得出一批房子，并使局中人认识到，尼姆串游戏可能对本游戏有用.
- 继之而来的是鹦鹉姑娘对付长链的奇偶法则.
- 于是我们认识到，得出正确的奇偶性是斯普勒格——格隆第理论的一个练习，所以我们需要尼姆值的表格.
- 这些表格应用起来非常笨拙不便，这就迫使我们去利用等价关系（只要有此可能），并找出可解析图形的趣味分类.
- 我们可以利用两柱游戏理论，把许多造房子游戏简化为一些熟知的开勒司与道森开勒司游戏的局势.
- 最后，专家们还想知道，在极少数情况下，当尼姆串理论并不能帮助造房子游戏来获胜时，他们还应掌握哪些重要的补充知识.

对图 32 的局势来说，你想怎么走呢？在本章增补材料中，我们将会提出一些建议.

增　　补

点数＋一箭双雕行动数* ＝轮数

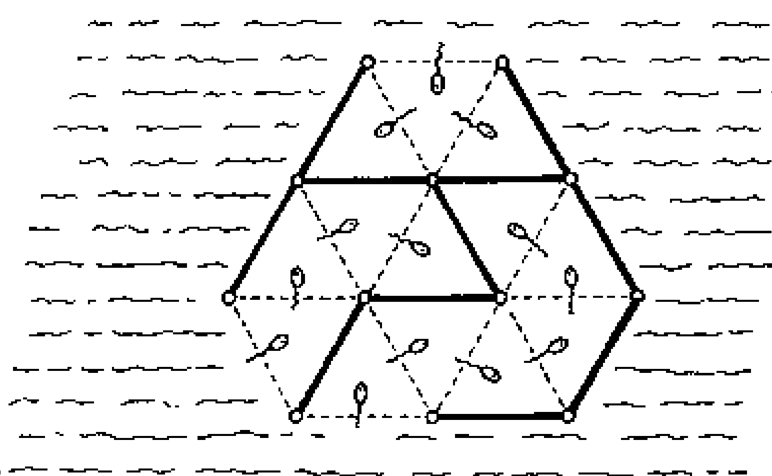
假定我们去做一个造房子游戏，开始时有 D 个点，经过 T 轮以后，画出 L 条线段，最后造出 B 间房子. 如果不存在"一箭双雕"行动，那么除了最后一笔以外，每次所画的一根线段要末造出一间房子，要末把下一轮引渡给对手，故有

$$L=B+T-1.$$

但图 33 表明

$$L=B+D-1,$$

因此不存在"一箭双雕"行动的造房子游戏，它的进行轮数正好等于开局时的点数. 然而每一个"一箭双雕"行动将一举造出 2 间房子，而不是 1 间. 因此一般说来，轮数应等于开始时的点数加上"一箭双雕"行动数.



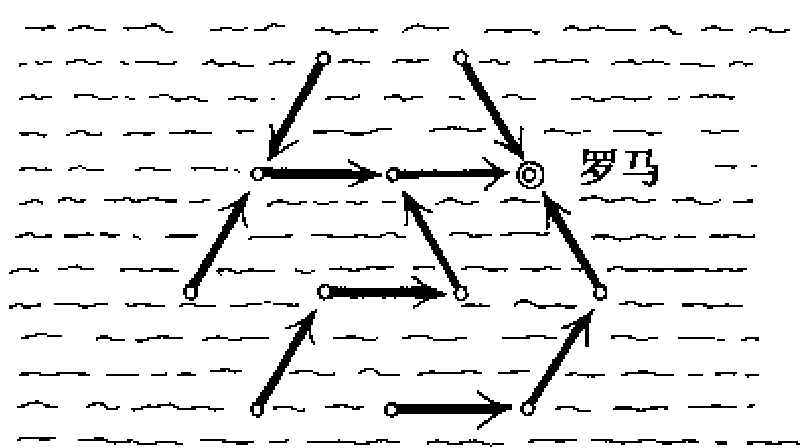


图 33. 拉德马赫与托普列茨对欧拉定理的奇妙证法**.

---

* 译者注：前已说过，一方面是蒙骗，另一方面则是上当.

** 译者注：见本章末页所附之"参考文献及进一步阅读材料". 普林斯顿大学出版社在 1957 年初版印出之《数学的乐趣》无中译本. 原书亦不易见到.

在 4 间房游戏中，道迪怎样取胜?

图 34 提供了一系列 $\mathscr{P}$-局势，它是一个充分条件，足以保证道迪赢得 4 间房游戏. 图 35 给出了所有的 $\mathscr{P}$-局势，除了那些已在房间里签上所有权的之外，其分类是按已走步数来算的. 图 36 给出了三个 $\mathscr{N}$-局势，作出牺牲的一方可以赢，不肯作出牺牲的一方要输. 在这些图形中，折断线表示已画好了三条边的房间.

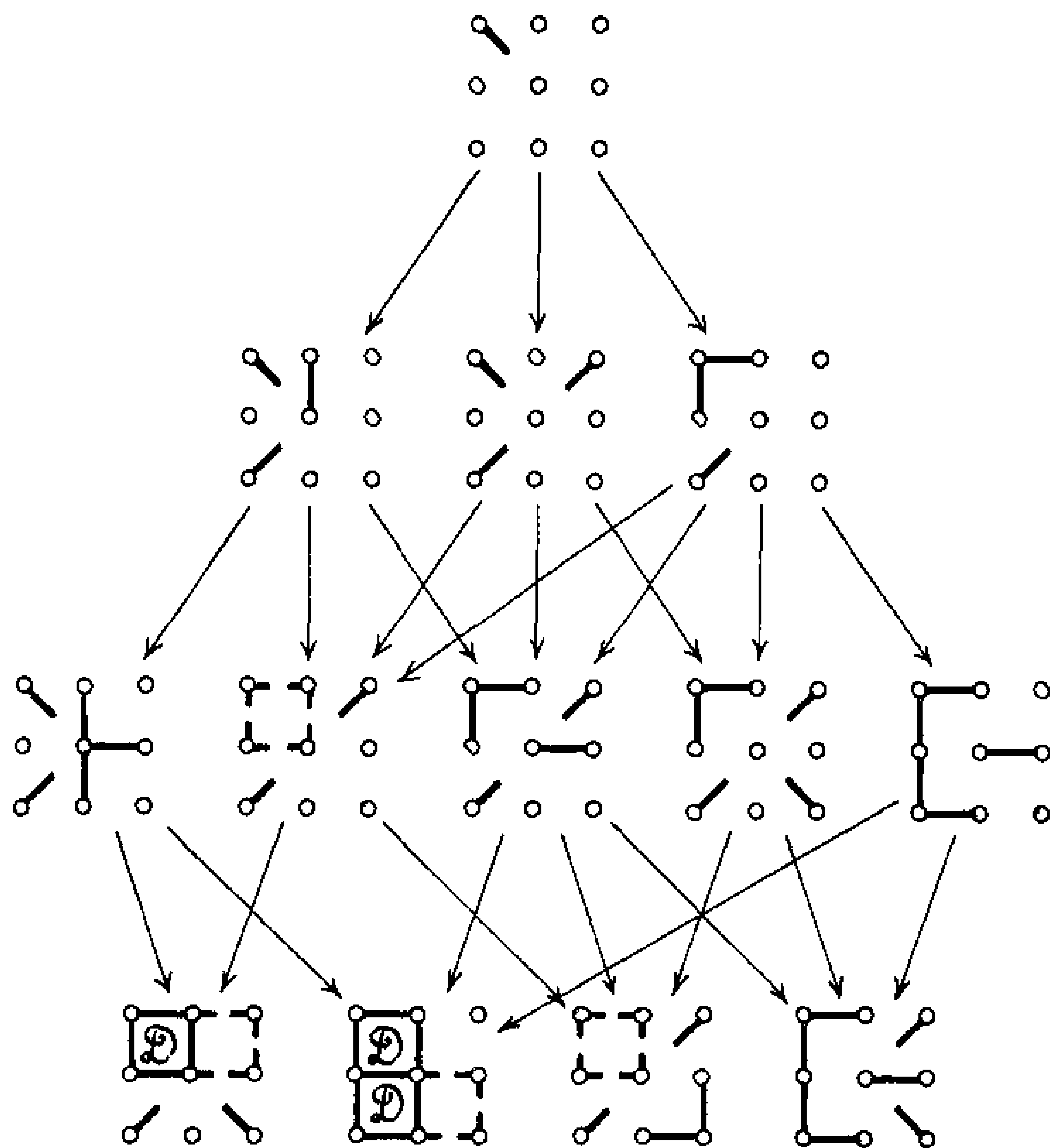


图 34. 道迪的取胜策略.

1 2 3 4 5 6 7 8

图 35. 4 间房游戏中的所有 $\mathscr{P}$—局势.

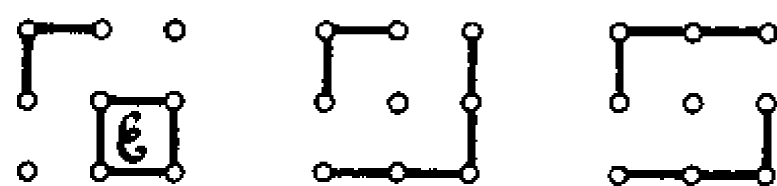


图 36. 三个狡猾的 $\mathscr{N}$—局势.

何时失控最好？

很明显，保持控制并非永远是一个好办法. 假定造房子游戏剩下 1 001 条链，每条长度都等于 3，而你的对手刚刚打开它们之中的第一条. 如果你死扣教条，坚持要保持控制直至最后的结尾，那么你就必须在每条链中放弃 2 间屋，除了最后的链之外. 这样一来，你就只能得到 1 003 间房，而你的对手却得了 2 000 间房.

归根到底的问题是：当你的对手开始打开一根长链或者给出一个半心半意的施舍时，你究竟是像蓓莎，放弃最后的 2 间房，还是像亚瑟，立即攫取它们的全部，而被迫在他处行动？假定有一个时刻，你用了蓓莎的战术，放弃 2 间房屋，以迫使你的对手在其他位置先走，企图通过玩得对头，比你的对手多赢得 D 间房屋. 而亚瑟的办法是取得这 2 间房，而在剩下的游戏中使你比对手少得 2 间房.

通过对比：

蓓莎的战术	亚瑟的战术
$-2+D$	$2-D$

显然你应该

> 采取蓓莎的战术，除非 D 小于 2.
> （D 等于 2 时，两种战术没有区别.）

这样去做，当然万无一失. 不过，倘若你不知道 D 的值，你还是不知道何去何从. 对此，我们无法提出一般性解法，但如果局势完全由长度为

$$a, b, c, \cdots$$

的长链组成时，我们可以告诉你一个给出 D 值的法则：

$$D=(a-4)+(b-4)+(c-4)+\cdots+4.$$

当右边得出正数时；否则 $D=1$ 或 2.

利用这条法则，我们就能回答问题，当局势全然由各种链组成时：

> 你应该保持或设法取得控制，除非有偶数个众多的短链，没有长链；或者长链可分解为两个集合，而每个集合中链的长度均小于 4.

长链匮乏时，有关控制权的入门知识

当然，对此类局势来说，所谓维持或取得控制，意味着要采取蓓莎的战术，如果这样做将剩下偶数个未打开的短链的话；否则就应采取亚瑟的战术.

图 37(a)给出了一个局势，由于爱维的感觉不是很好，迄今总是保持着控制，这样就牺牲了三间房. 可是，道迪如今却笨拙地画了一笔(见图 37)，从而打开了一条其长为 4 的链. 由于剩下的长链满足了上述“入门知识”中的例外条件，于是爱维的最佳对策(图 37(b))是选择**失控**，像亚瑟那样，捞取了链中的 4 间房.

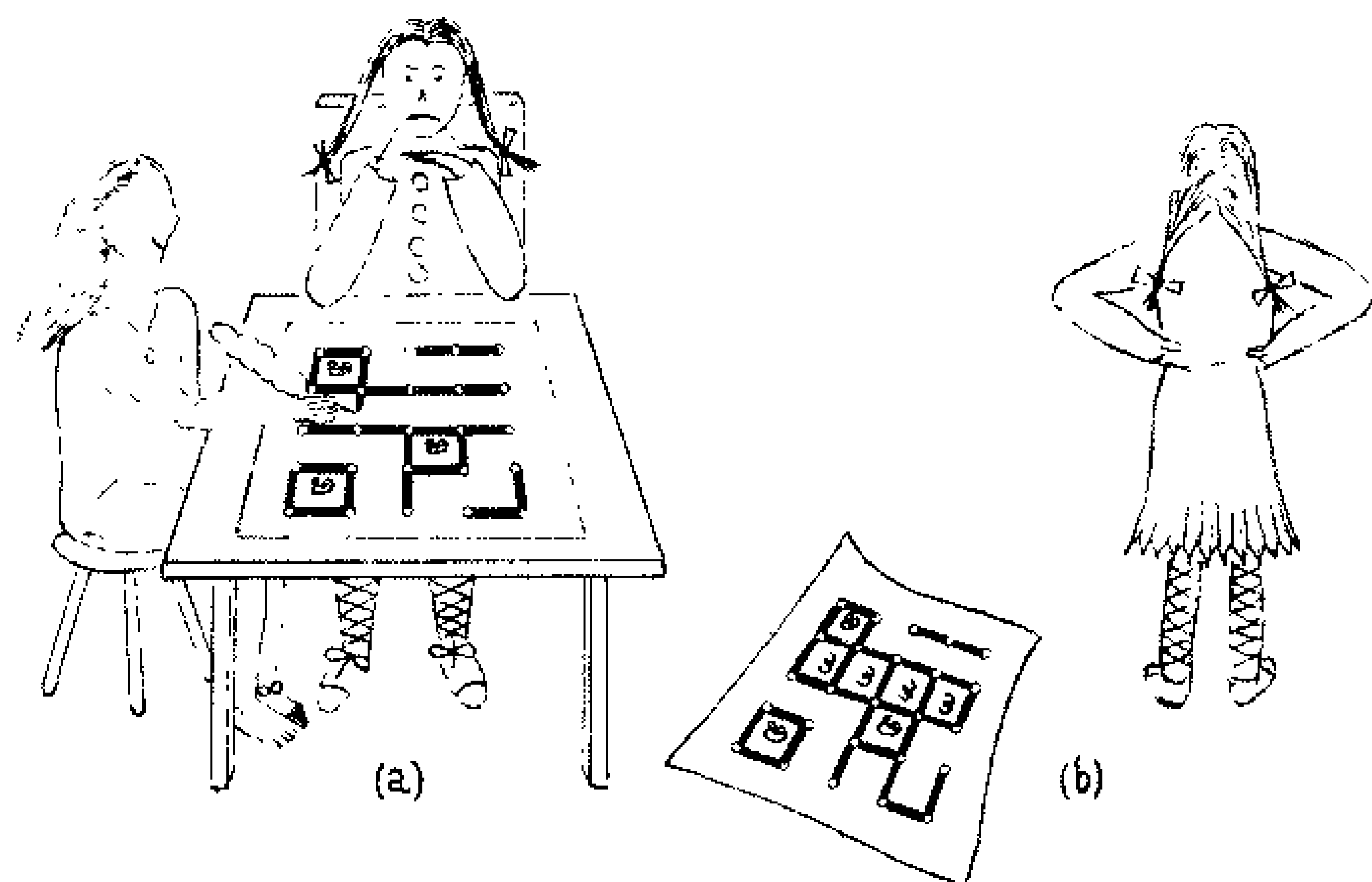


图 37. 道迪走出劣着，爱维则宁可失控.

房间数的分配如下：

		4一链	三根 3一链				
爱维		4	2	2		8 对 8	不分胜负，
道迪	已有 3 房＋		1	1	3		

但若采取蓓莎式的办法，则房间数的分配如下：

爱维		2	1	1	3	7 对 9
道迪	已有 3 房＋	2	2	2		

那么爱维就要输了.

计算葡萄藤的值

在由两柱葡萄藤与长链组成的大多数图形上，一个尼姆串上的取胜策略实际上总是能使造房子游戏取胜. 设 V 为分离的葡萄藤株数，计算时把长链视为不相连接的葡萄藤. 不要用图26(a)去把葡萄藤分解成具有长主干的藤蔓——而是让 I 表示这些内部有长主干的藤数. 又设 J 为接点总数，L 是尼姆串输家的目前得分. 我们现在来研究任意两轮*中的下列数量

$$f=L+2J+2V,\ g=I+2L+3J+4V.$$

考虑输家的行动以及赢家的应答，房间数视为在那个行动中放弃的，而不是在下一个行动中放弃. 先来看尼姆串赢家的动作：

在以下部位上的动作	各有关数据的变化 I	L	J	V	f	g
主干	0	$\leqslant 2$	-2	1	$\leqslant 0$	$\leqslant 2$
内部卷须	$\leqslant 1$	$\leqslant 2$	-1	0	$\leqslant 0$	$\leqslant 2$
终端卷须	$\leqslant 0$	$\leqslant 2$	-1	0	$\leqslant 0$	$\leqslant 1$

再看尼姆串输家的动作：

在以下部位上的动作	各有关数据的变化 I	L	J	V	f	g	包括赢家的应答 f	g
主干	0	0	-2	1	-2	-2		
内部卷须	$\leqslant 1$	0	-1	0	-2	$\leqslant -2$	$\leqslant -2$	$\leqslant 0$
终端卷须	$\leqslant 0$	0	-1	0	-2	$\leqslant -3$		
赢家必须接受的愚痴主干动作	$\leqslant 0$	0	-2	1	-2	$\leqslant -2$	$\leqslant -2$	$\leqslant 0$
赢家必须接受的愚痴卷须动作	$\leqslant 1$	0	-1	0	-2	$\leqslant -2$	$\leqslant -2$	$\leqslant 0$
愚痴链上动作(赢家谢绝)	0	2	0	-1	0	0	0	0
愚痴主干动作(赢家谢绝)	$\leqslant 0$	2	-2	1	0	$\leqslant 2$	0	$\leqslant 2^{\dagger}$
愚痴卷须动作(赢家谢绝)	$\leqslant 1$	2	-1	0	0	$\leqslant 2$	0	$\leqslant 2^{\dagger}$

---

* 译者注：每人走一次视为一轮，请注意它与中文用法的差异.

(没有一种愚痴的链上动作是赢家要接受的,因为他只要谢绝,就可以使值不变.)下一列直至最后一列表明 f 决不会增大,从而有:

> 如果在本游戏中,结点数 N 超过 $4(J+V)$,则尼姆串的赢家可以在造房子游戏中取胜.

$\left(\text{因为在游戏结束时,输家的得分将小于}\frac{N}{2}.\right)$

由于一切道森葡萄藤,许多两柱葡萄藤的每个接合点都有四个以上结点,它们是满足这一条件的.如果 g 永不递增,则我们可以类似地作出断言,即尼姆串策略也能适用于具有

$$N>I+3J+4V$$

的两柱葡萄藤.但带有剑号(†)的 g 值可以是正数,因为一位有高度技巧的输家有时仍可在造房子游戏中获胜.

不过此种情况极为少见.尼姆串输家使 g 值增大的唯一办法只能是选择一种愚痴的主干或卷须动作,而尼姆串赢家必然谢绝(绝大多数愚痴动作则可以接受).通常赢家总有其他机会去减少 g 值,他只要在一个终端卷须上采取行动或者走出一步使牺牲数少于两间房子的行动就行.

尽管少见,可是我们还是能够举出若干例子(例如图 32(m)),此类实例的编造难度以及双方比分的接近更加强了我们的下列看法:

> 在造房子游戏中,你所采取的最好对策十之八九可以在尼姆串策略中找出.

愚痴终端游戏是 NP 难度的*

如果你面对的是一个所有的边都在长链上的局势,你将在尼姆串游戏中输掉,因为只有愚蠢动作可取.不过,如果你已经得到了许多间房屋的话,你还是有望赢得造房子游戏.那么,你究

---

* 译者注:计算机科学术语,NP 是非多项式(Non-Polynomial)之缩写.本书第 7 章增补材料中曾讲过.

竟应当找出何种愚蠢动作以防止对手赶上来呢?

为了叙述简洁起见，我们可以假定，最后的动作是在一条链（两头均是接地）上作出的. 此链的长度足以保证你的对手在剩余的一些房间中所取的最佳策略是尼姆串策略，即要求每轮都由他来收尾（除最后一轮之外），用的都是“一箭双雕”之笔划. 你在任何一个有 m 步的孤立环圈上所走出的行动都会给你 4 间房，而在链的其他 n 步处（除最后一个之外），每个都给你 2 间房，因而你的得分将是

$$4m+2n-2.$$

假定图形有 j 个接点，总“价”为 v(每个接地端视为 1 价). 在孤立环圈上的行动不会改变“价”数，但在链上的行动则将在每个终端处使“价”减 1，只有一种情况除外，即接点的“价”从 3 减为 2 时，该接点顿告消失. 此种情形对每一接点只能出现一次，从而

$$v=2n+2j$$

而你的得分将是

$$4m+v-2j-2.$$

由于 v,j 是固定不变的. 所以我们尽可能在孤立环圈上采取行动，多多益善. 这些孤立环圈互不连接，而任何环圈的不连接集合都可通过先走链上动作而使之孤立.

除非你能掌握在一个任意图形(可能是非平面图)中找出结点不相连接的环圈的最大集合的办法，你就不可能掌握(有可能是广义的)造房子游戏的全部诀窍.

然而，在任意图形中，找出结点不相连接的环圈的最大集合，人们已经知道，其难度很大，属于 NP 问题的范畴(参看第 7 章增补材料).

一组造房子难题的解答

下面给出我们对图 32 中一组难题的解答:

(a) 爱维需要偶数个长链. 她只要在左上角随便连起哪条边即可制造出两条长链.

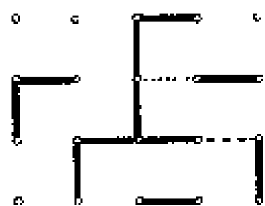
(b) 这一次，爱维要用牺牲一间房子(它的左下角是位于图中心的一点)的办法来建立起两条长链. 在左下角还得牺牲一间房于；如果道迪企图在那里建立第三条长链的话.

(c) 道迪需要奇数个长链. 她可以采用硬心肠的施舍(从图上的中心点向右画一划)方式牺

牲两间房子.最后以 9 对 7 的比分获胜.

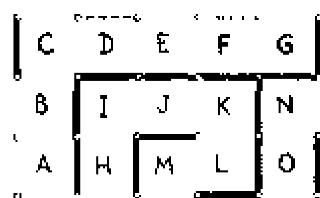
(d) 任何一方都承担不起中环的四间房损失,所以长链学说实际用不上去.任何一方都能打成平局(无需作出牺牲).一局玩得比较高明的残局将在顶部与底部有着长度为 3 的链,而在中央有一个 4 的环.左面可能是一条长度为 4 的链或者长度为 1 与 3 的两条链;不论什么情况都是平局.

(e) 对尼姆串玩家来说是一个小小的陷阱!图上打着点线(……)的走法是唯一的尼姆串好着,但牺牲太多,对付极其高明的对手时,将会以 5 对 7 的比分输掉造房子游戏.打着虚线(……)的走法将在尼姆串游戏中输掉,但若在下一轮对方牺牲两间房时,盘面上将分裂成众多小块,最后可打成平局.



(f) 尼姆串游戏实际上已经无戏可唱,而造房子游戏的关键是要看左上角是否出现一条长度为 2 的链,还是两条长度为 1 的链.道迪将在顶行上画出第二边以迫使前一种情况出现,她最后将以 13 对 12 的比分获胜而不是以 12 对 13 的比分告负.

(g) 道迪需作三倍牺牲!她需要偶数条长链,但仅能着到一条.她的点线式开局威胁着要在下一步形成一条 EFG 长链.由于可以防止爱维制造第三条长链,她必须在 F,G 之间切一刀(画上一划的意思——译者注),这就牺牲了两间房.接受这些后果之后,道迪走出图上虚线式的一步来重复其威胁(CDE 处形成长链),从而迫使爱维牺牲 D,E.道迪又接受了这些应对,第三次提出威胁,其办法是画上了 B 的左面一笔.尽管爱维可牺牲 B,C 而赢得了尼姆串游戏,但道迪却得了八间房:F,G;D,E;B,C;N,O;足以保证她在造房子游戏中获胜了.



(h) 爱维的做法也类似!从顶上的第二条边开始直到最后一条边,她不断威胁着要在右面建立起第三条长链.道迪只能用每次 2 间房,一共三次的牺牲来阻止她的企图.爱维然后走出一步愚蠢动作,让出长度为 3 的链到被对方拿去的 2 间房的左而,从而在相应的一箭双雕动作后捞到 2 间房.由子她目前已同对手改变了位子,她现在成胁着要在左上角建立起另一条长链,边

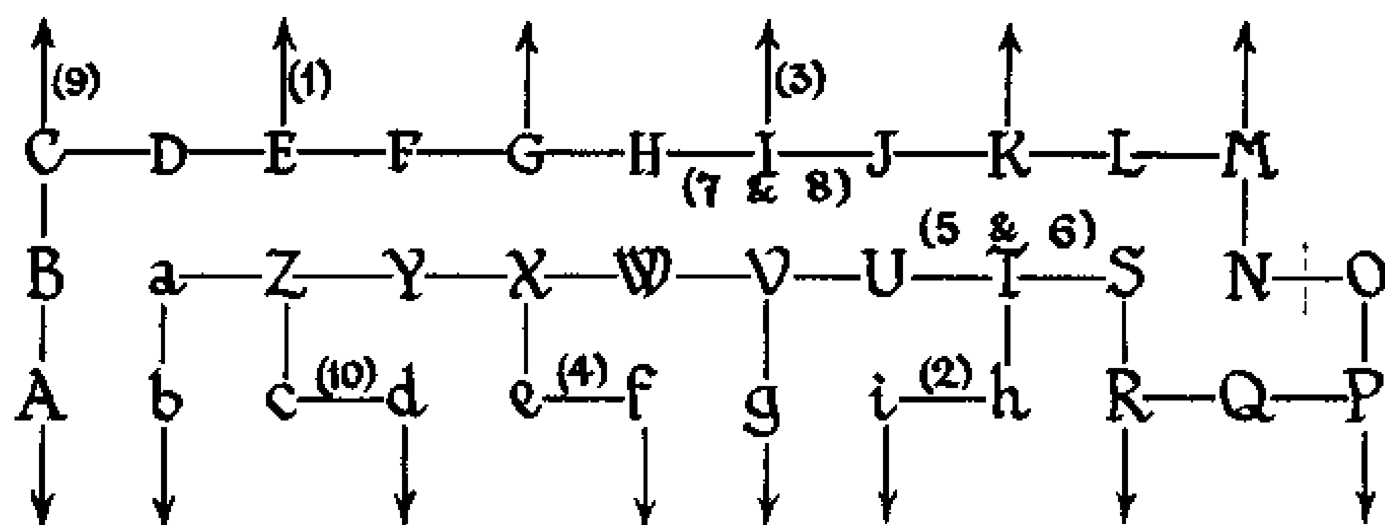
使道迪作出进一步的牺牲. 然后她停止了长度为 9 的链的进一步增长，心安理得地捞进她最后的 3 间房，结果以 13 对 12 的比分获胜.

(i) 此局极为复杂. 道迪必须阻止在顶行形成第三条长链. 她首先牺牲顶上角落里的诸房间之一(有可能需要更多的牺牲)，在伸展其长链时小心翼翼地力图染指更多的空白房间. 如果爱维在随便哪根长链上作出过早的牺牲，道迪就照收不误.

(j) 此局甚为简易！有一个三联开勒司葡萄藤，其值为 * 3，左下角还有四间房，其值为 * 2，这些都可以从图 20 看出. 爱维只要画出中间顶上的一边或者下简最右面的一边，把 K_3 简化成 K_2(还有别的走法也能得出这一结果，但牺牲太多)，她就赢了.

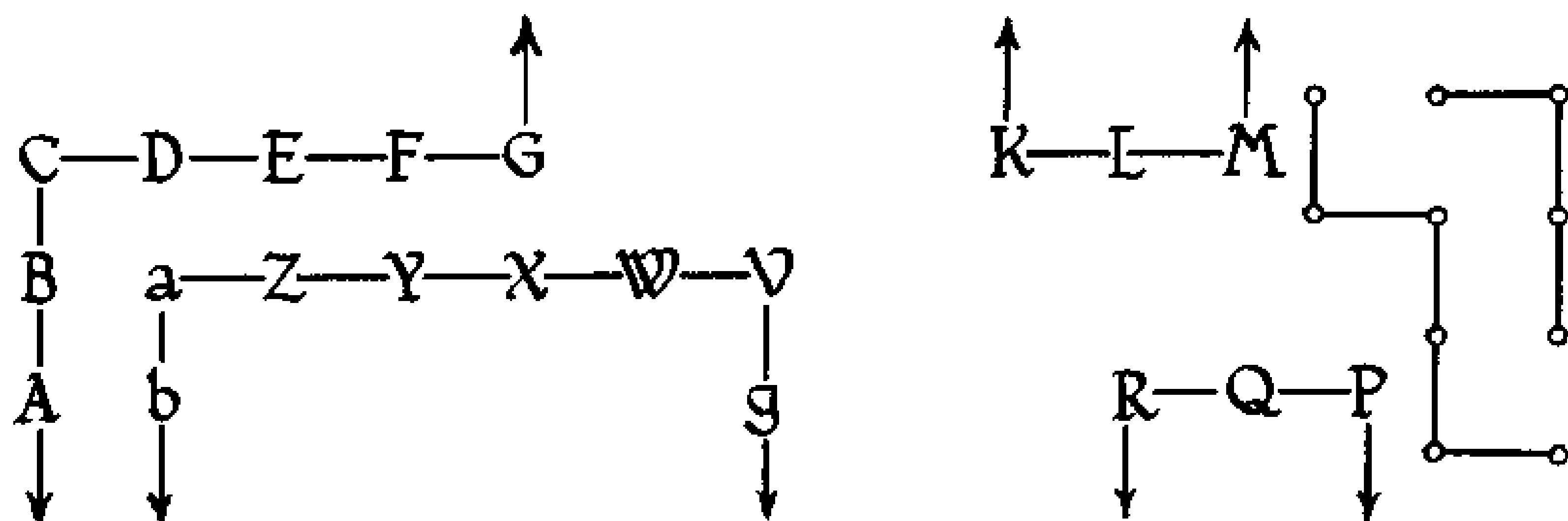
(k) 由图 20 可见，此图存在着一根 4 联开勒司葡萄藤，其值为 * 1(在底部)，在右上部分有四间房，其值为 * 3. 其余部分是一根 5 联开勒司葡萄藤，其值为 * 4，它虽有伪装掩盖，但你只要仔细对照图 26(a)，(b)，就不难识破. 于是道迪的尼姆串走法必然会将 K_5 代之以 K_3+K_1，做到这一点的办法，她只能是在左上角画出一条垂直边，或者把正处于已有归属的房间右面的闭环予以孤立. 在本问题中，如果道迪玩得很小心谨慎的话，则她的尼姆串策略可以帮她在造房子游戏中取胜. 如果她有几个尼姆串走法可以选择的话，她应当选择一个得分最多的. 在开勒司萄萄藤中，任何主干行动(不管哪一方去做)最终都会导致另一长链的出现，它将会再给爱维二间房. 所以只要有可能的话，道迪应尽量采取卷须行动，简爱维则尽量采取主干行动，以便使道迪用更多的主干行动来应答.

(l) 只存在唯一的一种取胜走法！在 N 与 O 的联结线上切一刀，把 12 联开勒司葡萄藤切成两根 5一联的藤蔓. 余下来的问题就轻而易举了！



(m) 在这修正问题中，如果爱维真正佩服道迪的本事，她应该放弃这一局. 如果她像从前一样，由牺牲 N,O 开局，道迪应使 E 不接地. 于是爱维面对的是 $K_3+K_1+K_5$，尼姆串策略的应答将再多给道迪两间房 e,f 或 h,i，譬如说是后者吧(第 2 步). 于是道迪让 I 不接地(第 3 步)，留下

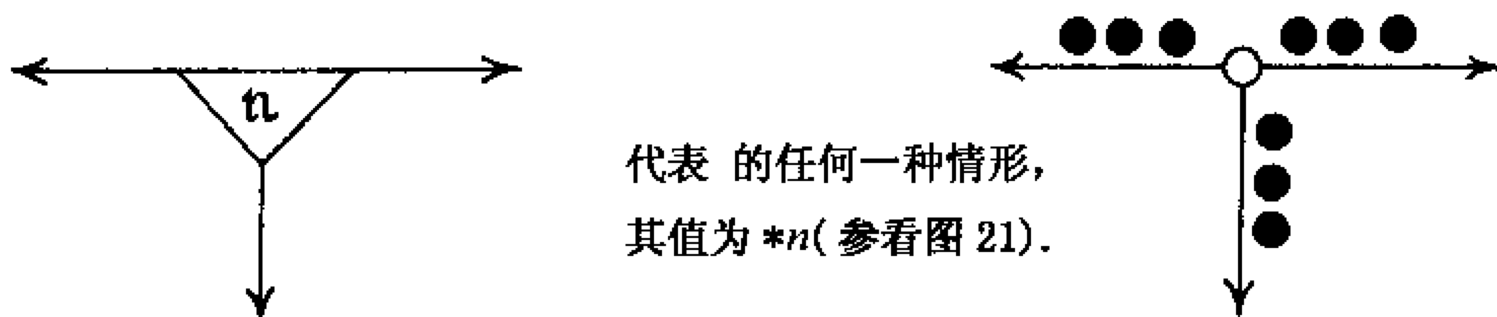
$4K_1+K_3$,对此,爱维的办法是也送给道迪两间房.譬如说,e,f 吧(第 4 步),别的办法不会比此法更好.爱维手里现在有 $6K_1$,已赢得了尼姆串游戏了.但道迪在 STU 走出一步"愚蠢"动作(第 5 步),对此,爱维只好谢绝,又少了两间房.道迪又可以 HIJ 上走出另一个"愚蠢"动作(第 7 步),从而又可捞到两间房(第 8 步).最后,在第 9 步上,道迪可以使 C 不接地,把 $2K_1$ 化简为 K_1,这将使爱维在第 10 步上牺牲 c,d(或 a,b).这样一来,所形成的局势



将有五条链,长度分别为 3,3,4,7,8.但爱维目前只有 2 间房,而道迪有 12 间.虽然在剩下的链中,爱维可捞到 17 间房,而道迪只有 8 间,道迪还是能以 20 对 19 的比分,以一分之差获胜!为了避免出现这种不光彩的结局,我们建议爱维采取一种胆小的开局法,例如使 E 不接地之类;这种做法是可以理解的,因为道迪未必能记牢前面九个开勒司值的!

为你提供更多的尼姆串值

下面图形的体例还是同图 21 一样,写在边上的黑点代表任意个数的附加结点,与两边等距离的黑点可以放在任意一边,一条波浪形线表示在所指出的两点间有着 3 个或更多个结点.记号



代表 的任何一种情形,其值为 $*n$(参看图 21).

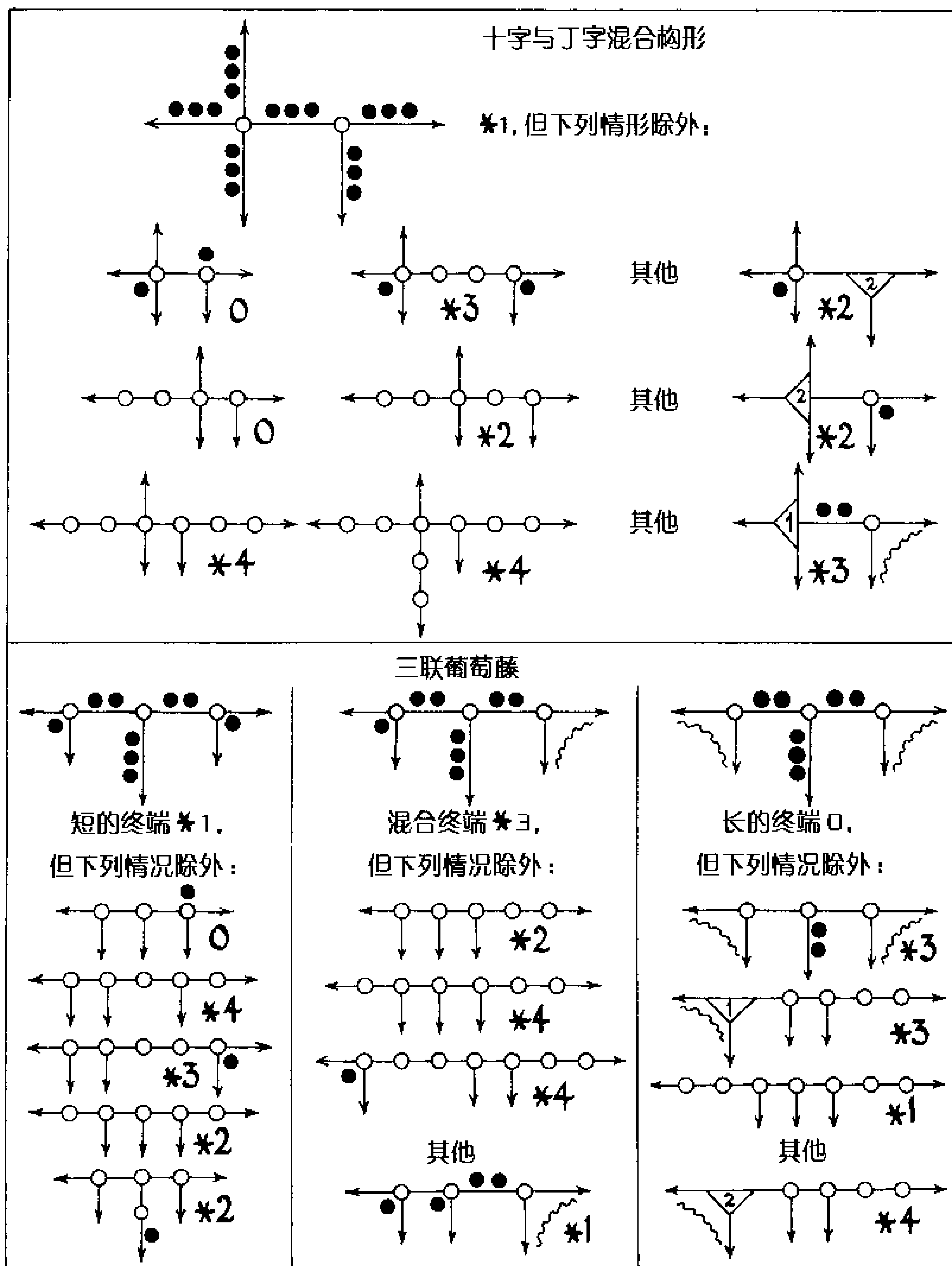


图 38. 尼姆串辞典的续篇.

尼姆串阵列的拧数

矩形阵列的各边有时是接地的，为了表示它们的大小尺寸，我们用写在数字右上角的一撇或二撇来标记，例如：

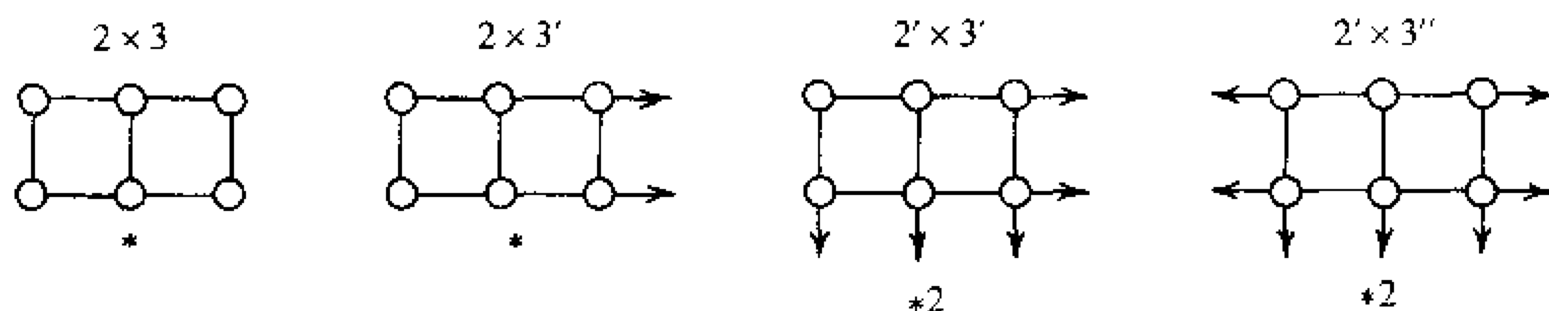


表 1 与表 2 给出了此类矩形阵列的值：

	1′	2	2′	3	3′	4	4′	5	5′	6	6′	7	7′	8
2	*	0	*2	*	*	0	*2	*	*3	0	*2	*	*3	0
3	*2	*	*2	*	*2	*	*2	*						

表 1. 不接地或仅有一侧诸边接地的矩形阵列的尼姆串值.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$1' \times n$	*	*2	*	*2	*3	0	*3	0	*	*2
$1' \times n'$	0	*	0	*3	*2	*3	*2	*5	*4	*5
$1' \times n''$	*	0	*	0	*	*2	*3	*	*3	
$2' \times n$	*2	*2	*	*	*					
$2' \times n'$	*2	*2	*	*						
$2' \times n''$	0	*2	*5	*						

表 2. 一侧、二侧以及三侧各边接地的矩形阵列的尼姆串值.

图 39 给出了一些比较不规则的矩形阵列的尼姆串值.

我们已经看到，可以在任意图上玩尼姆串游戏；下表给出了一些较小的完全图 K_n 以及完全二分图 $K_{m,n}$ 的尼姆值：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_n	0	*	0	*	*				
$K_{2,n}$	0	*	0	*	0	*	0	*	0
$K_{3,n}$	*	*	*	*	*	*			
$K_{1,n}$	0	*	0	*					

0 * * *3 0 *

* * *3 * 0

0 0 *3 *3

* 0 0 *

图 39. 各种阵列的拧数.

现在提一个问题:$K_{m,n}$的值是否仅仅取决于$(m-1)(n-1)$的奇偶性?

参考文献及进一步阅读材料

John C. Holladay, A note on the game of dots, Amer. Math. Monthly. **73**(1966)717—720; M. R.

Hans Rademacher and Otto Toeplitz, "The Enjoyment of Mathematics", Princeton University Press, 1957. Pages 75—76 give the proof of Euler's theorem.

第17章

点与芽

他不能活下去，劣迹斑斑，我诅咒他该死.

——威廉·莎士比亚，《朱利叶斯·凯撒》，Ⅳ.i，6

这里要讲的游戏是要同涂在纸上的点（或叉）打交道，走法是用一条曲线联结两点，曲线必须满足游戏规则所安排的条件. 我们将永远要求，任何曲线都不得穿过自身或与别的曲线相交. 我们正打算用整整一章篇幅来讲述这种游戏，但其中某些游戏的理论（它们并非都肤浅，或者都不完善），每种只占寥寥数页. 唯一的例外是刘卡斯他游戏，因为我们深深爱上了它.

轮缘

这个游戏的走法甚为简单，只须画出一个闭环，通过任意几个点，但至少必须通过一点. 唯一的限制条件是，任意两个闭环不准相交. 图1是一个典型的轮缘游戏局势. 在正常游戏规则情况下，我们的下一步该怎么走呢？

仔细检查这个局势之后，我们看到，一些闭环将平面分割成若干区域，它们分别含有5，2，3，1，1个点（有时还有包含内点的其他区域）. 当我们在具有 n 点的区域内走一步时，我们将自动把它分割为含 a 点与含 b 点的两个区域，此处 $a+b$ 要小于 n，此外 a，b 可以任意. 人们随即领会，轮缘游戏其实只是尼姆游戏的一种伪装形式，不过再增添一种可能性，即把一堆东西再分作较小的两堆而已. 按照第4章所述的八进记法，它就是 $\mathbf{0\cdot\dot{7}}$ 游戏，这时我们看到，额外增添的可能性并未影响对

策，所以图 1 中唯一的正确走法是在含 5 个点的区域中画一个闭环，使之通过其中的 4 个点. 反常尼姆游戏理论告诉我们，在反常轮缘游戏中，正确走法恰恰也是如此. 一般说来，我们的走法应使点计数的尼姆和为零，除非在反常形式中，倘若每个点计数为 0 或 1 时，我们应使尼姆和等于 1.

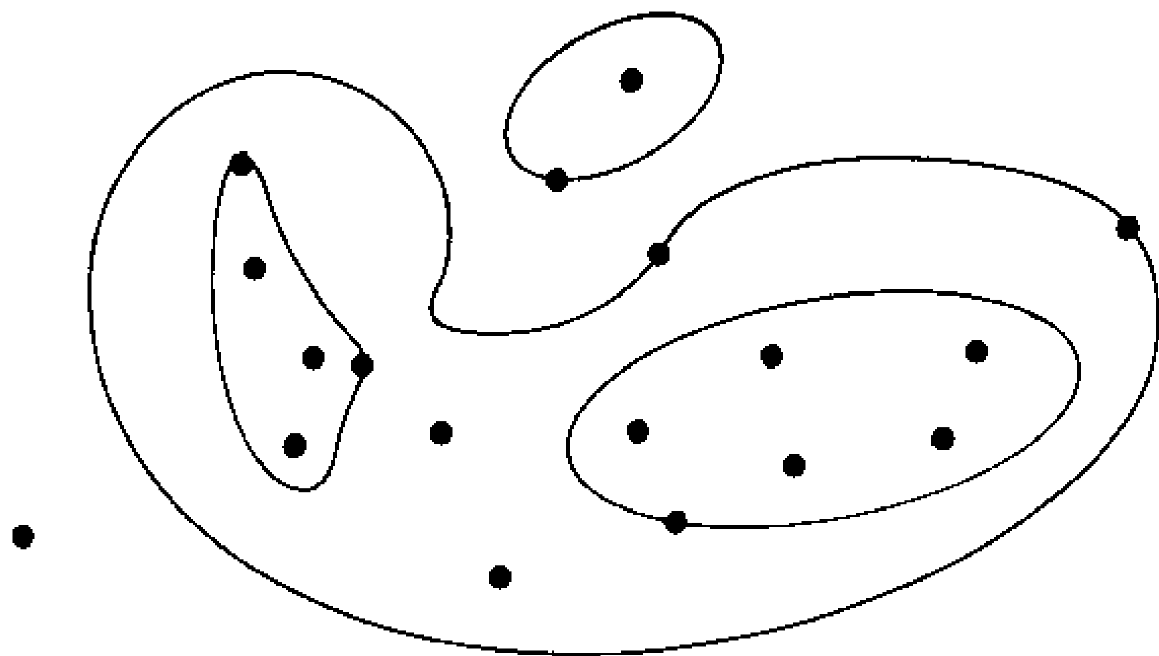


图 1. 轮缘游戏(或围栏).

围栏

让我们要求：闭环必须正好通过一点或二点，其他规则同轮缘游戏一样. 此时，在图 1 中我们应当怎样行动呢? 一个 n 点区域中的合法行动将产生有 a 点与 b 点的区域，而且我们要求 $a+b=n-1$ 或 $n-2$. 由于这些走法完全吻合开勒司游戏中的合法走法，因而我们的走法可从该游戏的理论中推出. 对图 1 所示的围栏游戏而言，不论正常或反常情况，该理论告诉我们，正确走法应是在含 5 个点的区域中画出一个穿过其中一点的闭环.

别的八进游戏也可改头换面，巧妙地乔装打扮成点与闭环游戏，而我们发现，大多数人喜欢按照这样的方式来做游戏. 几何形式的游戏通常能够极其自然地提示特殊规律，但所提示的规律有时却不太适合于用几堆东西来做的游戏. 下面再讲两个例子.

环与枝

本游戏的走法是联结两个点，或将一点联结到它自身以便形成闭环. 一个点不能在两个不同的步子里包括进去. 本游戏实际上同八进游戏•**73** 同构，而后者我们已在第 4 章中(附表 6)计算了它的尼姆值，在第 13 章中(增补材料，附表 5，注解 A 及 T，蝰蛇游戏)计算了它的简化形式，

下列附表 1 中的模式将可无限地继续下去：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
尼姆值	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	…
简化形式	0	1	2	3	2+2	3+2	2+2+2	3+2+2	2+2+2+2	3+2+2+2	…

表 1. 环与枝游戏的尼姆值与简化形式.

所以，我们在正常形式与反常形式的游戏中都有了完整策略. 在这两种情形中，我们的正确走法是应使各尼姆值的尼姆和等于零，除非在反常形式中，如果每个区域至多只有一点，则应使尼姆和等于一.

等高线

此游戏可谓分外有趣. 走法是要画一个闭环(或等高线)，使它不多不少地穿过一点，次要条件是，每个闭环至少要有一点严格位于其内部(也可以在另外一些等高线的内部). 换言之，如果我们把局势看成是画在地图上的一族等高线的话，每座山都必须有峰(而每座山谷都必须有它的底).

在本游戏中，我们必须区分两类区域：一种是，只含 n 个点，别无其他东西(n 型)；另一种是，除了 n 个游离点之外，还含有一个或一些有内点的等高线($\hat{n}$ 型). 但是，$\hat{n}$ 型区域中等高线的数量与结构是无关紧要的，而且，在计算 n 时，等高线中的内点也不予计算. 譬如说，图 2 有五个区域，其类型分别是$\hat{5}$，5，$\hat{3}$，3，2. 那么，下一步我们该怎么走呢？

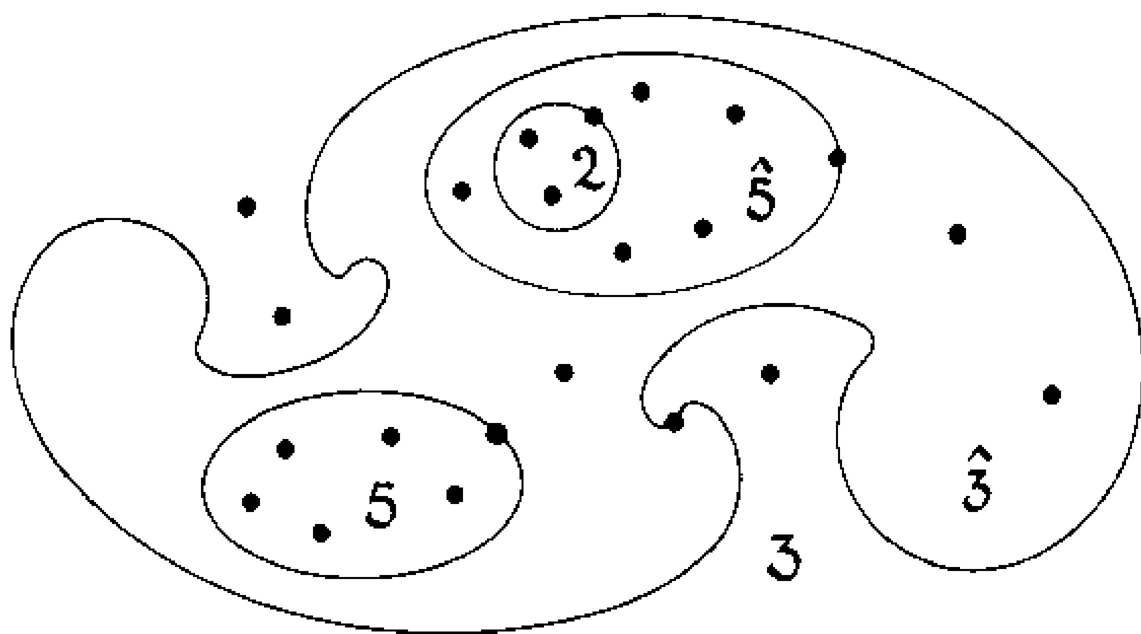


图 2. 等高线游戏.

在一般性局势中，可供利用的走法是：

$$n \text{或} \hat{n} \quad \text{到} \quad a+\hat{b}(a>0)$$

$$\hat{n} \quad \text{到} \quad \hat{a}+\hat{b}$$

在每一种情形下都有 $a+b=n-1$. 所以我们可以编出一张尼姆值表格，有如表 2 那种样子：

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
$\mathcal{G}(n)$:		0	1	0	1	0	3	2	0	5	2	0	1	4	3	2	0	5	2	3	1	…
$\mathcal{G}(\hat{n})$:	0	1	2	3	1	4	3	2	0	5	2	3	1	4	3	2	0	5	2	3	1	…

表 2. 等高线游戏的尼姆值.

我们看到，在 $n \geqslant 12$ 时两个尼姆序列完全吻合，其周期都是 8. 所以在正常游戏的情形，n 点的开局状态是一种 $\mathscr{N}$—局势，仅当 n 等于 1,3,5,11 或 8 的倍数时除外. 我们还未找到一个反常游戏的完整分析，但表格 3 给出了一种属类分析的开始（详见第 13 章）.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n 的属类		0	1	0	1	0	3	2	0	$5^{057}_{A_1}$	2^{2}_{C}	0^{3}	1^{0}	4^{146}	3^{3}	2^{20}	0^{1}
$\hat{n}$ 的属类	0	1	2	3	1	4^{146}_{A}	3	2	0^{1}_{B}	$5^{057}_{A_1}$	2^{2}_{D}	3^{3}	1^{0}	4^{146}	3^{3}	2^{20}	0^{1}

表 3. 等高线游戏的局势属类.

$A=2_2321$，$B=A_2A_1321$，对每一个局势. 如果它的一切数字都 $\leqslant 10$，则若假定 $A+A=B=0$，$C=D=2$，可准确计算其属类.

在图 2 所示的局势中，尼姆值是 4,0,3,0,1，所以我们必须走这一步：把尼姆值 4 改变为 2. 而这只能通过把 $\hat{5}$ 区域变成 $\hat{3}$ 与 $\hat{1}$ 两个区域才能办到. 所以我们必须画出一个闭环，使它围绕区域的内部等高线，并通过 1 或 3 个更多的点（至少在正常游戏的情形）. 在反常游戏的情形，最好对策正好碰巧是完全相同的.

刘卡斯他

这是一个由法国数学家刘卡所首先描述过的游戏，由于在此以前似乎不像有过专名，我们就称之为"刘卡斯他"来纪念他. 值得注意的是，我们居然能够得出从初始状态出发的正常情形与反常情形的完整策略，尽管一般理论是极其复杂的. 一旦发现之后，正常情形的策略很容易证明，可是反常情形的策略却真的不好对付.

游戏的走法是画一条曲线，将两个不同的点作为端点. 它们可以不是以前所作的一条简单曲线的两个端点（但它们可由一串曲线通过中间点而联结起来）. 任何两条曲线都不准相交，任

何一点都不能是两条以上曲线的端点，所以曲线必须串接成链或者形成闭环，而后者必须通过三点或者更多的点.

如同前面的游戏一样，闭环将平面分割成连通区域，但如今这些区域内的形势将需要一个三数组(a,b,c)才能充分描述. 此处的a为原子或孤立点的个数，b是联结两个孤立点的桠枝数，c是三个或更多的点通过一系列的边串联起来的链的个数. 事实表明，一条链中所含的点数是无关紧要的，然两，必须把链（3 或更多的点）同原子、桠枝（1 或 2 点）区别开来.

游戏的走法可以分类如下：

aa：联接两个原子以形成一根桠枝；

ab：联接一个原子与一根桠枝，形成一条链；

bb：联接两根桠枝，形成一条链；

ac：添加一个原子以伸长一链；

bc：附加一根桠枝以扩展一链；

$c!$：联接链的两个端点以牵引一链.

由于牵引一条链要把区域一分为二，结果就要看它是怎样把剩下的原子、桠枝与链相互分开的. 例如，我们可以用$c!(a^3)$或$c!(ab)$，这意味着我们将把三个原子或一个原子与一根桠枝分到它们自己的区域里，当然也可以走出一种步子cc——就是联结两根链，以形成一条长链. 尽管同样的数果也可以用突然牵引其中的一条链（$c!!$）而达到，但前者却不要把区域分开.

正常刘卡斯他游戏的孩子式导引

我们真是好运气，因为我们为刘卡斯他游戏所算的尼姆值已经为最多只有一条链的所有局势的结果提示了一种模式，此根式已在表 4 中给出，其中(a,b)所对应的表中数字如下：

P　若$(a,b,0)$为一$\mathscr{P}$局势，从而$(a,b,1)$为一$\mathscr{N}$一局势；

$+$　若$(a,b,1)$为一$\mathscr{P}$局势，从而$(a,b,0)$为一$\mathscr{N}$-局势；

$-$　若$(a,b,0)$与$(a,b,1)$两者都是$\mathscr{N}$—局势.

请注意：在前四列之后，各列以周期 4 出现重复，而各行是交替出现的.

完整的分析也许很困难，但通过计算机帮忙，有可能表明b与c的尼姆值将以 2 为周期. 尽管如此，我们可以给出一个策略，在链数较小时，帮你取得本该你赢的一切局势的胜利. 这个策略同样也证明了表 4 的模式将要无限地坚持下去. 它利用了一些特殊的$\mathscr{P}$—局势：

$$(0,b,0),(1+4k,b,0),(3,2m,1),(4+2k,2m,0),(0,2m,2),\quad b,k,m\geqslant 0.$$

	$a=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$b=0$	P	P	−	+	P	P	P	−	P	P	P	−	P	P	P	−
1	P	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−
2	P	P	−	+	P	P	P	−	P	P	P	−	P	P	P	−
3	P	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−
4	P	P	−	+	P	P	P	−	P	P	P	−	P	P	P	−
5	P	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−
6	P	P	−	+	P	P	P	−	P	P	P	−	P	P	P	−
7	P	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−	−	P	−	−

表 4. 最多只有一条链的刘卡斯他游戏.

在一个局势里，倘若把链留下来，几乎总是坏办法，因为它们可以用各种不同办法来牵引.

我们的对手可以从一个特殊局势出发以便留下两条或更多条链，但办法不多. 倘若他联结两个桠枝以形成一链，我们即可直截了当地加以牵引；如果他联结一条桠枝到一条链上，那么我们可以联结另一条. 无论属于何者，其总体效用相当于除去两个桠枝. 唯一的其他情形是从$(3,2m,1)$走到$(2,2m-1,2)$的 ab 走法，对付这种走法，我们只要联结两个原子以得出局势$(0,2m,2)$. 表 5 中给出了我们对付至多只含一条链的局势的办法. 请注意我们已经完全验证了表 4 的

	$a=0,1,5,\cdots,1+4k$	$a=2$	$a=3$	$a=4,6,\cdots,4+2k$	$a=7,11,\cdots,7+4k$
$c=0$	$\mathscr{P}$—局势； 坏运气！ 希望对方疏忽出错	aa 给出$(a,b+1,0)$	aa 给出$(1,b+1,0)$	b 为偶数：坏运气！ b 为奇数：ab 给出$(3,2m,1)$，若 $k=0$. aa 给出$(2+2k,2m+2,0)$ 其他情况	aa 给出$(5+4k,b+1,0)$
$c=1$	c!!轻快地给出$(0,b,0)$或$(1+4k,b,0)$	c!(a)围绕一个孤立的原子：$(1,0,0)+(1,b,0)$	b 为偶数：坏运气！ b 为奇数：bc 给出$(3,2m,1)$	c!从桠枝中分开原子，$(0,b,0)+(4+2k,0,0)$	c!从桠枝中除一个外，分开所有的原子：$(1,b,0)+(6+4k,0,0)$

表 5. 怎样赢得刘卡斯他游戏.

正确性. 构成咱们的策略基础的尼姆值已列在表 6 中. 表中数字(a,b)为 $c=0,1,2,\cdots$, 给出了尼姆值序列;最后一对值永远无限重复下去,例如 13145 实际就是 131454545…的简写. 前五列中,每一个没有排印出来的行,其表中数字同 b 减去 2 时的表中数字是一样的. 我们已经证明,所有的 $\mathcal{N}$—局势$(a,b,0)$(但$(2,2m+2,0)$与$(6,1,0)$除外)都有着尼姆值 1, 一切 $\mathcal{N}$—局势$(a,b,1)$,除了$(0,2m,1)$,$(1,2m+1,1)$,$(5,0,1)$之外,尼姆值至少是 2.

	$a=0$	1	2	3	4	5	6	7
$b=0$	01	023	13145	10201	0351732	01023245	0245713101	13169498
1	023	01	124567	13132	1464601	02518189	230645	154578Xx
2	01	023	2356745	10401	0258589	046262Tt	06798	1316XTFf
3	023	01	15478967	13132	1567Xx	020101tFf		
4	01	023	2376945	10401	0278549t98	046292TfTt		
5	023	01	15498X67	13132	15696x6xX	020101fF		
6	01	023	2376X45	10401	027854Tt98	0462X2tSs		
7	023	01	15498x67	13132	15696T6xSxX			
8	01	023	2376X45	10401	027854F89			
9	023	01	15498x67	13132	15696T6xSxX			

X=10
x=11
T=12
t=13
F=14
f=15
S=16
s=17

表 6. 刘卡斯他游戏中局势(a,b,c)的尼姆值.

刘卡斯他游戏的反常形式

值得注意的是,我们仍然可从任意初始局势$(a,0,0)$出发,为反常刘卡斯他游戏给出一个策略. 这主要是由于获胜的局中人能够做到不让过多的链产生出来. 当然,有着许多条链的局势是极难加以分析的. 对于相当小的 a,b,c 值,我们当然可以算出种属,如同后文将要给出的表 9 那样,该表将告诉我们,完整的理论是极其复杂的. 事实上,表 9 首先被用来制作我们的其他表格与数据,然后才向我们提示一般的策略. 这个策略将在表 7、图 3、表 8 以及这些图表的注释中加以叙述. 表 7 的记法同表 4 一样,而模式也可继续下去.

表 7 给出了形如$(a,b,0)$或$(a,b,1)$的局势的结果,它是我们的策略之骨架. 讨论的剩余部分,绝大多数只是涉及表中的+. 首先我们要证明怎样从这些数字推出剩下的表中各数. 我们要利用三条原则:

(1) 表中数字(a,b)为 P,当且仅当它为非端点而且没有下列形式的表中数字:

P 在$(a-2,b+1)$中　　　　从$(a,b,0)$　　　　aa 到$(a-2,b+1,0)$
＋在$(a,b-2)$中　　　　出发的唯一　　　　bb 到$(a,b-2,1)$
或＋在$(a-1,b-1)$中　　走法为：　　　　ab 到$(a-1,b-1,1)$

(2) 表中数字(a,b)不可能为＋，如有下列形式的表中数存在时：

P 在$(a,b-2)$中　　因为　　$c!(bb)$　　自$(a,b,1)$　　$(a,b-2,0)+(0,2,0)$
P 在$(a-1,b-1)$中　存在　　$c!(ab)$　　到右边各　　$(a-1,b-1,0)+(1,1,0)$
P 或＋在$(a-1,b)$中　着以下　$c!(a)$或(ac)　局势：　$(a-1,b,0)+(1,0,0)$或$(a-1,b,1)$
P 或＋在$(a,b-1)$中　走法　　$c!(b)$或(bc)　　　　　$(a,b-1,0)+(0,1,0)$或$(a,b-1,1)$

此外，局势(0,2,0)，(1,1,0)，(1,0,0)与(0,1,0)可以不必考虑，因为它们必然维持 0 或 2 步.

(3) 表中的$(a,0)$不可能是＋，如果在$(a-4,1)$或$(a-6,0)$中有着一个 P 的话.（因为从局势$(a,0,1)$出发，我们可走到$(a-2,0,0)+(2,0,0)$，此后不管对手怎样走，咱们下一步可走到和$(a-4,1,0)+(0,1,0)$，这时(0,1,0)就不必考虑了. 我们也可以走到$(a-6,0,0)+(6,0,0)$，而今后我们将会证明(6,0,0)可以不必考虑，因为它等价于 0.）

	a=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b=0	+	–	P	P	–	P	–	P	–	P	–	–	P	P	–	–	–	P	–	–
1	–	+	P	–	P	–	P	–	P	P	–	+	P	P	P	–	P	P	P	–
2	+	P	–	P	–	P	–	–	P	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–
3	P	–	P	–	P	P	–	+	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–
4	–	P	–	–	P	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–
5	P	P	–	+	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–
6	P	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–
7	P	P	–	+	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–
8	P	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–
9	P	P	–	+	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–	P	P	P	–

表 7. 某些反常刘卡斯他局势的结果.

读者们现在可以只利用这三条原则，从表中的＋出发，验证附表 7 中所有记号的正确性，明显的事实是，每个记号都必须是 P 或＋或－，这是因为$(a,b,0)$与$(a,b,1)$不能都是 P 之故.

要验证表中的各个"＋"并非只是例行公事式那样简单，主要困难在于我们的对手企图制造两条或更多条链，而我们无法予以阻挡；或者局势变得复杂不堪，语言（或图形）都难以表述. 我

们策略的中坚(支持表 7 的骨架)将在图 3 中加以说明,它说明了后手怎样从以下各局势

$$(0,0,1),(1,1,1)=(0,2,1),(3,5,1),(3,7,1),(3,9,1),\cdots$$

中获得取胜之道. 这些局势对应于表 7 中的"+",除了两个 $\mathscr{P}$—局势之外. 我们之所以写作(1,1,1)=(0,2,1),因为一个单独的原子在游戏中的效应同一根桠枝是一样的. 为了同样的理由,我们已经系统地取代了图 3 中应当出现的局势$(1,b,c)$,改用与之等价的局势$(0,b+1,c)$来代替.

图 3 需要作一些进一步注解. 用打上双线方框围起来的局势代表的是可以直截了当地处理的 $\mathscr{P}$-局势. 其他 $\mathscr{P}$-局势都围以单线方框,它们的一切选择都表现在图上. 在图上,每一个未打方框的局势所表示的是 $\mathscr{N}$—局势,我们对它永远给出一个 $\mathscr{P}$-局势. 记号 $abcD$ 表示的是局势(a,b,c)与另一局势(犹如(0,0,1))之和,不论怎么玩法,它必须持续奇数步(通常是一步),而记号 $abcE$ 则表示(a,b,c)与另一局势(犹如(0,2,0)或(1,1,0))之和,它必须持续偶数步(通常是两步). 在后文的分析中,我们将永远假定这些奇数与偶数步是一步与零步. 最后,记号 $*abc$ 表示任何两个局势(x,y,z)与$(a-x,b-y,c-z)$之和. 若想把表格继续编造下去,可将 b 加上 2.

(7,3,1)与(11,1,1)两个局势,对应于表 7 中唯一尚未验证过的"+"号,我们将在表 8 中加以讨论.

剩下来的工作是要讨论图 3 中打上双线方框的局势.

定理 任意个数的形为$(0,b,0)$的局势之和,再加上一个必须持续 n 步的游戏将是一个 $\mathscr{P}$—局势,当且仅当:

要末 n 是奇数,而所有的 b 都是 0,1,2,或 4;

或者 n 是偶数,而至少有一个 b 不是 0,1,2 或 4.

证明. 局势(0,0,0)与(0,1,0)是终端局势,而(0,2,0)正好持续两步,因此所有这些局势可以忽略不计. 事实上,局势(0,4,0)同样也可忽视,因为我们永远可作出安排使之持续偶数步. 从(0,4,0)出发而持续奇数步的一系列游戏是

(0,4,0)到(0,2,1)到(0,1,1)到(0,1,0).

我们永远不需要走出从(0,2,1)到(0,1,1)的一步. 如果咱们的对手这样做,我们马上可以回敬他以从(0,1,1)到(0,0,1)的一步,而后者可使游戏额外地持续一步.

不考虑(0,4,0)以及永远持续偶数步的局势,唯一真正需要断言的是:诸局势$(0,b,0)$(其中每个 b 要末$=3$,要末$\geqslant5$)之和为一个 $\mathscr{P}$—局势. 从$(0,b,0)$的唯一走法是走到$(0,b-2,1)$,对此,我们可以走到任一局势$(0,x,0)+(0,y,0)$,但应满足 $x+y=b-2$. 不管对手怎样走,我们可用它来恢复到另一个被定理覆盖的局势,除非它是单一的局势(0,3,0),但我们的对手只能从后者走到(0,1,1),我们然后就走到(0,0,1),让它丢走最后的(失败的)一步.

000D *020D 030 020D
c!! c! aa c!(a) D aa c!
301 021D *300D 201D 030D 220 021D
D aa c! ac bb aa D ab
040D 301D 050 220D 050 040D
bc D aa c!! D aa c!!
311D 050D 330 221D 050D 240 041D
c!(a³) c!(bb)
bb aa D ab bb aa D ab
330D *070 240D 070 050E *070
c!(c) c! c!(a) aa c!(c) c!! D aa c!(c) D c!
341 332 071 251 *350 242 241D 070D 260 061D 052D *070D 071
bc bb aa ac c! ab bb aa D ab bc bb c! D
351 *090 260D 090 071D *090
bc c!! c! c!(a) aa c!(c) c!! D aa bc c!! D c!
361 352 091 271 *370 262 261D 090D 280 081D 072D *090D 091
bc bb aa ac c! ab bb aa D ab bc bb c! D
x = 11
371 *0x0 280D 0x0 091D *0x0
bc c!! c! c!(a) aa c!(c) c!! D aa bc c!! D c!

图 3. 反常刘卡斯他游戏的策略.



图 4. 反常等价为零的证明.

种属	名称	结构
1^{4313}	a	2_2320
2^{2020}	b	$a2_+30$
3^{0431}	c	$ba_1a2_{+1}2$
2^{1520}	d	$cb_1a_2a_1a2_+3$
1^{3131}	e	2_+20
0^{1202}	f	$ea2_{+2}321$
1^{4313}	g	$fe_1ba_12_{+3}2_230$
0^{5202}	h	$gf_1ecba2_{+2}3_21$
1^{4313}	i	$hg_1fe_1dcb_2a_12_{+3}2_20$
0^{5202}	j	$ih_1gf_1ed_1dc_2b_3a2_{+2}3_21$
1^{4313}	k	$ji_1hg_1fe_1d_2d_1dc_3b_2a_aa_12_{+3}2_20$
0^{0202}	a_a	$a_{22}a_3a_2a$
2^{2020}	l	$e2_+30$
4^{1464}	p	2_2321
5^{5757}	q	$pa3_243210$
6^{6846}	r	$qp_1pa_1a2_25320$
7^{7957}	s	$rq_1p_2p_1pa_2a_1a3_24321$
2^{1420}	t	2_+31
3^{3131}	u	$t2_+210$
5^{5757}	v	$ut_1pa2_{+2}43210$
5^{2057}	w	$ute2_{+1}2_+4310$

种属	名称	结构
0^{3131}	A	$pa3_221$
1^{2020}	B	$Ap_1pa_12_230$
0^{3131}	C	$BA_1p_2p_1pa3_221$
1^{5313}	D	$p2_+4320$
3^{6464}	E	$DAqp_1b2_{+1}2_2421$
1^{1313}	F	$2_+3=2_{+1}$
1^{2020}	H	F_+30
2^{0313}	I	$H0$
1^{1313}	J	$u2_+3$
2^{1313}	K	$ue2_+$
0^{0202}		$2_+, e_+, l_+, F_+$

$a=0$

	$c=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$b=0$	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	2	3	2	3	2	3	2	3
2	0	1	0	a	a_1	a	a_1	a	a_1
3	2_+	2	3	b	c	d	d_1	d	d_1
4	0	e	f	g	h	i	j	k	k_1
5	2_+	l	3^{04}						
6	e_+	1^3	0^{52}						
7	l_+	2^1							
8	0^0	1^2							
9	0^0								
10	0^0								

$a=1$

	$c=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$b=0$	0	2	3	2	3	2	3	2	3
1	0	1	0	a	a_1	a	a_1	a	a_1
2	2_+	2	3	b	c	d	d_1	d	d_1
3	0	e	f	g	h	i	j	k	k_1
4	2_+	l	3^{04}						
5	e_+	1^3	0^{52}						
6	l_+	2^1							
7	0^0	1^2							
8	0^0								
9	0^0								

$a=2$

	$c=0$	1	2	3	4	5	6
$b=0$	1	3	1	p	p_1	p	p_1
1	1	2	4	q	r	s	s_1
2	t	u	v	6^{686}			
3	l	w	4^{04}				
4	K	3^3	5^{16}				
5	1^1	5^4					
6	2^1	3^{203}					
7	1^2						
8	2^1						

表 9. 刘卡斯他局势的种属.

一个 $\mathscr{P}$—局势就行了.当原子数减少到正好在三个以上时,能把局势转化到(3,2n+1,1)的一方便是赢家.此时游戏将进入其第二阶段,而游戏便要遵循图 3 的路线.当局势变成一些局势(0,b,0)之和,其中只有桠枝(以及孤立的原子)留下来,这时便是第三阶段了(在一起的可能尚有一些简单肤浅的游戏局势).从此以后,获胜的一方可永远维持类似形式的局势,除非在将近本游戏收尾时,他应小心翼翼地把局势(0,3,0)转变为一条简单的链(0,0,1).

为了节省表 9 的地位,简写法同第 13 章所述者不同,在此表中

$$g^{a\cdots x}\text{的意思为}g^{a\cdots xyxy\cdots},\text{此处 }y=x\overset{*}{+}2.$$

此表不打算讨论或说明驯服性、烦躁性之类.在附表 9 下面的附注中,每个种属都给出了四个上标,即使周期开始得很早,此时后面两个上标就无限重复了.

	$a=3$							$a=4$		$a=5$		$a=6$		7	8	9
$c=$	0	1	2	3	4	5	6	0	1	0	1	0	1	0	0	0
$b=0$	1	0	2	A	B	C	C_1	0	3	F_+	H	0	2^3	1	0	0^0
1	F	3	D	E				1	3	0		I		1^1		
2	1							0	4^4	0^0						
3	J															

注:若 $c\geqslant 2b+2a$,则(a,b,c)有值 x_1,而$(a,b,c-1)$有值 x.

卷心菜;或者虫,毛虫,蚕茧

如果我们修改刘卡斯他游戏的规则,允许下列走法:可以作出一个闭环,使它只通过两点,并含有两条联结它们的曲线,这时我们将得出较为简单的游戏.我们将把孤立点称为虫,两点或多于两点的链称为毛虫,而闭环称为蚕茧.由于蚕茧把平面分割成若干区域,故而一般局势为各局势(b,c)之和,而 b,c 这两个参数分别为每个区域中虫与毛虫的个数.

事实表明,此游戏中局势(b,c)的性态同刘卡斯他游戏中局势$(0,b,c)$的性态极为相似,所以我们已经掌握了该游戏的解析.(利用刘卡斯他游戏的尼姆值表将,我们实际上能够分析正常情形下的任何局势.)特别,我们有下列断言:

初始局势$(n,0)$为一 $\mathscr{P}$　局势,在正常情形下,对一切 n,而在反常情形下对除了 0,1,2,4 以外的一切 n 全都成立.

约喀斯他

我们甚至可以得到一种更为简单的游戏，只要额外再增加一种走法：它将一个孤立点联结到它自身以形成只通过此点的一个闭环.

豆芽

此项游戏（前些时候曾由 M·S·帕德逊与 J·H·康威引进）有一种神奇特性，它的复杂性不可思议，居然达到这种程度，7 点游戏的正常结果迄今仍是未知数，即使只有 2 点的游戏也是够复杂的.

豆芽游戏的走法是用一条曲线联结两点，或将一点联结到它自身，曲线不得与以前画的曲线或点相交. 但画出曲线时，必须在它上面安置一个新的点. 任何一点都不能是三条以上曲线的端点.

典型的一局见图 5 所示，此处后走者的走法用虚线表示，由于新添的点子可以在以后的走法中被用上去，故而对同样的初始状态来说，豆芽游戏要比卷心菜游戏持续得更久，甚至不太明显它必将收场. 但是，有一个简单论证表明，始于 n 点的豆芽游戏实际上最多只能持续 $3n-1$ 步. 我们不妨以 3 点游戏为例. 每个点有潜在的三个曲线终端可以用上去，我们将称为它的三个**活力**，所以初始三点一共拥有 9 个活力. 但是每走一步时要从它所联结的两点各自取走一个活力（或从联结到它自身的一点中取走二个活力），而每添加一个新点却只有一个活力. 由此可见，每走一步就要减少一个活力. 由于诞生的新点在游戏收场时仍是活着的，所以走法总数至多只有 $9-1=8$ 步. 图 6 表明，即使只有 2 个点的豆芽游戏也是复杂得要命.

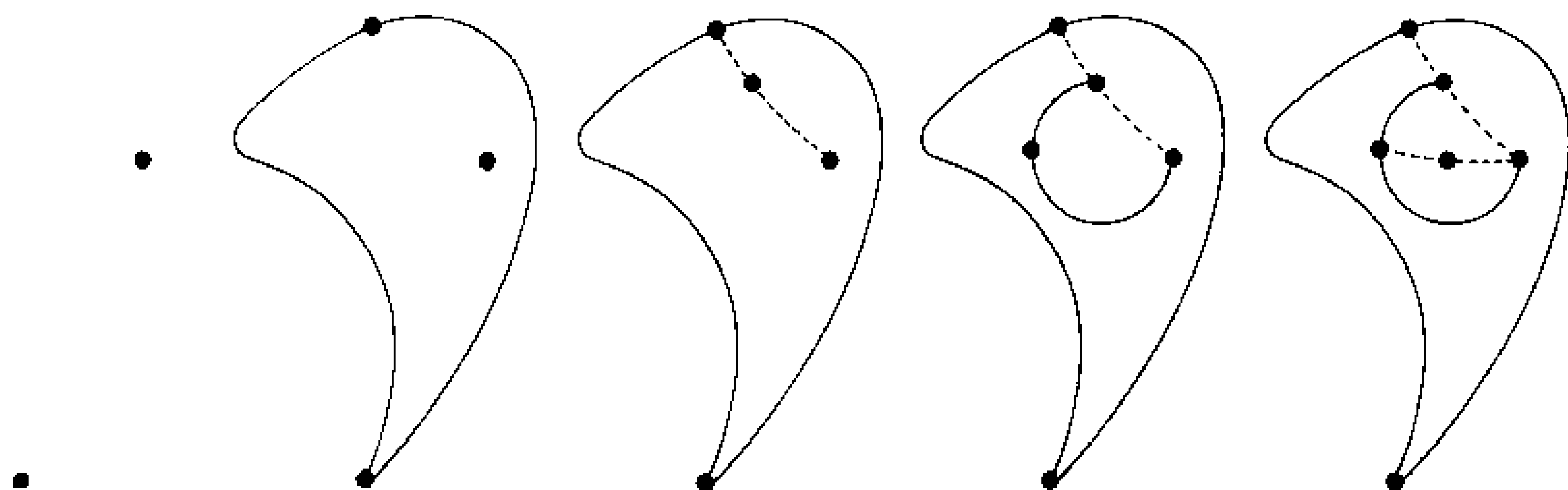


图 5. 一局简短的豆芽游戏.

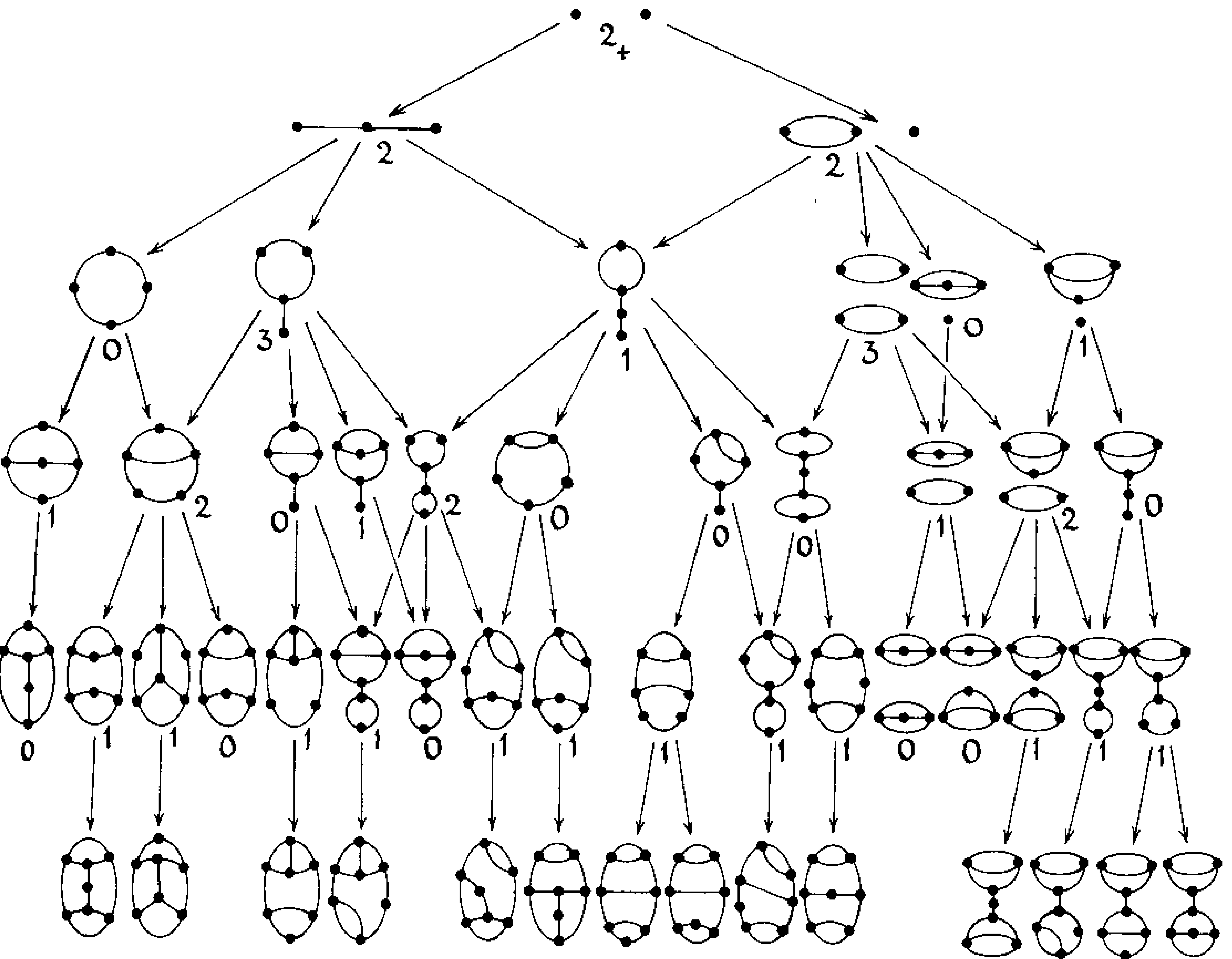


图 6. 两点豆芽游戏及其简化形式.

豆芽游戏的最有趣定理之一(这要归功于D·莫利逊与J·H·康威)是零阶没落基本定理(FTOZOM).我们将不在此处证明,但至少要说一说它.所谓FTOZOM定理断言,n点豆芽游戏至少要维持$2n$步;如果它恰恰持续这些步时,那么最后构形必然是由图7所示的一些昆虫聚合而成的.

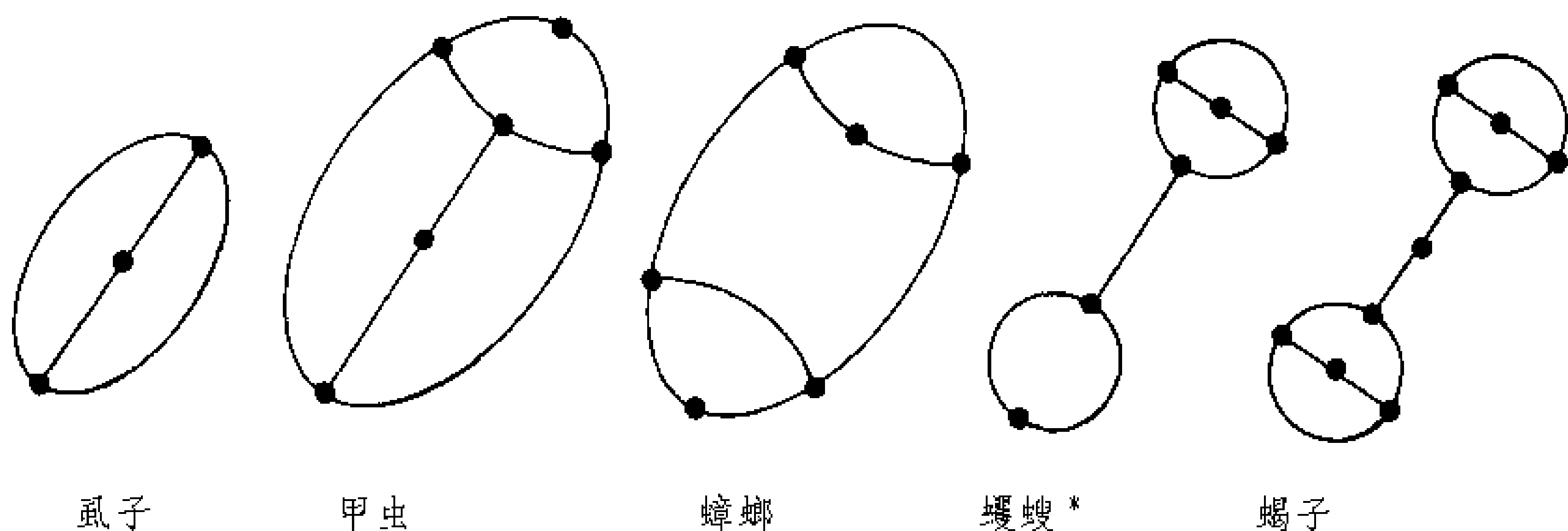


图7. 五种基本昆虫.

说得更确切一些,最后构形必须含有上述昆虫的一种(或者用某种方式被从里向外翻出来),传染上大量虱子(它们中的一些又可传染其他).一种可能的构形如图8所示——它含有一只从里朝外翻的虱子,后者又在一只由内向外翻的虱子的内部,感染着大量其他虱子!

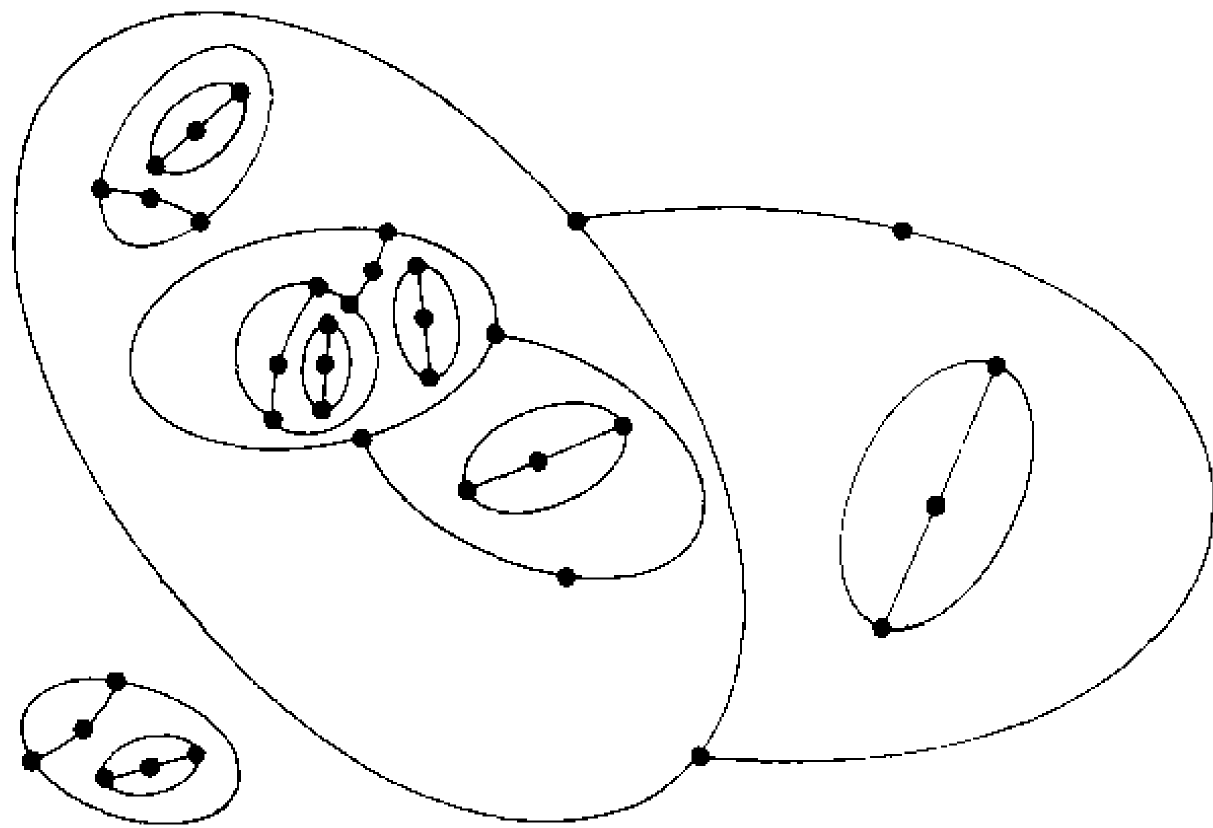


图8. 一局简短豆芽游戏的寄生虫结局.

---

* 译者注:也叫蠷螋,土蚣.

如果我们想做豆芽游戏的赢家，我们应该怎样来玩它呢？很明显，不管游戏是正常或反常形式，结局只取决于游戏的总步数是奇数还是偶数，所以从某种意义上看，取胜之道就在于控制步数. 现在，3 点游戏必须持续 6 步、7 步或 8 步. 但要它持续 8 步是极其困难的，因而真正的战斗是在 6 步与 7 步之间. 显然，更大的游戏也会发生同样的事情——一位局中人力图使游戏持续 m 步，另一位局中人则想把它拖到 $m+1$ 步，而其他一切数字则极不可能出现.

为了看看怎样控制步数，让我们检查一下游戏收场时的局势. 我们假定它是从 n 点开始，而持续了 m 步，最后的点数为 $n+m$，而在游戏收场时总的活力是 $l=3n-m$，这是由于我们从 $3n$ 个活力开始，而每步要减少一个活力之故. 在游戏收场时，每一个活着的点有两个死去的点作为其紧邻，而剩下的死点称为"法利赛". *（邻居的概念是相当灵活的——如在图 9 中，我们给出了两个死点与一个活点相邻的两种不同方式.）

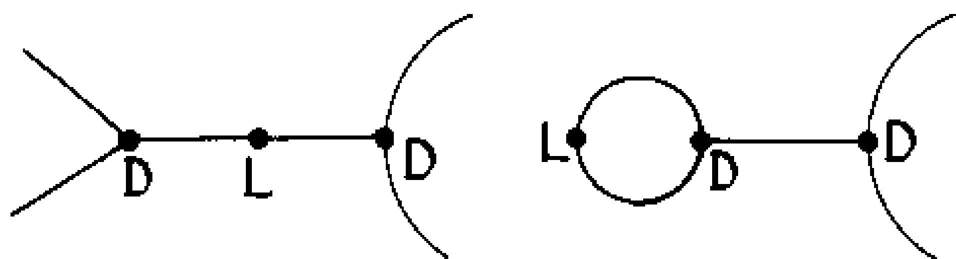


图 9. 两活点(L)及其死点邻居(D).

现在，没有一个死点能是两个不同活点的邻居，否则我们就可能联结这两个点而把游戏继续做下去，所以，法利赛的个数 ϕ 可由下列方程给出：

$$\phi=(n+m)-(l+2l)=(n+m)-3(3n-m)=4m-8n.$$

从而我们有**没落性**方程：

$$m=2n+\frac{1}{4}\phi.$$

由此方程，我们可以导出几点推论：

(i) 行走步数至少为 $2n$.

(ii) 法利赛数为 4 的倍数.

(iii) 若在游戏的任何时刻，我们能保证最后局势至少有 P 个法利赛，则游戏至少可以持续 $2n+\frac{1}{4}P$ 步.

在相反的方向也有一个(iii)的对应结果.

---

* 译者注：古代犹太教的一个宗派.《圣经》认为他们是言行不一的伪君子，伪善者.

(iv) 若在游戏的任何时刻,我们能够保证最后局势至少有 l 个活点,则游戏至多只能持续 $3n-l$ 步.

因此,根据我们以前的概念,一位局中人通过制造法利赛人,试图拖延游戏,而其对手则设法制造必然存活的点子而力图缩短游戏.

有一个相当有用的办法可用来估计在游戏收场时将要存活的点数.

如果由游戏里头的曲线所定义的任意区域有一个严格位于内部的活点,则在其后任何时刻,将会有一活点位于该区域的内部. 所以在图 10 中,如果我们愿意的话,可认为平面被划分为四个区域 A,B,C,D,而区域 A,B 的每一个都具有严格位于内部的活点. 在这些区域内所作的任意走法都会产生一个新的活点,所以在游戏收场时,A,B 都将含一个内点. 然而,我们不能断言 C,D 也是如此,因为它们的唯一活点位于其边界之上. 但若把 C,D 合并视为一个区域,那么这个新区域就正好有一个内点. 于是我们可以看到,游戏的最后局势中至少有 3 个活点. 它也有一个法利赛 P,因而(因为它从一个有 $n=4$ 点的初始局势演变而来),我们可以看到,它至多能持续 $3n-3=9$ 步,而至少持续 $2n+\frac{1}{4}=8\frac{1}{4}$ 步. 人们自然想像不出什么游戏能正好维持 $8\frac{1}{4}$ 步的. 于是我们断言,游戏的全部长度将是 9 步,而不管今后如何去玩!(实际上已经走了 6 步,所以还能继续走 3 步.)于是,它要么是一个先走者能赢的正常游戏,要么是后走者可胜的反常游戏.

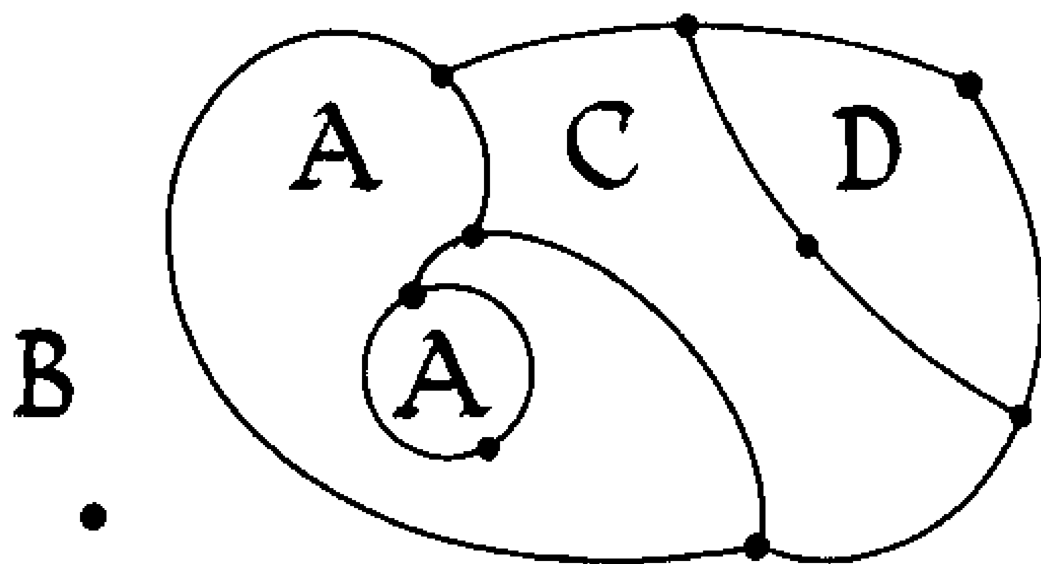


图 10. 具有一个法利赛的一局豆芽游戏.

利用了这些概念之后,人们很容易给出点数较少的游戏的分析. 现将我们已得到的结果列在表 10 之中,它们给出了赢家可安排的步数,使游戏一直进行到收场.

6 点正常豆芽菜游戏是 $\mathscr{P}$-局势的事实首先由丹尼斯·莫利逊(Denis Mollison)证出(为了赢一个东道),游戏的分析文章长达 47 页之多! 利用了上述概念之后,我们可大大加以缩短,但我们迄今还不能作出 5 点反常豆芽菜游戏的全部分析.

点数：	0	1	2	3	4	5	6
正常游戏：	$0P$	$2P$	$4P$	$7N$	$9N$	$11N$	$14P$
反常游戏：	$0N$	$2N$	$5P$	$7P$	$9P$		

表 10. 最小豆芽菜游戏的结果.

布鲁塞尔豆芽

下面是另一种游戏，它应当比豆芽菜游戏更为有趣. 我们从一些十字架出发，而不是从点子出发，走法是用一条曲线延长十字架的一臂. 此曲线应终止于同一十字或另一个不同十字的另一臂，然后在曲线上另外添画一个十字. 两只十字的布鲁塞尔豆芽游戏的玩法如图 11 所示. 玩过几局之后，技术老到的读者将有可能找出一种较好的开局策略.

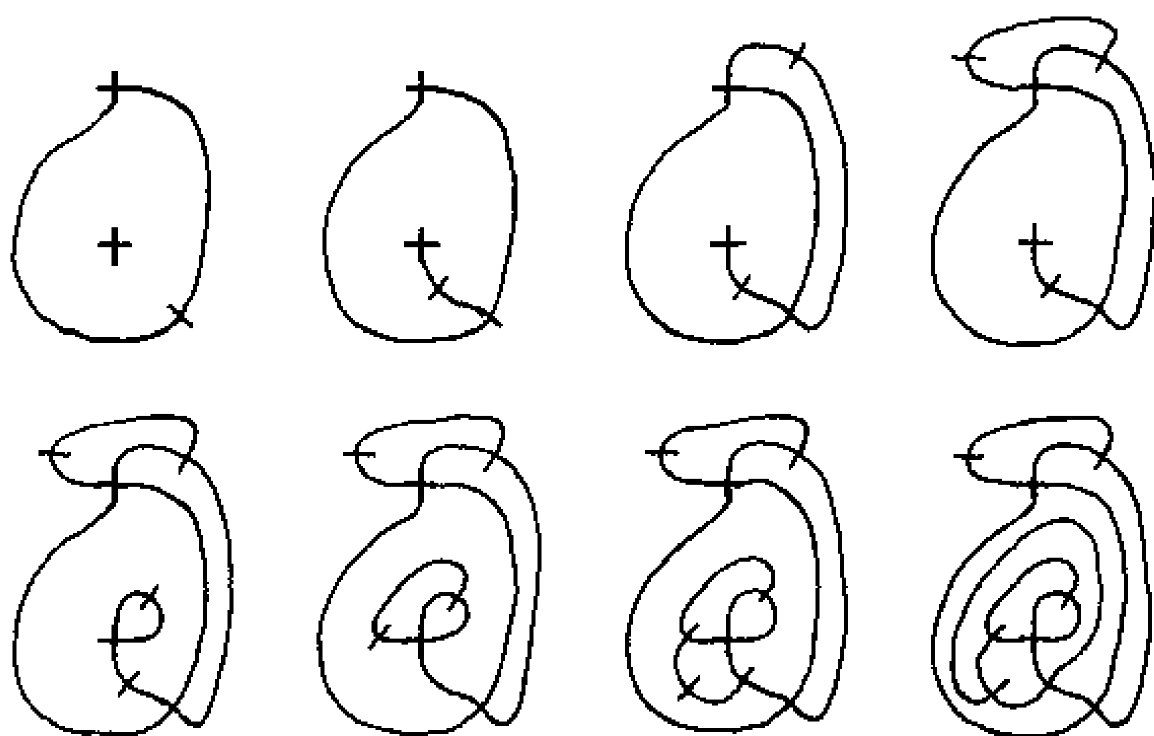


图 11. 2 只十字架的布鲁塞尔豆芽游戏.

星与条

设想我们在布鲁塞尔豆芽游戏中增加一种辐射条，此时人们自然而然地会想到可用任意数量的幅射条纹代替只有四臂的十字架，并将它们简称为条. 图 12(a)中给出了一种初始布局(5，5，4，4，3)，而在它的后面附上它的 3 步走法(图 12(b)). 在对它作分析时，可知该游戏成为区域的析取和，而我们可假定每一个区域只含星形. 一般来说，图形的连通部分中，如果正好有 n 条臂伸入要考虑的区域，则可视为区域内的 n 角星(即使区域的边界也作为星来计算). 在图 12(b)

中，我们已用数目字来标明区域中的星的大小. 单个星的游戏与八进游戏 **4·07** 同构，这是由于涉及"条"的一步实际上把一个 n 臂星形分成大小各为 a，b 的两颗星，且有 $a+b=n-2$. 此游戏的尼姆值（见第 4 章，表 7(a)，6(b)）是 $0.\dot{0}12\dot{3}$，而表 11 则说明了它的种属.

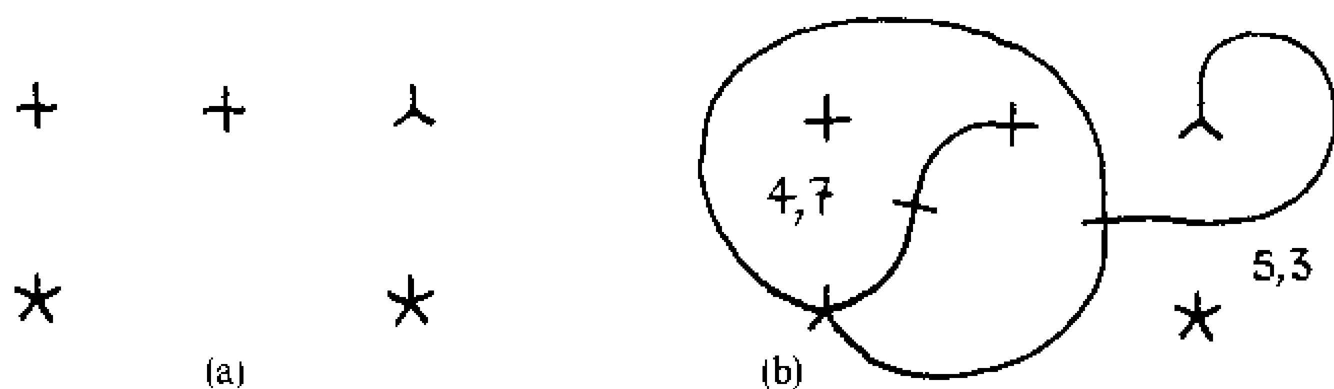


图 12. 一局星与条游戏.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n 的种属	0	0	1	2	3	0	1_a^{431}	2	3_b^{31}	$0_{a_1}^{320}$	1_c^{431}	2_d^{0120}

$a=2_7320$　$b=a_1a2_220$　$c=b_1ba_3a_12_220$　$d=cb_7ba_2a_1a3_23$

表 11. 星与条游戏中各局势的种属.

砍灌木

是另一种纸与笔游戏，在一些有根树上来玩这种游戏，当你砍去一边时，所有同它连接到地的边全都消失了，只剩下一些浮在空中的树枝，等待着给它们重新植根，如图 13 所示. 它的理论涉及尼姆游戏的另一种性质.

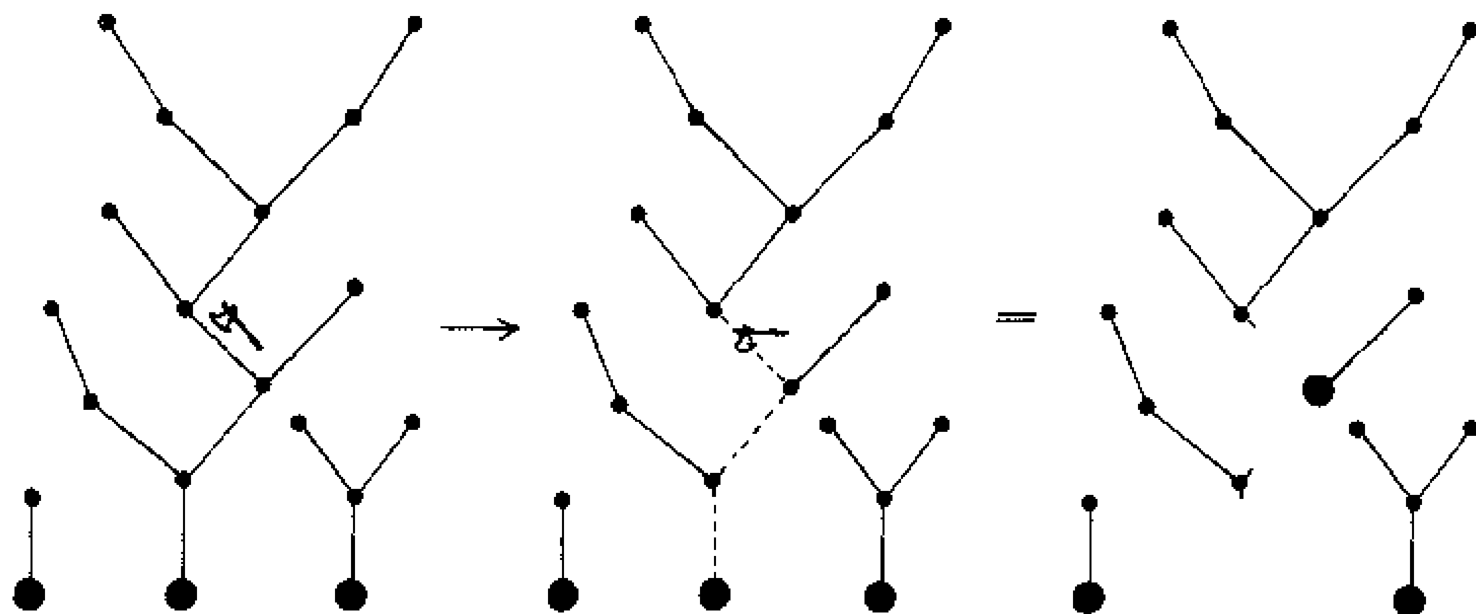


图 13. 砍灌木游戏的一步走法.

尼姆的遗传密码

倘若你告诉我,你目前处在某个尼姆值(例如9)的尼姆局势之中,并且可以走到很多别的尼姆值(例如有13个)的局势,那么我就能够告诉你,确切地说来(在本例中为0,1,2,3,4,5,6,7,8,12,13,14,15),这些尼姆值应该是什么!

为了看清楚原因,我们要扩展从增补材料到第7章的记法,其时单个的尼姆堆为

$$0_{\{\ \}},1_{\{1\}},2_{\{2,3\}},3_{\{1,2,3\}},4_{\{4,5,6,7\}},5_{\{1,4,5,6,7\}},\cdots.$$

一般情况为$n_{[n]}$,此处$[n]$代表**变更集**,是在一步行动中可能改变的尼姆值的集合.一个任意的尼姆堆的变更集$[n]$包含了一切数目,它们的最左一位二进数1在n的二进位展开式中是存在的,从而它可作为自

$$[1]=\{1\},[2]=\{2,3\},[4]=\{4,5,6,7\},[8]=\{8,9,10,\cdots,15\},\cdots$$

选取合适的并集而求得之.

例如,由于$13=1+4+8$,$[13]=\{1,4,5,6,7,8,9,\cdots,15\}$.

我们将认为,一局势具有**遗传密码** A,如果它同大小为A的尼姆堆有着同样的变更集的话.任何尼姆局势都具有遗传密码,因当你把局势相加时,你是在把它们的变更集求并.譬如说,5+12具有遗传密码13,因为

$$5+12=5_{\{1,4,5,6,7\}}+12_{\{4,5,6,7,8,9,\cdots,15\}}=9_{\{1,4,5,6,7,8,9,\cdots,15\}}=9_{[13]},$$

将9同变更集$[13]$的成员进行尼姆加法即可求得$9_{[13]}$.

"砍灌木"局势也有遗传密码!

在图14中,针对任何一边的记号$a_{[A]}$给出了树干为这条边的子树的值与遗传密码,在具有好几个分枝的结点处则给出了对应的子树之和的信息(一个孤立数码a的意思是$a_{[a]}$).一些数目的计算如图15,其中X是二进位展开式中有一个1的数(A,B,C中不论哪一个有一个1),因而

$$[X]=[A]\cup[B]\cup[C],$$

而Y是大于$a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c$(它能被整除$X+1$的那个2的方幂恰好除尽)的最小数.

假定X的二进位展开式为

$$\cdots ???0111\cdots 1(\text{以}k\text{个1结尾}),$$

图 14. 什么是获胜的走法?(参看增补材料).

图 15. 计算:值与遗传密码.

则 $a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c$ 将具有形如

$$\cdots\ p\ q\ r\ 0\ t\ u\ v\ \cdots\ z$$

的展式.

我们已经知道何以这些数字是图 15 中 Q 点以上的三棵子树之和的值与遗传密码的道理,所以我们只需证明

$$X+1=\cdots\ ?\ ?\ ?\ 1\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0$$

而

$$Y=\cdots\ p\ q\ r\ 1\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0$$

是树干为 PQ 的子树的值与遗传密码. 这棵树的选择具有尼姆值

$$a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c(\text{砍掉 } PQ) \quad \text{与} \quad a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c \overset{*}{+} \Delta$$

(对其第一个数码 1 存在于 X 中的任何数目 Δ). 特别,我们可以走到一切尼姆值 $\leqslant a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c$ 或同它只在最后 k 位有差异的值,从而我们可以走到一切小于 Y 的数,而它同 $a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c$ 在从右面算起的第 $k+1$ 位有差异,这就对应于 X 中最右边的零. 选择的尼姆值确切说来就是那些二进数,它们同 Y 的最左差异对应于 $X+1$ 中的一个数码 1,从而便是遗传密码.

冯·诺伊曼伐木游戏

在树图上玩时与下列游戏完全等价,其走法是删除一个结点,与它相联一直接到大地的所

有结点与边也统统删去. 为了把它转变为砍伐灌木游戏,只要在每棵树上增添一个新的树干. 通过一种窃取策略式的论证,冯・诺伊曼证明了一棵单独的树总是一个 $\mathscr{N}$—局势. 乌来拉(Ulehla)则给出了树图的明确策略,它推动了我们的讨论.

砍灌木游戏实际上即是 A+B 与 A:*的理论,而通常的伐木游戏则同 A+B 与 *:B 有关. 冯・诺伊曼伐木游戏的最一般形式是在任意有向图上(删除一个结点以及它指向的全部结点)玩的. 它的解析要涉及任意变更集的 A+B 与 A:B 的性质(参看第 7 章的增补材料).

增　　补

约喀斯他游戏的玩笑

n 点游戏永远可维持 n 步，因为每一点有两个活力而每一步将用掉两个. 因此这个游戏只不过是“她爱我”或者“她不爱我”游戏的变相而已.

布鲁塞尔豆芽的蠕虫

有点类似，但更为巧妙. n 个十字架的游戏永远可以维持 $5n-2$ 步，不过在亏格数较高的曲面上(例如环面)* 布鲁塞尔游戏肯定是更加有趣的.

砍灌木游戏

图 14 的获胜走法已在图 13 中给出.

参考文献及进一步阅读材料

Piers Anthony, “Nacroscope”, Avon, 1972.

Hugo D'Alarcao and Thomas E. Moore, Euler's formula and a game of Conway, J. Recreational Math. **9**(1977)249—251; Zbl. 355.05021.

Martin Gardner, Mathematical Games: Of sprouts and Brussels sprouts; games with a topolog-

* 译者注:像汽车轮胎一样的曲面.

ical flavor, Sci. Amer. **27**#1(July 1967)112—115.

Martin Gardner, "Mathematical Carnival", Alfred A. Knopf, New York 1975, Chapter 1.

Emmanuel Lasker, Brettspiele der Völker,

E. Lucas, "Récréations Mathématiques", Gauthiers-Villars, 1882—94; Blanchard, Paris, 1960.

Gordon Pritchett, The game of Sprouts, Two-Year Coll. Math. J. **7**#4(Dec. 1976)21—25.

J. M. S. Simões-Pereira and Isabel Maria S. N. Zuzsarte, Some remarks on a game with graphs, J. Recreational Math. **6**(1973)54—60; Zbl. 339.05129.

J. Úlehal, A complete analysis of von Neumann's Hackendot, Internat. J. Game Theory, **9** (1980)107—115.

第18章

皇帝及其钱币

你们之中，有好有坏，
就像是我所铸的钱币，
有重有轻，有真有假.
但你们中的每一个，
都必须无一例外地，
冲压出国王的头像.

——阿尔弗莱德·坦尼逊勋爵,《国王的田园诗·圣杯》,* Ⅰ,25

“……纽皇帝推翻了分崩离析的米纽斯王朝而取得政权.这个政权推行了一些积极政革,特别是废除了旧通货(上面有旧统治者的头像),引进新的皇家(纽氏)体制.高先生与矮先生是皇家造币厂的两位厂长,他们被皇上授予特权,轮流地来决定每一种新币的币值,在他们的每个新决定颁布以后,随即制造出这一币值的大量新币.以上一切事情都进行得很顺利,直至有一天,高先生决定铸造一种币值为1的新货币,而这将使造币厂的工人大量失业.工人们怒不可遏,他们揭竿而起,在京城的一个僻静角落里把不幸的高先生抛下高塔殒命.由于这一历史典故,高塔就此出了名.”

米纽斯**——四分五裂的年代.

---

* 译者注:耶稣在最后的晚餐时所用的杯子.

** 译者注:纯属作者杜撰,历史上决无此事.

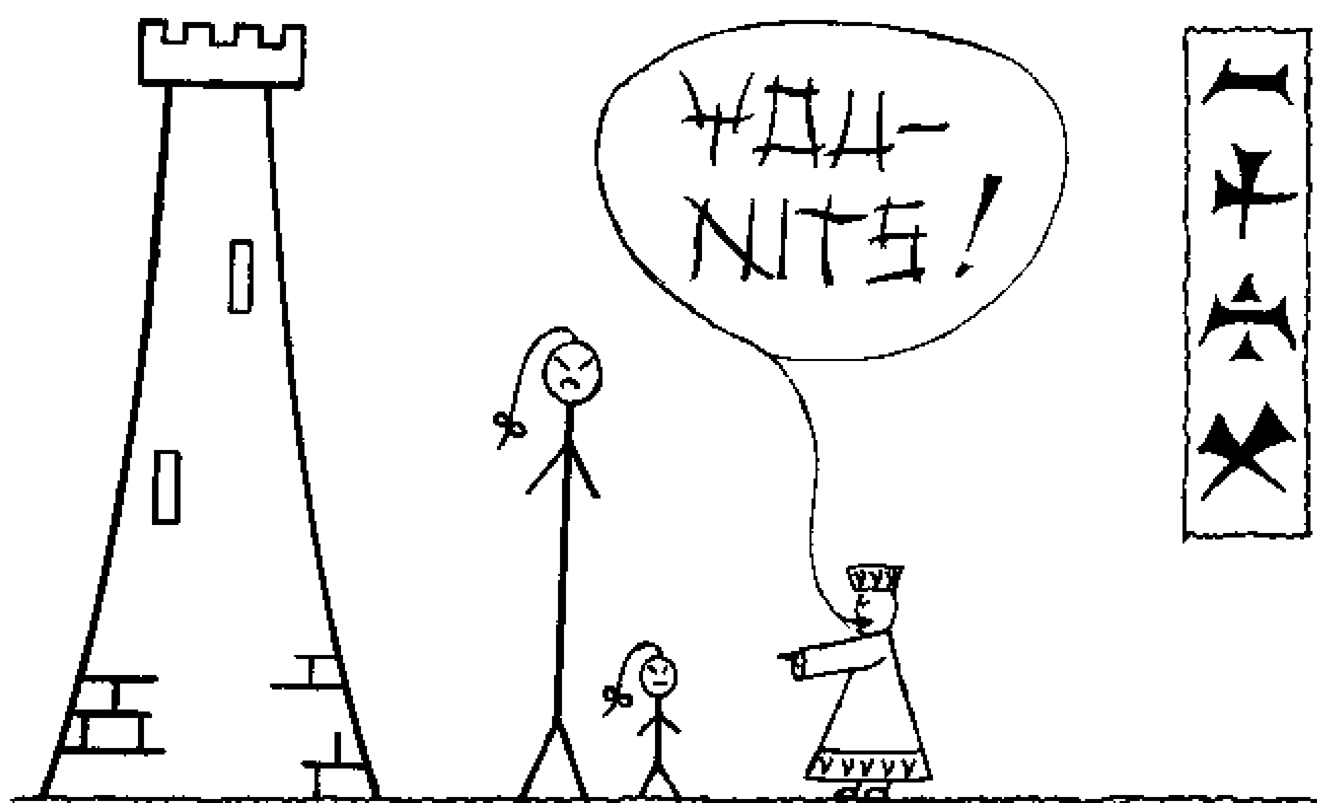


图 1. 皇帝的宣告.

西尔维*钱币

要是高先生和矮先生读过这本书,他们就会意识到他们只是在做一种游戏,一种名叫西尔维钱币的游戏. 两位游戏者可以轮流地提出一些不同的数目,但不准提出曾是以前已提出的数目字之和数. 譬如说,如果 3 与 5 以前都已提出过,则无论哪一方都不准提出以下的各数目:

$$3,5,6=3+3,8=3+5,9=3+3+3,10=5+5,11=3+3+5,\cdots$$

什么时候游戏会走到尽头呢? 如果任何一方都没有提出过 1,那么 1 还是可以提出的,但是,一旦提出了 1,那么任何数目

$$1,2=1+1,3=1+1+1,4=1+1+1+1,5=1+1+1+1+1,\cdots$$

就都不能提了,于是游戏就玩不下去了. 由于提出 1 的一方被看作**输家**,所以,西尔维钱币是一种反常型的博弈.(有本事的玩家决不会在正常型的游戏中浪费很多时间.)

我们最好指出:旧的货币制度中有些无理数成分(例如币值为$\sqrt{2}$,e 与 π 的钱币),于是皇帝决定要有一个新的货币单位,**由你得**(You-Nit)**,而每种钱币的币值都必须是"由你得"的整数

* 译者注:本游戏名称取自著名数学家西尔维斯特(Sylvester). 此人的事迹可参看《数学精英》(商务印书馆出版).

** 译者注:它是 Unit(单位)的谐音.

倍.(在图 1 中你可以看到皇帝正在宣布诏令!)

从前,米纽斯王朝曾有过一桩财政大丑闻,他们竟然发行过一种面值为负数的货币——“特加饭”(Tch Kah-Weh)弄得人民苦不堪言,至今思之犹有余悸,所以纽皇帝决定,一切新货币的面值都必须是正数.

它能维持多久?

本游戏可能持续很长时间. 为了说明它足以维持一千步,我们只需考虑下列游戏

$$1000, 999, 998, \cdots, 4, 3, 2, 1.$$

当然,1000 也可以代之以任何其他数字,所以游戏实质上是**无界**的. 许多其他游戏也有这种性质. 譬如说,有无限条蛇的绿色伐木游戏即是如此(见第 2 章). 但它应该算是有界的无界,因为在某些固定数字的动作之后,终端可以在望. 于是,在伐本游戏的第一步以后,留下来的蛇只能是有限数.

不过,西尔维钱币游戏并非如此. 不管你选取什么数,高先生与矮先生总能找到一种玩法,使留下的游戏依然**无界**. 他们的第一个千步动作可以是

$$2^{1000}, 2^{999}, 2^{998}, \cdots, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1,$$

而剩下的游戏仍可长期持续,你要它多久,它就能多久:

$$1\,000\,001, 999\,999, 999\,997, \cdots, 7, 5, 3, 1.$$

换句话说,西尔维钱币游戏实际上是*无界的无界*,但这远不是全部. 它是无界的无界的无界,……永远可以把“无界”加添上去,简直漫无止境!

尽管如此,它还是不能够永远玩下去:用第 11 章的语言来说它是一种有终端的游戏. 正是由于著名数学家 J·J·西尔维斯特所发现的小小定理证明了这一点,从而我们把游戏冠上了西尔维钱币游戏的名称.

因为,在走了第一步之后的任何时刻,设 g 为已走各步的最大公约数(g. c. d.). 于是不难看出,只有有限多个 g 的乘积不能表成已经提出过的诸数之和. 所以,至多经过这一已知的步数之后,g. c. d. 必然要减小下来. 最终,我们必将到达 $g=1$ 的状态,而框出尚需走出的步数. 于是,尽管我们无法限定在任一已知步数之后的游戏,我们还是能够限定为了减小 g. c. d. 而需的步数.

某些开局法是不良的

我们在第 2 章增补材料中所给出的证明表明,从西尔维游戏的任一局势出发,总是对两位

局中人之一存在着一个获胜策略,但由于游戏的无限性质,我们不可能对一切局势进行详细探讨,并在取胜策略存在时保证把它们找出来. 实际上我们并不了解怎样在有限时间内从一个任意已知状态出发究竟谁赢的具体方法(此种方法也可能不存在). 不过我们的确知道某些简单情况之下的答案.

在任何时候,只要你一旦提出 1 来,那么,按照定义,你就输了.

如果你提出 2 来,我的回答就是 3,只要它仍然可以利用的话. 这一来,所有一切较大的数

$$4=2+2,5=2+3,6=2+2+2,7=2+2+3,8=2+2+2+2,\cdots$$

就将统统被排除在外,于是迫使你不得不提出 1 来.

如果你提出 3,那么按照同样的理由,2 将是一个极好的回答.

由此可见,谁率先提出 1,2,3 中的任一数,他就会输. 所以,前面三个自然数是极坏的开局. 那么,如果我用 4 来开局,你将怎样回答呢? 会是 5 吗? 如果真是那样,则最大公约数(g. c. d.)将是 1,留下来的只是有限个数目. 把这些数目按照图 2 排列,我们就可以把它们找出来. 打圈的数目字必须排除在外,因为它们是 5 的倍数,这些数字的下面都加上 4 或 4 的倍数,自然也应排除,所以,留下来的数目字,只能是 1,2,3,6,7,11.

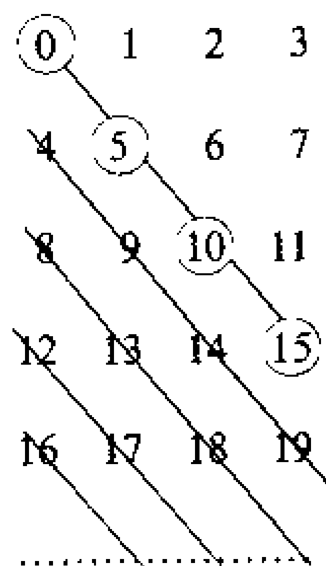


图 2. {4,5}之后还留下什么?

我当然不会要 1,2 或 3. 如果我提出 6 或 7,你就会提另一个,那样就打发掉 11,为我留下的只有 1,2,3 了. 所以我应该提出 11,而让你去提出 6 或 7.

{4,5,11}是一个 $\mathscr{P}$—局势.

下面是提出 4 与 6 之后所发生的情况.

⓪	1	2	3
~~4~~	5	⑥	7
~~8~~	9	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	15
~~16~~	17	~~18~~	19

……………………

由于5,7排除了一切较大的数,它们是在互相残杀.9与11,13与15,依此类推的其他数目,也都是这样.

> 在{4,6}之后,数偶(2,3),(5,7),(9,11),…以及$(4k+1,4k+3)(k\geqslant1)$,都是配偶.

所以,如果你用4来开局,我就用6来回应;你若以6开局,则我报之以4.人们还知道一些类似的策略.

> 在{8,12}之后,数偶(2,3),(5,7),(9,11),…,$(4k+1,4k+3)$以及(4,6),(10,14),(18,22),…,$(8k+2,8k+6)(k\geqslant1)$,都是配偶.

一个稍为复杂的策略表明,6的另一种较好的回应是9.

> 在{6,9}之后,可将数偶(4,11),(5,8),(7,10)以及$(3k+1,3k+2)(k\geqslant4)$视为配偶,但以下的情况值得注意:
>
> 在4,11之后,用7来匹配5;
>
> 在5,8之后,用7来匹配4;
>
> 在7,10之后,用5匹配4,用11匹配8.

我们业已证明:

> {2,3}{4,6}{6,9}{8,12}全都是$\mathscr{P}$—局势.

而

$\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{6\}\{8\}\{9\}\{12\}$全都是 $\mathcal{N}$—局势.

数 1,2,3,4,6,8,9,12 是已发现有显然对策的唯一几种首着.你们也许会指望,数偶(2,3),(4k+1,4k+3),(4,6),(8k+2,8k+6),(8,12),(16k+4,16k+12)能提供{16,24}之后的一个策略,然而不幸的是对局势{16,24,5,7,8}来说,12 并不是合法的一步.另一方面,对上面所给出的策略而言,只要数偶中有一数合法,则另一数也必然合法.实际上,对局势{16,24,5,7}来说,8 是一个很好的应对,因为它将使 16 与 24 无关,而我们马上就会看到

{5,7,8}是一个 $\mathcal{P}$—局势.

我们不知道 24 是不是 16 的一个好的回应,甚至也不了解 16 究竟有没有好的回应.

是否所有的开局都不好?

在观察 1,2,3 的命运时你或许会认为可能所有的开局都不好,那么我们讨论 4,6,8,9,12 的演变可能进一步证实你的疑虑.在这一节中我们要来分析 5 与 7.通过所谓**结党办法**,将使讨论各种可能的回应变得更为简易.

你们已经看到了一些小集团(或派系)了:数 1 自己就形成了一个特殊的派系;2 与 3 又是一个派系,因为它们排斥了所有较大的数.在我们讨论{4,5}时,6 与 7 形成一个派系,因为它们排斥了 11.派系具有这样的性质:派系中一个成员的回应必定是派系的另一成员,而这两个数字在一起时就把派系之外的所有数字都排除掉了.

让我们通过{6,7}的讨论(见下面的图 3)来说明所谓的结党办法.

如往常一样,我们照例不考虑在每一个局势中形成最内层派系的 1,2,3.现在 4,5 在一起排除了所有较大的数目,从而形成了第三个派系.不论什么样的较大数字被提名,4 总是可以回应 5,而 5 可以回应 4,从而在讨论较大数时我们可以忽略它们.

现在我们断言 8,9,10,11 形成了下一个派系,而为 8,10 在一起排除了 9,11 以外的一切数目,而 9 与 11 在一起又排除了 8 与 10 以外的一切数目.即使有什么较大的数目已被提名,8 可以回应 10,而 9 可以回应 11,反之亦然.所以我们可在随后的讨论中打发掉这四个数目.



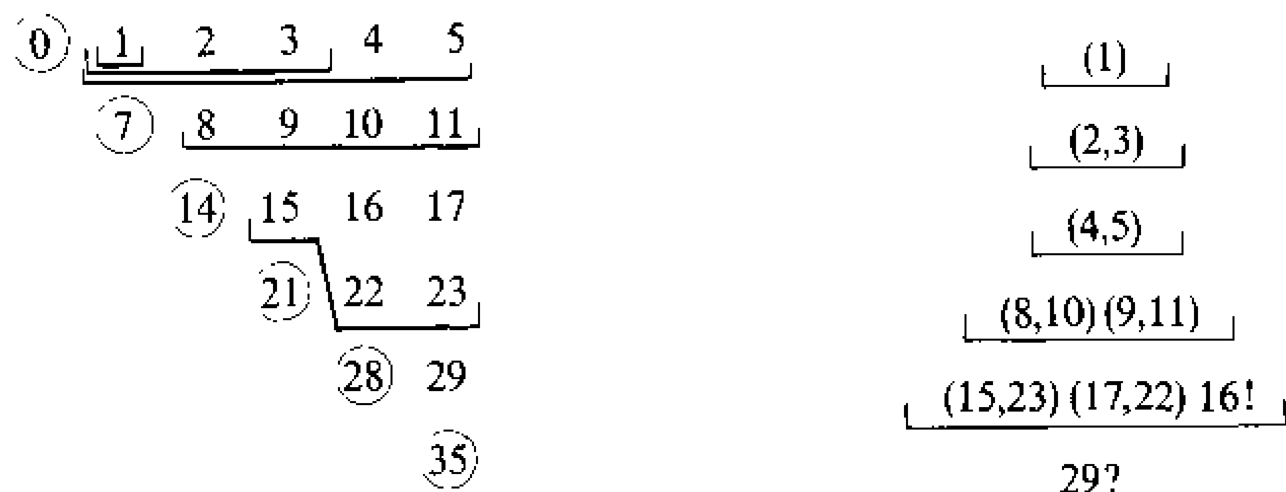


图 3. (6,7)后面的派系.

我们现在了解到,对留下的六个数字中任一个的良好回应必须是这些数字中的另外一个.我们看到 15 可以回应 23,反之亦然,因为只留下 16 与 17,与此类似,17 与 22 是一对匹配.但由于 16 排除了 22 与 23 两个数目,只留下 15 与 17,所以它本身就是好的一步.这五个数目形成一个派系,因为 29 是永远被排除的.

$$\begin{array}{ccc} 15 & 16 & 17 \\ & 22 & 23 \\ & & 29 \end{array}$$

> 对{6,7}来说,16 是唯一的良好回应.

本章增补材料的附表 6 以类似方式指出了下列局势:

{4,5}, {4,7}, {4,9},
{5,6}, {5,7}, {5,8}, {5,9},
{6,7}, {7,8}, {7,9}.

的完整策略.

特别,它表明

> {4,5,11}, {4,7,13}, {4,9,19},
> {5,6,19}, {5,7,8}, {5,9,31},
> {6,7,16}, {7,9,19}, {7,9,24},
> 都是 $\mathscr{P}$—局势.

我们由此推论出 5 或 7 的良好回应必定至少是一个二位数. 最小的二位数 10 不是 5 的合法回应;那么,它是不是 7 的良好回应呢? 不,不是的!

> {7,10,12}是一个 $\mathscr{P}$—局势.

可通过图 4 加以证明. 由于结党办法看来并不像它以前那样有效. 我们在三对数目中另外增添了注解.

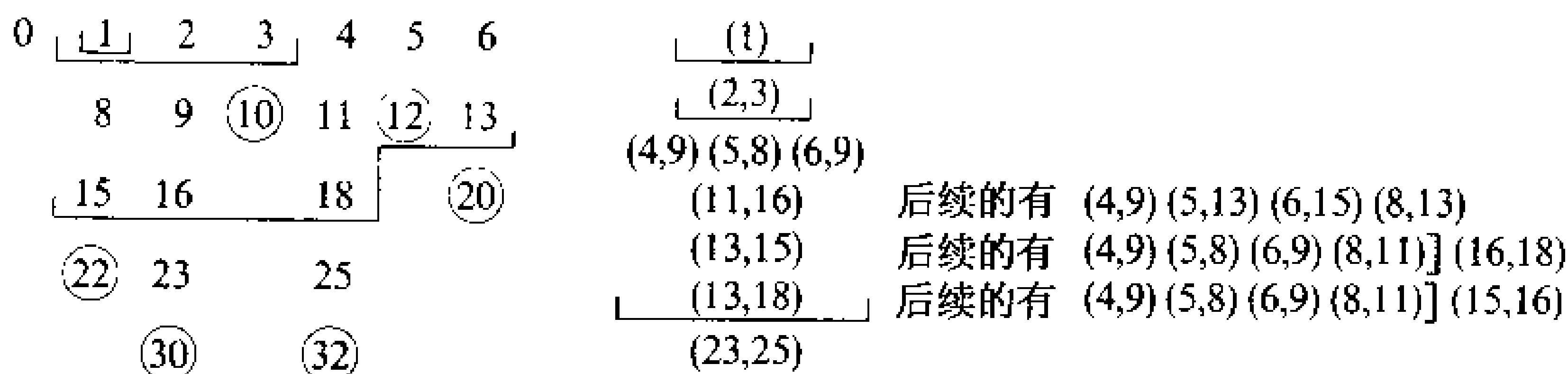


图 4. 局势{7,10,12}.

并非所有的开局都是坏的

赫金斯(R. L. Hutchings)已经作出证明,对 5 或 7 来说,不存在什么良好回应! 他的主要定理是:

> 若 a,b 互质($g=1$)且$\{a,b\}\neq\{2,3\}$,则$\{a,b\}$是一个 $\mathscr{N}$ 局势.

由此推出他的 p—定理:

> 若 $p\geqslant 5$ 为一素数,则$\{p\}$是一个 $\mathscr{P}$—局势.

p—局势* 是 $\mathscr{P}$—局势

(一切合法的回应产生一个 g. c. d. 为 1 的局势),从 p—定理他又转而推出 n—定理:

* 译者注:第一个 p 表示大于等于 5 的素数.

> 若 n 是一个非 2^a3^b 型的合数，则 $\{n\}$ 是一个 $\mathscr{N}$—局势.

n—局势是 $\mathscr{N}$—局势

(由于 n 有一个 $p \geqslant 5$ 的素数因子，而这可作为一个良好的回应). 这些情况综合起来说明了前面一些数字的状况：

> $\{5\}$，$\{7\}$，$\{11\}$，$\{13\}$，$\{17\}$，…是 $\mathscr{P}$—局势
> $\{10\}$，$\{14\}$，$\{15\}$，$\{20\}$，$\{21\}$…是 $\mathscr{N}$— 局势.

我们的明显策略也足以说明八个最小的 2^a3^b 型数字：

> $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{6\}$，$\{8\}$，$\{9\}$，$\{12\}$ 是 $\mathscr{N}$— 局势.

然而，

> 无人知道
> $\{16\}$，$\{18\}$，$\{24\}$，$\{27\}$，$\{32\}$，$\{36\}$，…是什么状况！

(如果有人指出错误，我们当然竭诚欢迎.)

窃取策略

赫金斯通过一种巧妙的窃取策略来证明他的主要定理. 他去考虑一个没有被 $\{a,b\}$ 排除掉的最上面的数 t，并证明了下述结果：若 t 不是一个良好的回应，那么别的某数是的！

我们将把 $\{a,b\}$ 称为**终端局势**，因为我们马上就能看到，最上面的数字将被任何别的合法动作排除.

现在让我们提问：

t 是不是 $\{a,b\}$ 的一个良好回应呢？

如果答复"是"，则 $\{a,b\}$ 是一个 $\mathscr{N}$—**局势**. 若答复"不是"，则要末游戏已经做完，要么对 $\{a,b,t\}$ 存在着一个良好回应 s. 但由于 a,b,s 排斥了 t，s 本身就是 $\{a,b\}$ 的一个良好回应. 于是我们可以说成，是局中人通过窃取第二局中人的策略(如果他对 $\{a,b,t\}$ 有一个策略的话)，找到了他从 $\{a,b\}$

走出的办法.

在某些情况下,例如{5,9},t(此处等于 31)是一个良好回应,但在另外一些情况,例如{5,7}(其时 $t=23$)它却不是.上述窃取策略的论证只是告诉我们良好回应是存在的,但并未告诉我们,它们倒底是什么.要知道,偷窃决不能替代辛勤劳动!

总之,

$t>1$ 时的一个终端局势是一个 $\mathcal{N}$—局势.

终端局势是 $\mathcal{N}$—局势

但终端局势{2,3}倒不是 $\mathcal{N}$—局势.这是由于 $t=1$,而唯一合法的行动将使本游戏终止.

为什么 g.c.d. 为 1 时,$\{a,b\}$是一个终端局势呢? 在图 5 中我们将用{9,11}来说明,本书的作者们不知道有什么良好回应.

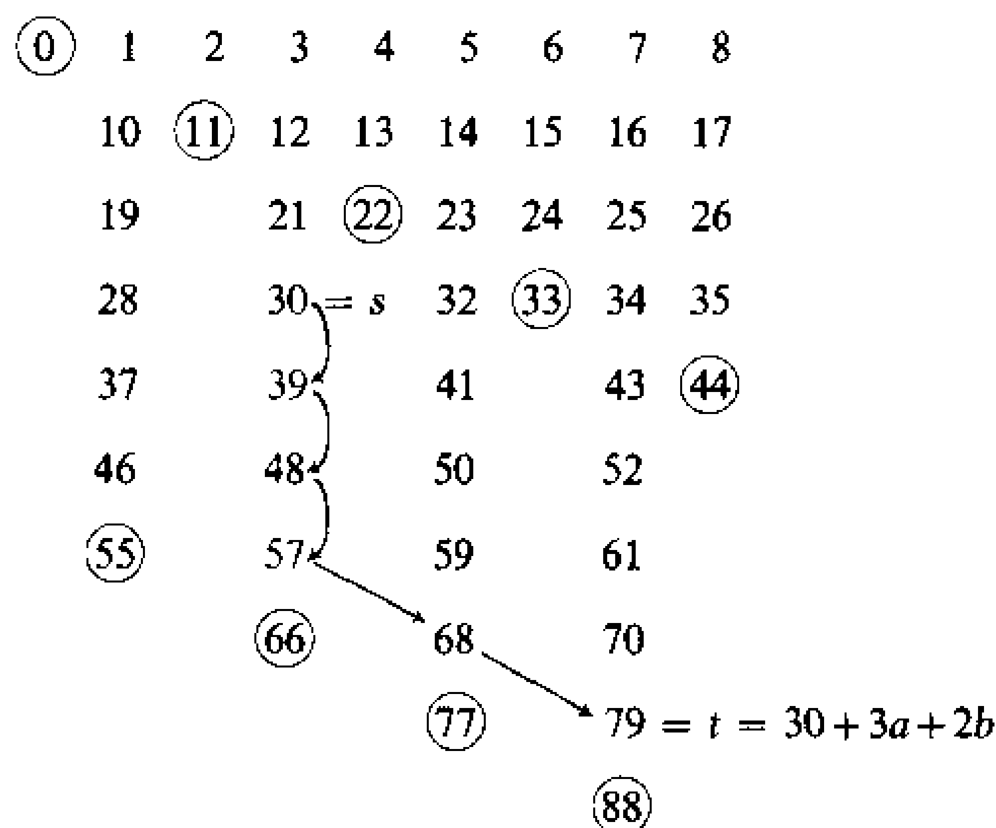


图 5. 赫金斯定理对 $a=9,b=11$ 的应用.

把数目字写成 a 列,一如我们的习惯做法,我们看到,在每一列里头,第一个被排斥的数(打圈的数)是 b 的一个倍数,所以最后一个包含进去的数必定相差 b 的倍数.现在从任意合法行动 s 出发,我们可以在其列中到达最后的合法数,这只要加上 a 的倍数就行,而从该处,加上 b 的倍数后可以到达 t,当然要求 s 要排斥 t(例如图 5 中,$s=30$).这一论证实际上也为西尔维斯特的著名公式

$$t=(a-1)b-a=ab-(a+b)$$

提供了一个证明.

沉着的终端

假定高、矮两方已经提出了两个互质数 a,b，而高先生正在考虑走出 s 的一步动作. 于是我们知道，利用足够多的、币值分别为 s,a,b 的钱币，即可得到最上面的数目 t. 然而我们的论证表明，只需要**一枚**新币就行：

$$t=s+ma+nb.$$

更一般地，从一局势$\{a,b,c,\cdots\}$出发，如果 t 可由任意多个 a,b,c 以及**仅仅一个** s 获致：

$$t=ma+nb+\cdots+s$$

我们就说成是 s **沉着**地排斥了 t.

所谓**沉着终端局势**就是指最上面的合法动作可被尚未排除的任一数沉着排除的局势.

> 如果 a 同 b,b_1 的每一个互质，则当且仅当
> $S_1=\{a,b_1c,b_1d,b_1e,\cdots\}$是沉着终端局势时，
> $S=\{a,bc,bd,be,\cdots\}$为一沉着终端局势.

沉着终端定理

譬如说，

$$\{7,1\times3,1\times4\}$$

实际上就是局势$\{3,4\}$，它是一个沉着终端局势，从而

$$\{7,9,12\}=\{7,3\times3,3\times4\}$$

与

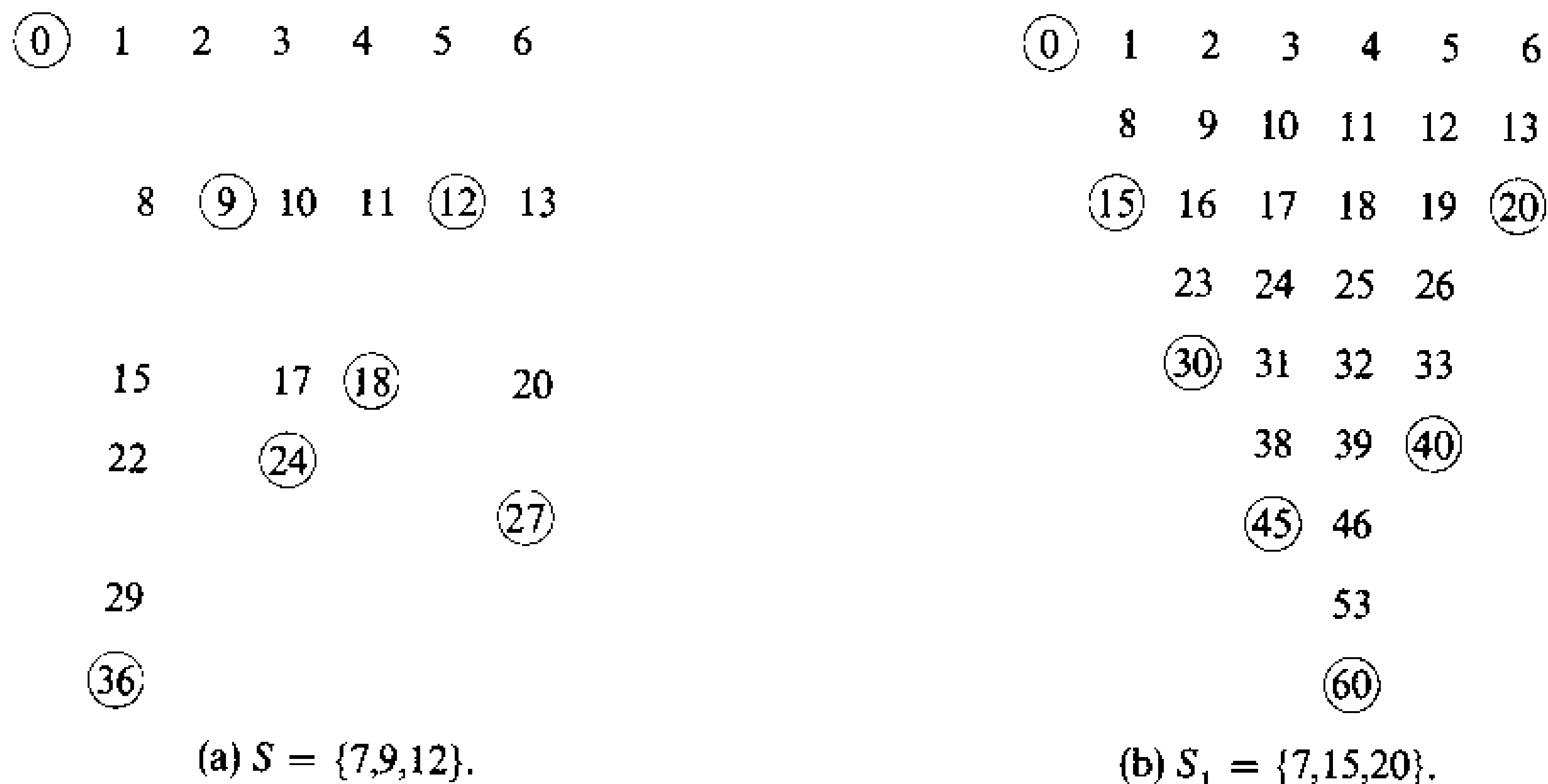
$$\{7,15,20\}=\{7,5\times3,5\times4\}$$

也是的. 特别，它们是终端局势，于是根据前述的窃取策略论证可知，它们是 $\mathcal{N}$—局势. 如通常那样，我们并未告知良好回应究竟是些什么.

我们将用$\{7,9,12\}$与$\{7,15,20\}$来说明沉着终端定理的证明. 我们再次把数写成 a(这里是7)列，并在每一列中圈出第一个被排斥数(图 6). 我们断言，对局势 S 与 S_1，这些数目字作成比 $b:b_1$(在本例中为 3:5；见图 7).

我们首先看到，S 的打圈数实际上是 b 的倍数. 不妨回忆一下，S 中打圈数 n 的确定原则是：n 被 S 所排斥，但 $n-a$ 不排斥. 由于 n 要被排斥，它必定具有如下的形式：

$$n=ak+bm,$$



(a) $S=\{7,9,12\}$. (b) $S_1=\{7,15,20\}$.

图 6. 打圈的数形成比例.

								作成的比
		29	2	17	11	5	20	
S:	(0)	(36)	(9)	(24)	(18)	(12)	(27)	3
								到
		53	8	33	23	13	38	
S_1:	(0)	(60)	(15)	(40)	(30)	(20)	(45)	5

图 7. 打圈数的分类整理.

此处的 m 将被$\{c,d,e,\cdots\}$排斥. 但若 k 为正数,则

$$n-a=a(k-1)+bm$$

也会被 S 排斥,故知 $k=0$,从而只要简单地表达为

$$n=bm.$$

现在我们的断言是:仅当 b_1m 在 S_1 中被圈时,bm 在 S 中被圈.

若 b_1m 肯定在 S_1 中被排斥,从而将成为一个打圈的数,除非

$$b_1m-a$$

也被排斥,但此时我们必将有

$$b_1m-a=ak+b_1m'$$

(某个 m' 被 $\{c,d,e,\cdots\}$ 排斥),而

$$b_1m=a(k+1)+b_1m'$$

表明 b_1 可整除 $k+1$,因为它与 a 是互质的. 现在我们可以用 b_1 来除并乘上 b,以得出

$$bm=ak'+bm'$$

(对某个正数 k' 成立),这表明

$$bm-a=a(k'-1)+bm'$$

被排除,而 bm 在 S 中不能打圈.

沉着终端定理虽然很谦逊,却很有威力. 它通常能够在一击之下给出无穷多的回应而使局面平静下来.

> 没有一个奇数可作为{16,24}的良好回应.

因为 1 肯定不是. 如果 a 为别的奇数,则 $\{a,2,3\}$ 实际上同沉着终端局势{2,3}并无区别. 根据沉着终端定理 $\{a,16,24\}$ 是一个沉着终端局势,从而也是一个 $\mathscr{N}$-局势.

类似地,它能证明{4,6},{6,9}为 $\mathscr{P}$ 局势而不必为提供一个详尽无遗的对策去操心. 让我们用它来讨论局势{8,10}. 在{4,5}之后,我们发现唯一能遗留下来的动作为

1,2,3,6,7,11,

所以在{8,10}之后,能唯一遗留下来的偶数是这些数目的二倍,即

2,4,6,12,14,22.

沉着终端定理使我们敢于肯定,对{8,10}的任何良好回应必然在这两个集合之一,否则,它是一个被{4,5}排斥的奇数,即 $\{a,4,5\}$ 从而 $\{a,8,10\}$ 将是沉着终端局势. 现在很容易看出,

1	马上就输掉了,
(2,3)	像通常一样匹配,
(4,6)	消去 8,10 而匹配,
(7,11)	也将如此(见增补材料附表 6 中的{6,7}),
(12,14)	亦然(利用我们对{8,12}所采取的办法).

于是可以看到,作为{8,10}的良好回应,22 是唯一的希望了. 我们在今后将会看到

> {8,10,22}确是一个 $\mathscr{P}$—局势.

加倍与三倍?

注意 $\mathscr{P}$—局势{8,10,22}是{4,5,11}的翻倍.我们的{8,12}策略表明,在{4,6}策略中出现的一切 $\mathscr{P}$—局势,翻倍之后仍然是 $\mathscr{P}$—局势.那么,是不是任一 $\mathscr{P}$—局势在翻倍之后变成另一个 $\mathscr{P}$—局势呢?不,决非如此!例如,{5,6,19}是 $\mathscr{P}$—局势,但是{10,12,38}可用 7 来反击,因为{10,12,38,7}实际上就是{7,10,12}.

那么,会不会是任一 $\mathscr{P}$—局势的**三倍**是另一 $\mathscr{P}$—局势呢?不,决非如此!例如{4,5,11}是 $\mathscr{P}$—局势,但{12,15,33}可用 5 来回击,而{5,12,33}是个 $\mathscr{P}$—局势,我们马上就会看到.

折半与三分之一?

尽管如此,还是有不少 $\mathscr{P}$—局势,它们的二倍与三倍仍是 $\mathscr{P}$—局势.我们猜想:

¿若{$2a$,$2b$,$2c$,…}是 $\mathscr{P}$,则{a,b,c,…}也是?	以及	¿若{$3a$,$3b$,$3c$,…}是 $\mathscr{P}$,则{a,b,c,…}也是?

寻找正确的组合

你应该怎样开始来玩西尔维钱币游戏呢?现在,既然你对游戏已经了解得很多,也许你在第一步可以提出 5 来.不管我走哪一步,你现在总是有一个对付办法了,因而你会有一点小小的安全感.但是,有许多窃取策略牢牢地锁在小小的保险箱里面,需要很灵巧的手指才能找到正确的组合.

前面几个策略你是了解的:1 无需回应,你应选取的几对是(2,3),(4,11),(6,19),(7,8)与(9,31).有没有什么一般规律呢?为了帮助你回答这个问题,我们遭遇到一些困难,最后总算找到了一个打开保险箱的相当有效的办法.但它所显示出来的取胜组合表明,不存在很简单的答案.

让我们仔细看一看 5 与别的数字提出之后的局势.若我们像通常那样把数字写成五列,我们就要圈出 0,在 1,2,3,4 列中分别圈出数目字 a,b,c,d,如图 9 所示.我们现在要利用这些数目字中的三个作为表头,第四个作为表中数字,造出一张 $\mathscr{P}$—局势的三维表格来.

表 1(a)就是以 a 为表中数,b,c,d 分别表示行、列以及层数的子表格,而表 1 的(b),(c),(d)则是分别以 b,c,d 为表中数的子表格.

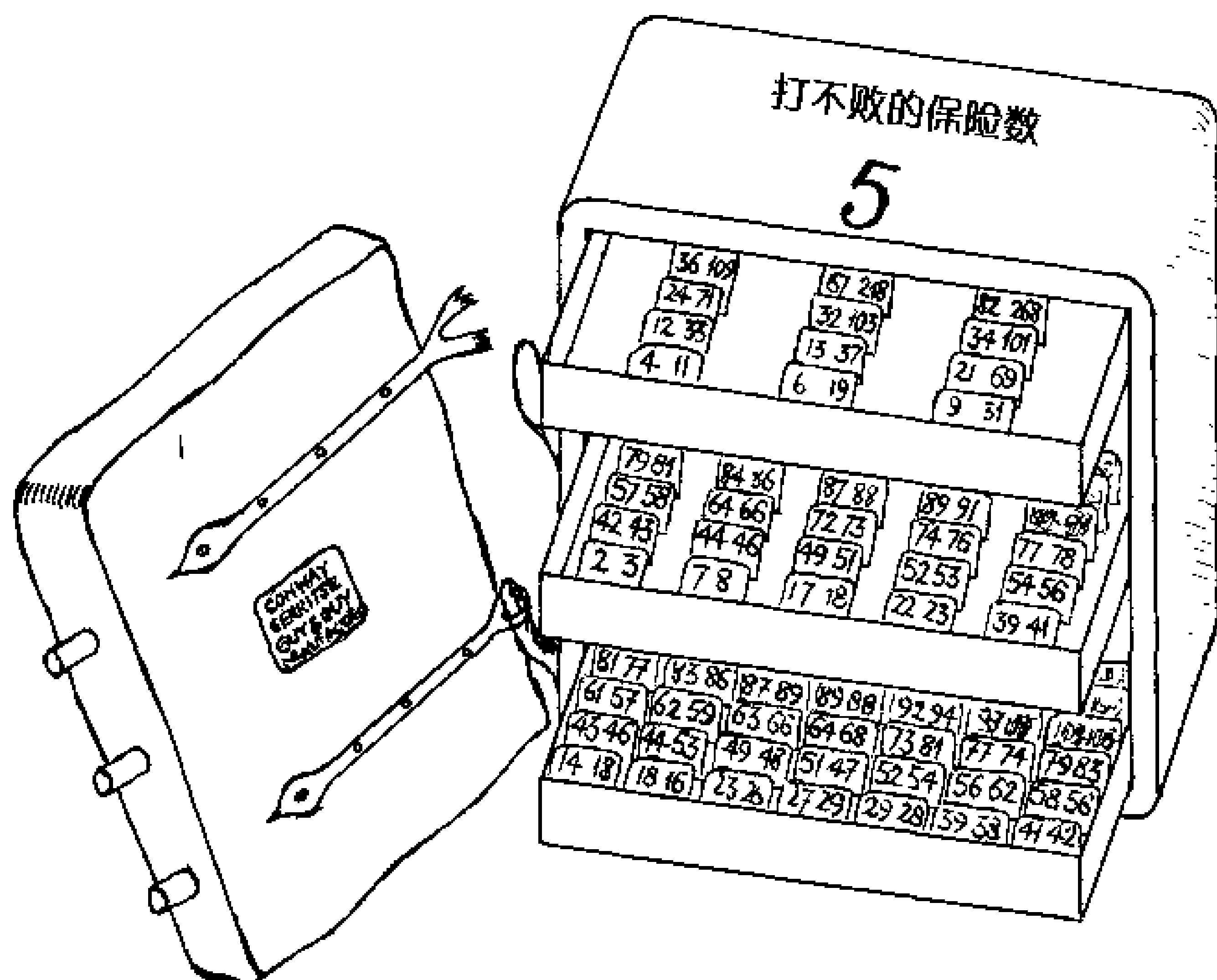


图 8. 保险数 5 的被盗取秘密.

某些局势将会重复出现，因为一个表头是多余的，这些现象现在用粗体字来标记. 例如

$$\{5,6,12,13,14\},\{5,6,17,13,14\},\{5,6,22,13,14\},\cdots$$

实际上都是同一局势，因为 12=6+6 是多余的，因而我们在附表 1(a)的 14 这一层有一个**6**的纵列. 在$\{5,6,12,18,19\}$中，12 与 18 两数都是多余的，因而此表的 19 这一层几乎全是由**6**所组成.

在$\{5,16,7,13,9\}$中，表中数 16=7+9 是多余的，所以 16 可被

$$21,26,31,36,41,\cdots$$

中任意一数所取代，而我们将写成 16+来标记. 实际上表中数字 $n+$ 是个简写，它表示无穷多个

$$n,n+5,n+10,n+15,n+20,\cdots$$

附表 1(a)中的数字是按照辞典顺序来计算，允许应有的重复，不然的话，则应进入以前在同一行、列或层而中不曾出现过的最小数 $5k+1$.

你们也许能够发现编制附表 2 的简易方法，这张表格是以类似方式对付局势$\{4,a,b,c\}$的. 这时表中的每一数字是以前在同行或同列中未曾出现过的最小数 $b=4k+2$，至于 $b+$，则是

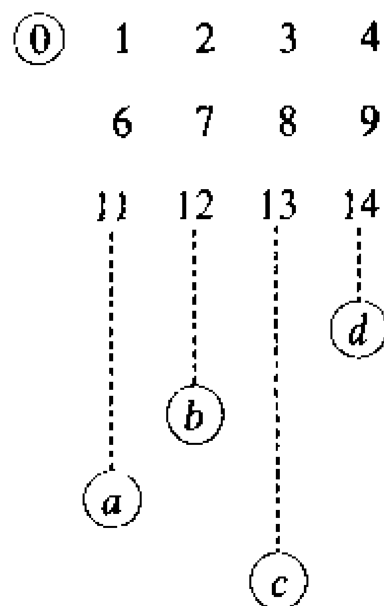
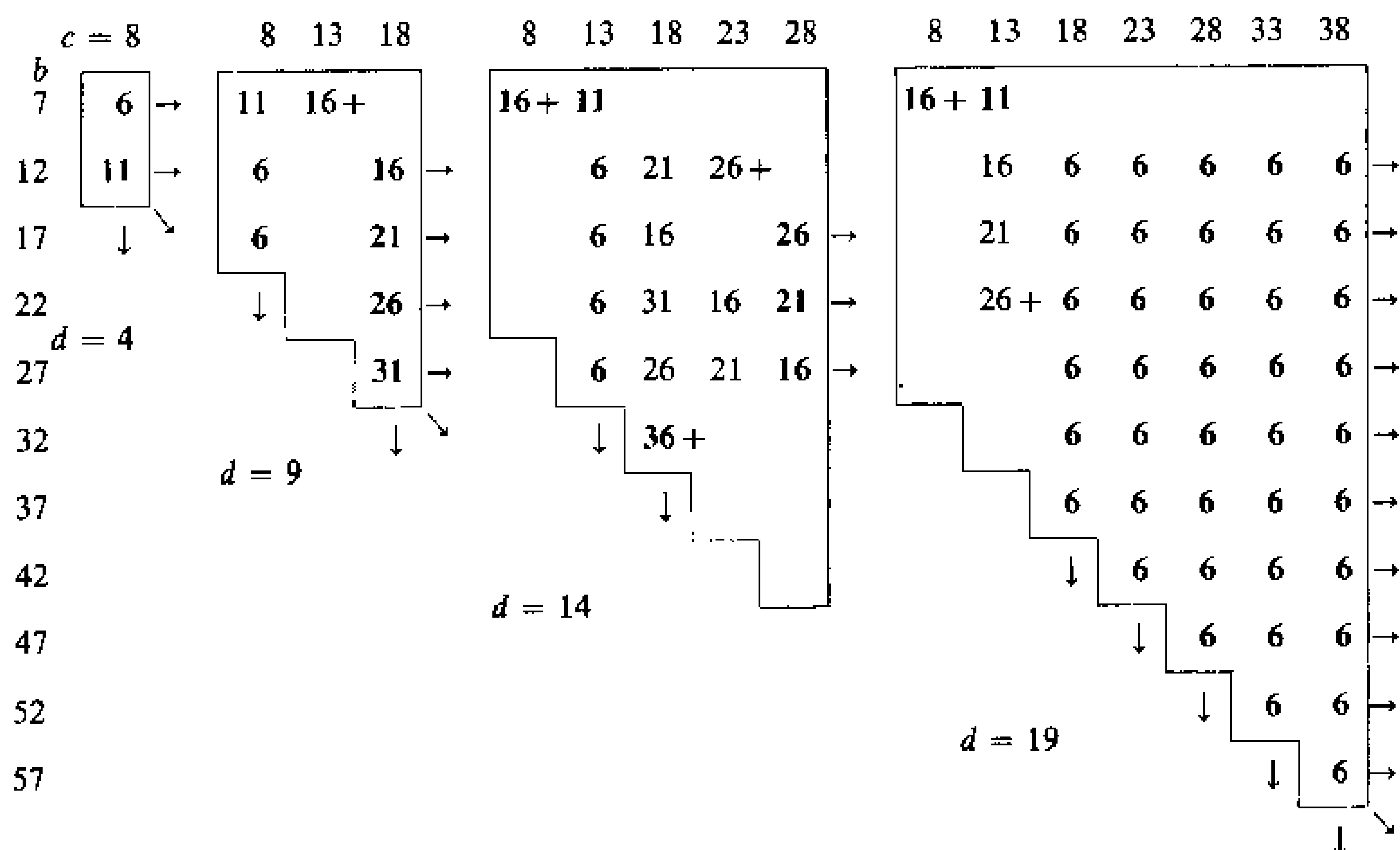


图 9. 一般局势 $\{5,x,y,\cdots\}$.



$d = 4$

b \ c	8
7	6
12	11

$d = 9$

b \ c	8	13	18
7	11	16+	
12	6		16
17	6		21
22			26
27			31

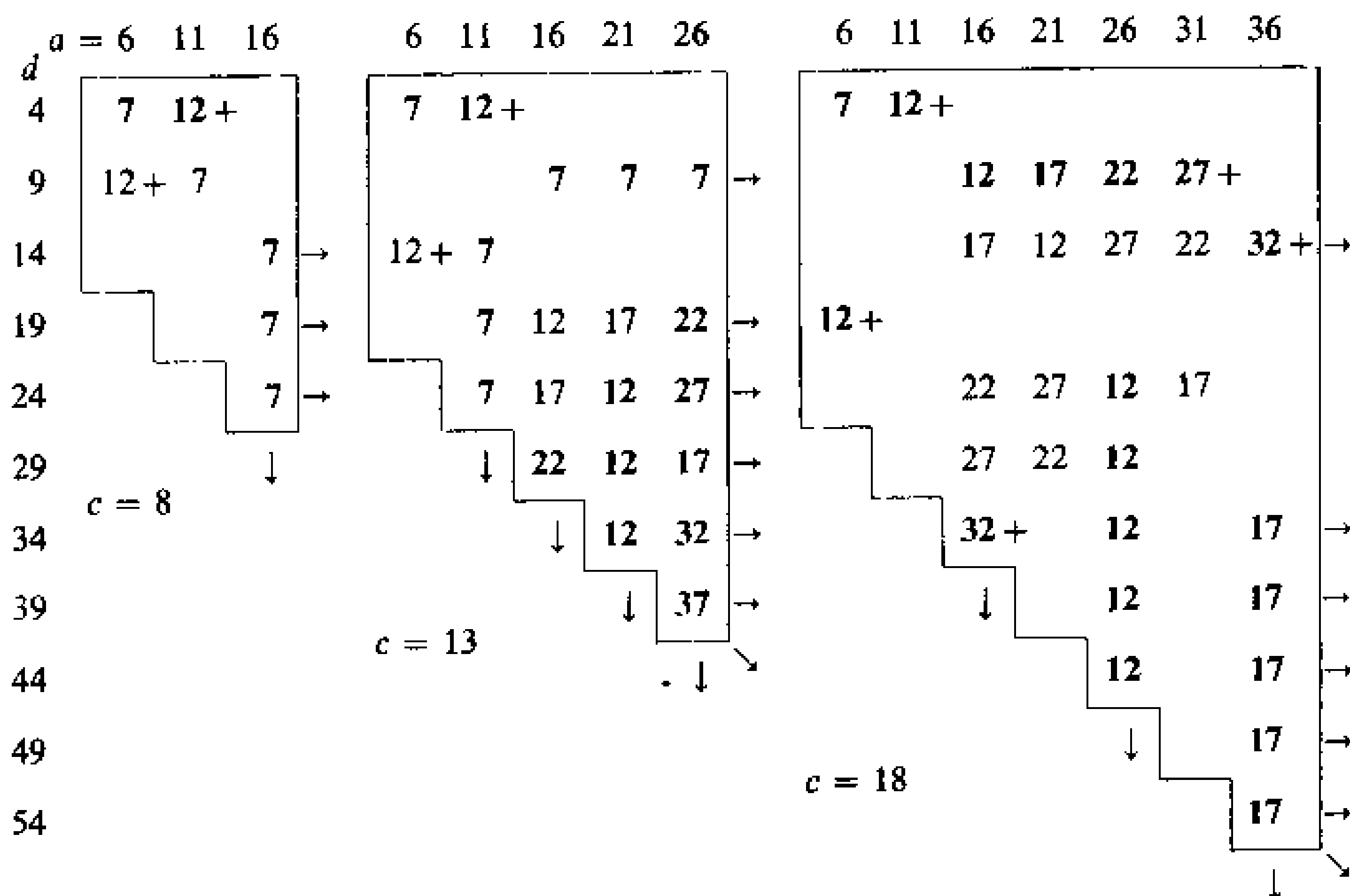
$d = 14$

b \ c	8	13	18	23	28
7	16+	11			
12		6	21	26+	
17		6	16		26
22		6	31	16	21
27		6	26	21	16
32			36+		

$d = 19$

b \ c	8	13	18	23	28	33	38
7	16+	11					
12		16	6	6	6	6	6
17		21	6	6	6	6	6
22		26+	6	6	6	6	6
27			6	6	6	6	6
32			6	6	6	6	6
37			6	6	6	6	6
42				6	6	6	6
47					6	6	6
52						6	6
57							6

表 1(a). $\mathscr{P}$—局势$\{5,a,b,c,d\}$以参数 a 为表中数字的子**表**格.



$c = 8$

d \ a	6	11	16
4	7	12+	
9	12+	7	
14			7
19			7
24			7

$c = 13$

d \ a	6	11	16	21	26
4	7	12+			
9			7	7	7
14	12+	7			
19		7	12	17	22
24		7	17	12	27
29			22	12	17
34				12	32
39					37

$c = 18$

d \ a	6	11	16	21	26	31	36
4	7	12+					
9			12	17	22	27+	
14			17	12	27	22	32+
19	12+						
24			22	27	12	17	
29			27	22	12		
34			32+		12		17
39					12		17
44					12		17
49							17
54							17

表 1(b). $\mathscr{P}$—局势$\{5,a,b,c,d\}$中以参数 b 为**表中**数字的子表格.

$b=7$

a \ d	4	9	14	
6	8+			
11		8	13	→
16		13	8	→
21		↓	8	→
26			↓	

$b=12$

a \ d	4	9	14	19	24	
6		8	13	18+		
11	8+					
16		18+		13		
21			18		13	→
26			23		18	→
31			↓		28	→
36					33	→
41					↓	

$b=17$

a \ d	4	9	14	19	24	29	34	
6		8	13	18+				
11	8+							
16			18		13	23	28	→
21		18+		13				
26			28+		23	13		
31					18	13	23	→
36					28	13	18	→
41					38	13	18	→
46					↓	13	18	→
51						↓	18	→
							↓	

表 1(c). $\mathscr{P}$—局势$\{5,a,b,c,d\}$中以参数 c 为表中数字的子表格.

$a=6$

c \ b	7	12	
8	4	9	→
13	4	14	→
18	↓	19	→
23		↓	

$a=11$

c \ b	7	12	17	22	
8	9	4	4	4	→
13	14+	4	4	4	→
18		4	4	4	→
23		4	4	4	→
28		↓	4	4	→
33			↓	4	→
38				↓	

$a=16$

c \ b	7	12	17	22	27	32	
8	14+						
13	9	19	24	29+			
18		9	14	24	29	34+	→
23		9	29	14	24		
28		9	34+		14	24	→
33		↓			14	29	→
38					14		
43					14		
48					↓		

表 1(d). $\mathscr{P}$—局势$\{5,a,b,c,d\}$中以参数 d 为表中数字的子表格.

$$b,b+4,b+8,b+12,b+16,\cdots$$

的缩略(当 $b=2a$ 或 $2c$ 时). 由沉着终端定理可以推知,其他形式的重复是不会出现的.

附表 3 选录自附表 2 的一个推广表格,承蒙理查德 · 盖列茨(Richard Gerritse)的好意为我们进行了计算,表 3 给出了各个 $x<y$ 的对子,其中$\{4,x,y\}$已经是一个 $\mathscr{P}$—局势了. 看来似乎比值 y/x 趋近于 2.56….

a \ c =	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91
5	6	10+																				
9	10	6	14	18+																		
13	14+		6	10																		
17			10	6	14	18	22	26	30	34+												
21			18	14	6	10	26	22	34	30	38	42+										
25			22		10	6	14	18	26		30	34	38	42	46	50+						
29			26		18	14	6	10	22		34	30	42	38	50	46	54	58+				
33			30+		22	26	10	6	14	18												
37					26	22	18	14	6	10	42	38	30	34	54		46	50	58	62	66	70
41					30	34	38	42	10	6	14	18	22	26	58		50	46	54	66	62	74
45					34	30	42	38	18	14	6	10	26	22	62		58	54	46	50	70	66
49					38	42	30	34	46	22	10	6	14	18	26		62		50	54	58	78
53					42	38	34	30	50	26	18	14	6	10	22		66		62	46	54	58
57					46+				38		22	26	10	6	14	18	30	34	42			
61						46	50	54	42		26	22	18	14	6	10	34	30	38	58	74	62
65						50	46	58	54		62		34	30	10	6	14	18	22	26	38	42
69						54+		46			50				18	14	6	10	26	22	30	34
73							54	50	58		46		62	66	30	22	10	6	14	18	26	38
77							58	62	66		54		46	50	34	26	18	14	6	10	22	30
81							62+				58		50	46	38	30	22	26	10	6	14	18
85								66	62		70		54	58	42	34	26	22	18	14	6	10
89								70+			66		58	54		38	42		30	34	10	6
93									70		74		66	62	78	42	38		34	30	18	14
97									74		78		70	82	66		86	38	90	42	34	22
101									78+				74	70				42	66	38	46	26
105											82		78	74	70		90		86	94	42	46
109											86		82	78	74		70		94	90	50	54
113											90		86	94	82		74		70	78	98	50
117											94+		90	86			78		74	70	82	

表 2. $\{4, a, b, c\}$为 $\mathscr{P}$—局势时参数 b 的值.

你在做游戏时，一旦出现了 4 或 5，你就可以参考这些附表中适用的一张表格. 如果 6 先上来，则请参看本章增补材料中的附表 7.

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
5	11	107	269	205	531	303	777	405	1043	501	1291	603	1549
7	13	109	279	207	529	305	783	407	1045	503	1289	605	1555
9	19	111	277	211	541	311	797	409	1051	505	1299	607	1557
15	33	113	287	213	547	313	807	411	1053	511	1309	609	1567
17	43	119	301	219	557	315	805	413	1063	513	1319	615	1577
21	51	121	307	221	567	317	819	415	1065	519	1329	617	1583
23	57	123	309	223	569	321	823	419	1077	521	1339	621	1595
25	67	125	319	227	585	323	829	421	1079	523	1341	623	1593
27	69	129	331	229	583	325	839	425	1095	525	1347	625	1603
29	75	131	333	231	593	327	841	427	1097	527	1349	627	1609
31	81	133	343	233	595	329	851	429	1103	533	1371	633	1627
35	89	135	345	237	611	335	857	431	1105	535	1373	635	1625
37	95	141	363	239	613	337	871	433	1115	537	1379	637	1635
39	101	143	365	241	619	339	869	439	1125	539	1381	639	1637
41	103	147	373	245	631	341	879	441	1135	543	1393	643	1649
45	115	149	379	247	629	347	885	447	1145	545	1395	645	1655
47	117	151	385	251	641	349	899	449	1151	549	1411	651	1665
49	127	153	391	253	647	351	901	451	1157	551	1413	653	1679
53	139	155	397	255	649	353	911	455	1165	553	1423	655	1681
55	137	157	399	257	659	355	909	457	1171	555	1425	657	1687
59	145	163	417	259	665	357	919	459	1177	559	1433	661	1699
61	159	165	423	261	671	359	917	461	1183	561	1443	663	1697
63	161	169	435	265	683	361	927	463	1189	563	1445	667	1709
65	167	171	437	267	685	367	941	465	1195	565	1451	669	1719
71	177	173	443	271	697	369	951	469	1207	571	1465	673	1731
73	183	175	445	273	699	371	953	471	1209	573	1471	675	1729
77	195	179	453	275	705	375	961	473	1215	575	1477	677	1739
79	193	181	467	281	723	377	971	479	1225	577	1483	679	1741
83	209	185	475	283	725	381	983	481	1235	579	1485	681	1751
85	215	187	477	285	731	383	981	485	1247	581	1495	687	1757
87	217	189	483	289	743	387	993	487	1245	587	1505	689	1771
91	225	191	489	291	745	389	1003	491	1257	589	1511	691	1769
93	235	197	507	293	755	393	1011	493	1267	591	1517	693	1783
97	243	199	509	295	757	395	1013	495	1269	597	1531	695	1781
99	249	201	515	297	767	401	1031	497	1279	599	1537	701	1803
105	263	203	517	299	765	403	1029	499	1277	601	1543	703	1801
												707	1813

表 3. 对子 x, y 的值以使 $\{4, x, y\}$ 为 $\mathscr{P}$—局势.

g 为二时我应当怎样做？

例：$\{8, 10, 22\}$

好像我们需要检查无穷多个可能的回应. 幸而有一种办法，使得我们在有限时间内做检查.

对 $g=2$ 的任何局势，一个类似的办法也能管用.

让我们来看一下，从{8,10,22}玩下去，局势将会变成什么样子. 如果玩的是 1,2 或 3,我们知道该怎么做. 否则的话，唯一可能玩的偶数是

4,6,12,14,

而局势的偶数部分必然像是以下组合之一：

{4,6}{4,10}{6,8,10}
{8,10,12,14}{8,10,12}{8,10,14}{8,10,22}

玩过什么奇数呢？如果它们之中的最小者为 n，则因{8,10,22}排斥了所有的

16,18,20,22,24,…

我们可以假定唯一有关的奇数是在

$$n, n+2, n+4, n+6, n+12, n+14.$$

之中. 且若已经走出任何偶数的话，势将进一步限制其可能性. 譬如说，若已经玩过 6，则可假定奇数是在下列的一个集合之中：

$$n, n+2, n+4 \qquad n, n+2 \qquad n, n+4 \qquad n$$

附表 4 给出了用此分类方法所得出的局势之性状. 由于最后四列无限重复，这张有限表格包含了每一个奇数 n 的信息. 它是怎样计算的？何以表现出周期性？

让我们来看表中典型的一行：

$$\{8,10,14,n,n+6,n+12\}.$$

由此局势出发，存在着三种选择：

(a) 偶数 4,6 或 12,

(b) 较小的奇数 $m\leqslant n-14$,

(c) 较大的奇数 $n-12, n-10, n-8, n-6, n-4, n-2, n+2, n+4$. 情况(a)将导致到局势(在附表的前面一段)，其偶数部分为

{4,10},{6,8,10}或{8,10,12,14},

而我们可认为这些局势都已分析清楚，并最终表现出 n 的周期性.

情况(b)中的一例将会导数

$$\{8,10,14,m\},$$

这是由于 m 排斥 n 及一切较大奇数之故. 如存在奇数 m 而这是个 $\mathscr{P}$-局势，则对一切 $n\geqslant m+14$，$\{8,10,14,n,n+6,n+12\}$将是一个 $\mathscr{N}$—局势. 若不是，我们可以抛弃情况(b)中的行动.



		5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
{4,6} (P)	$n, n+2$	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–
	n	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
{4,10} (N)	$n, n+2$	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–
	$n, n+6$	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–
	n	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
{6,8,10} (N)	$n, n+2, n+4$	–	P	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+2$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	·	–	–
	$n, n+4$	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	n	–	P	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
{8,10,12,14} (P)	$n, n+2, n+4, n+6$	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–
	$n, n+2, n+4$	–	–	–	–		–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+2, n+6$	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P
	$n, n+2$	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	-	P	–	P	·
	$n, n+4, n+6$	–	P	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P
	$n, n+4$	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–
	$n, n+6$	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–
	n	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
{8,10,12} (N)	$n, n+2, n+4, n+6$	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P
	$n, n+2, n+4$	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+2, n+6$	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–		P	–	–	
	$n, n+2$	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P
	$n, n+4, n+6$		P	P	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+4$	–	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	P	–	–	–	P	P	–	–	P	P	–	–	P
	$n, n+6$	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P
	$n, n+14$	–	–	P	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	n	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
{8,10,14} (N)	$n, n+2, n+4, n+6$	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+2, n+4$	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	P	–	-		–		–	–	–	–
	$n, n+2, n+6$	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+2$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+4, n+6$	–	–	P	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	P	–	–	–	–	–	–
	$n, n+4$	–	P	–	–	–	–	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	–
	$n, n+6, n+12$	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	–	–	P	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+6$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+12$	P	–	P	–	P	P	–	–	–	–	–	–	P	–	P	–	P	–	–	–	–	–	–	–
	n	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	P	–	P	–	–	–	–	–	–	–	–
{8,10,22} (P)	$n, n+2, n+4, n+6$	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–
	$n, n+2, n+4$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+2, n+6$	–	–		P	–	–	–	–	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P
	$n, n+2, n+14$	–	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–	P	–
	$n, n+2$	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+4, n+6$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+4$	–	P	P	–	–	P	P	–	–	P	P	–	–	P	P	–	–	P	P	–	–	P	P	–
	$n, n+6, n+12$	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–	–	–	P	–
	$n, n+6$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+12, n+14$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+12$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$n, n+14$	P	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	n	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

表 4. 局势{8,10,22}.

最后，情况(c)的动作将是：要末 n 保持不变，要末使它至多减少 12. 我们的结论是，表中每一个局势的结果可按一种固定方式从以下算出：

最终周期信息(情况(a))，
最终常数信息(情况(b))，
最后几列的信息(情况(c))；

从而它最终会表现出 n 的周期性.

$g=2$ 的任一局势都可以按此种方式加以处理. 当我们算得已很充分，可以验证周期性时，作为特殊情况，我们就有本事确定是否存在良好回应. 对局势{8,10,22}来说，一个良好反应都没有，所以它是一个 $\mathscr{P}$—局势.

巨大的未知数

通过数 g，我们可以最好地叙述我们对本游戏所了解到的知识. 当

$$\boxed{g=1}$$

时，局势是有界的，所以只要你对所有局势进行探究，你就能知道究竟应当怎样去作. 当然这将耗费许多时间，即便我们的一个定理已经告诉了结果. 我们知道，对局势{31,37}来说，必然有一个良好的回应，然而却不了解任何办法，足以保证在未来一千年中把它找出来.

当

$$\boxed{g=2}$$

时，我们刚刚描述过的办法可以在有限(但时间可能极长)时间之内算出结果.

如果

$$\boxed{g \text{ 可为 } p\geqslant 5 \text{ 的素数 } p \text{ 整除，}}$$

则当 p 还未被提出时，它是一个良好回应，如果已被提名，那就任何良好回应都不存在了.

作者们迄今只能检查几个有其他 g 值的特殊局势. 在本章增补材料的附表 8 里头，收有局势{6,9}的完整讨论. 尽管它是一张二维表格，周期性能帮助我们分析各种局势，直至无穷. 对于 $g=3$ 的其他局势，类似的事情兴许也会发生. 我们曾对局势{8,12}($g=4$)算过一张大得多的三维表格，但在我们的明确策略所覆盖的范围之外，未能发现结构方面的规律性.

16是情况不明的第一个开局走法.我们不知道{16}是否有一个良好反应,也不了解能否在有限时间内把它找出来.或许你想考虑一种向上测试法,来探索每一种可能的回应,试图从中发现某种结构,但即使这种办法也是不可能的.譬如说,我们不知道用什么办法,在有限长的时间里去测试回应24.我们甚至不知道怎样去测试100(这是信手拈来的一个数目),以作为{16,24}的一个可能回应!

沉着终端定理时常帮我们消除无穷多个回应,例如对{16}或{16,24}的一切奇数回应,但它永远不能消除一个需要经过无限努力才能加以分析的回应.

集合的偶数成员在左边;奇数成员在顶上.如果一切良好回应都是已知的,则将方括弧闭合.例如,[]表示一个$\mathscr{P}$—局势,但开括弧[永远表示一个$\mathscr{N}$—局势,此时,没有一个良好回应是已知的.表中的最后一款包含了所有大于3的素数,本表也可能包含某些2^a3^b型的数.

表5告诉了你一切结果以及我们所知道的,从

6,7,8,9,10,11,12

	{7,9,11}	{7,9}	{7,11}	{7}	{9,11}	{9}	{11}	{}
{6,8,10}	[]	[11]	[11]	[]	[4,5,7]	[5]	[]	[4,7,11]
{6,8}	[10]	[]	[]	[9,10,11]	[4,5]	[5,7]	[7,10]	[4]
{6,10}	[8]	[]	[15]	[8,9]	[4]	[7]	[8,13]	[4]
{6}	[]	[8,10,11]	[8,9]	[16]	[4,7]	[]	[26]	[4,9]
{8,10,12}	[4,5,6]	[4]	[13]	[5,6]	[13,14,15]	[23]	[6]	[14]
{8,12}	[5]	[6]	[6]	[5]	[]	[11,15]	[9,13]	[]
{10,12}	[4]	[4,6]	[16]	[]	[]	[11,13,14]	[9	[7
{12}	[6]	[15]	[27]	[10	[8,10]	[6]	[	[8
{8,10}	[4,5,6]	[4]	[]	[5,6,11]	[23]	[13,15]	[6,7]	[22]
{8}	[5]	[6]	[6,10]	[5]	[12]	[21	[	[12
{10}	[4]	[4,6]	[8]	[12]	[12]	[	[	[5
{}	[6]	[19,24]	[24,34]	[]	[	[6]	[]	[5,7,11,13,...

表5. {6,7,8,9,10,11,12}各子集的状况及已知的良好回应.

出发的良好反应(如果4或5包含进去,则表2,3,1以及图8可作深入一步的讨论).如果你们能够在这张表格中增添些材料,或者判断任何2^a3^b型数是不是良好开局,那就请告诉我们,作者们竭诚欢迎.

是否所有的结果都能计算?

我们能够证明,必然存在着一种办法,使我们设计出一个计算机程序,以便找出{n}的结果,即便我们并不知道这种办法究竟是什么!所持的理由是:

只可能存在有限多的良好开局走法 2^a3^b.

因为它们之中的任一数都不能整除另一数，所以不可能有两个数具有同样的 a 值或同样的 b 值. 如果 $2^{a_0}3^{b_0}$ 是 a_0 尽可能最小的这类数目，而 2^a3^b 是另一数，则必然有 $b<b_0$，于是充其量至多只有 b_0+1 个数，$n_1,n_2,\cdots,n_k$. 不过我们怀疑它连一个都没有！

如果你只知道这些数是什么，那么你就可以用 PORN（见图 10）来编制计算机程序，以便找出任意的$\{n\}$的结果. 此项论证表明，从纯技术角度来看，它是一个 n 的可计算函数，即便我们并不了解它究竟是些什么函数.

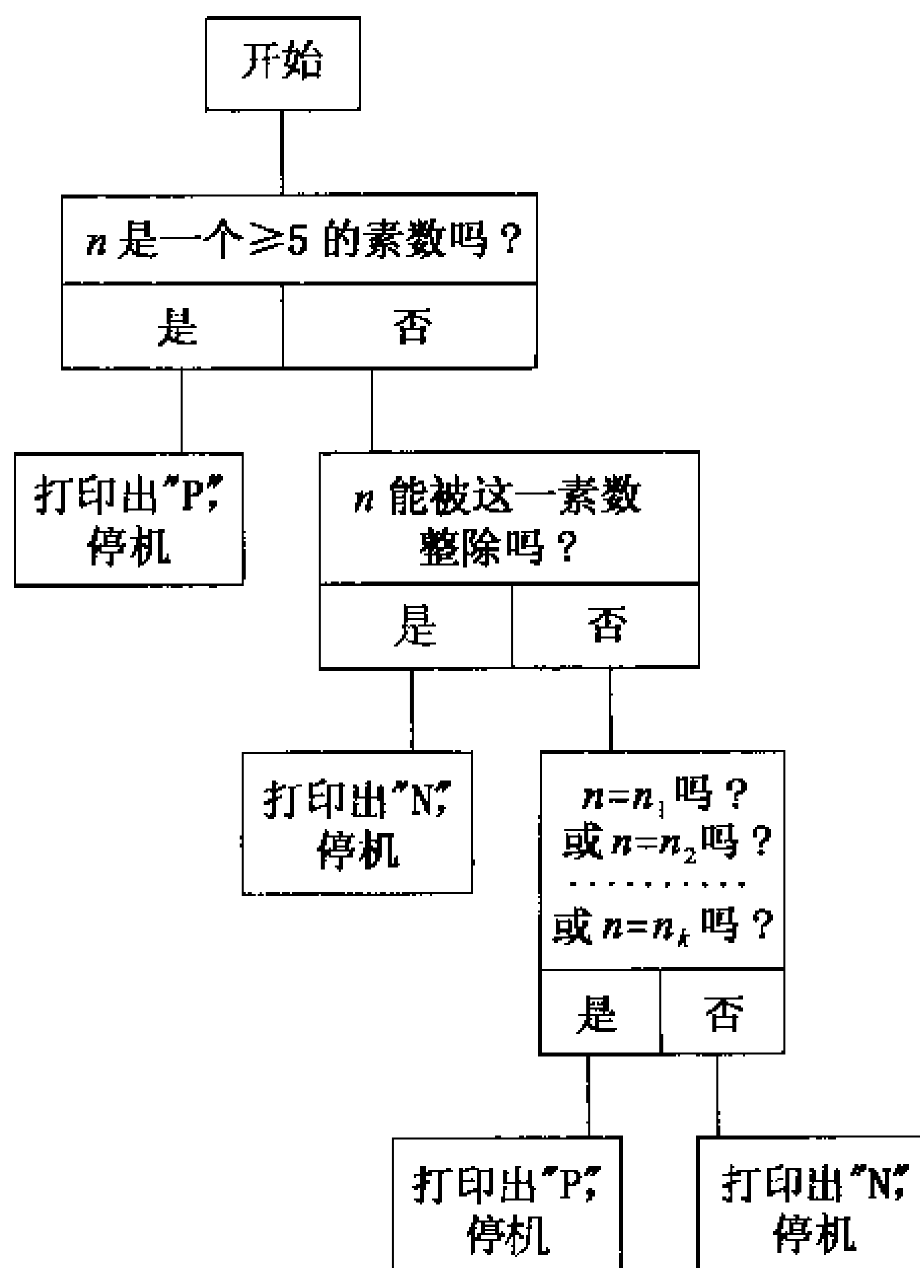


图 10. 能决定$\{n\}$是 $\mathscr{P}$—或 $\mathscr{N}$—的计算机程序.

西尔维钱币游戏的礼节性规矩

西方读者之中，很少有人能够理解我们的游戏来自东方某国的微妙规矩. 但我们至少能帮助你避免失礼，让我们向你指出，在西尔维钱币游戏中，通常的习惯是，感觉到自己将是游戏赢家的局中人应该主动放弃 1,2,3 的提名权. 这种希奇古怪的习惯据说来自一个古老传统，站得高，看得远的高先生勇于自己承担坏运气，不让恶运降临到他亲爱的弟弟——矮先生那一边.

如果世上所有的人都已看清楚你肯定会赢，那时除 1 之外的任何走法都将伤害你的对手，不过，在其他场合，我们建议你提出 3 这个数(2 当然也可以，不过容易被人误解). 如果对手同意你的分析，他将用 2 来回敬，但你已允许他提出 1 来表示另一种意见(除了 1 与 2，对 3 的其他回答或许也可用得上，但它们的微细差别很难解释).

当然，你的最大冒犯是在游戏一开始就提出 1,2 或 3，因为那是哲学家何敬思* 的特权，至少在别人找到一个新的取胜办法之前一贯如此.

---

* 译者注：译音，此人疑为中国人. 但春秋战国时期的诸子百家中均无其人. 另外，从单词的拼法来看，此人也有可能是前面已提到过的赫金斯(中间漏去了短划，t 变成大写，但其余则完全相同). 但索引中"赫金斯"的条目中并没有本页. 看来是原书作者们的疏漏，也有可能是故意留给读看的.

增　　补

巧克力糖真好吃*

这里有个游戏，规则同西尔维钱币游戏很类似. 对某个固定数目 N，两位局中人轮流地提出 N 的除数，但不能是以前已提名数字的倍数. 无论谁提出 1，他就是输家. 例如，若 $N=432=2^4 3^3$，走一步的实质就是吃掉一块巧克力糖（见图 11）的一格，并连带去掉其下面与右边的各个格子. 注意：1 的那格有毒！

☠	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432

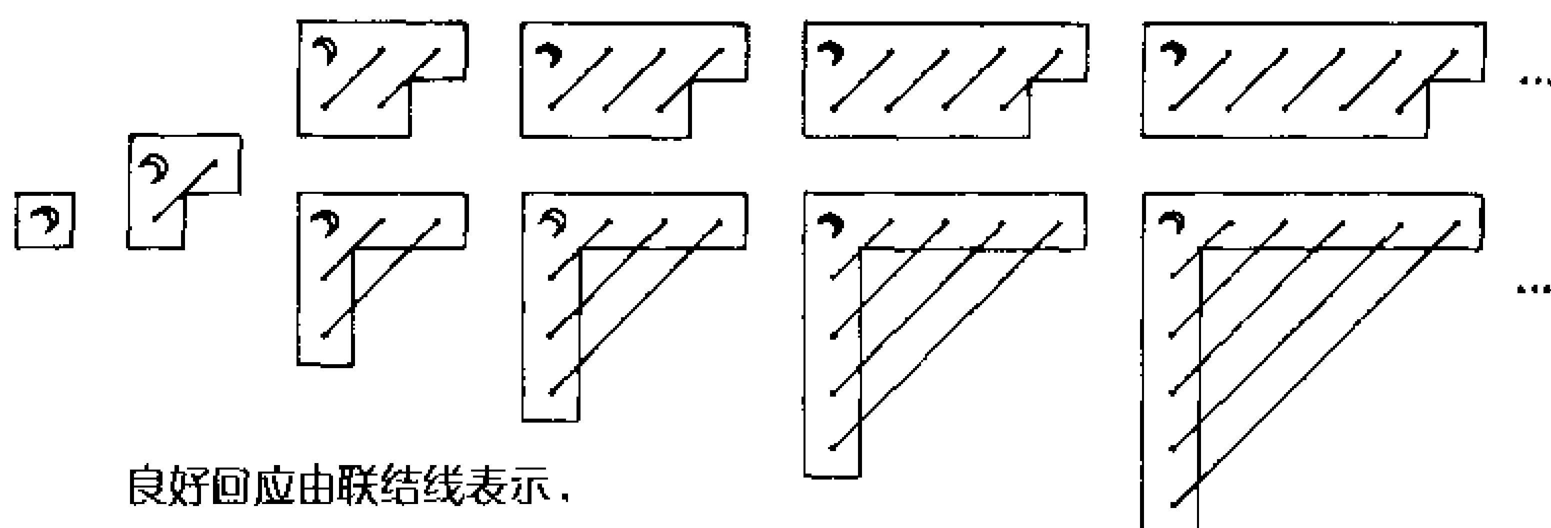
图 11. 吃块巧克力糖.

图 12 中给出了前面的一些 $\mathscr{P}$—局势. 窃取策略表明大于 1×1 的矩形是 $\mathscr{N}$—局势；如果无论哪一边至多为 3，则回应是唯一的，但是肯・汤普逊（Ken Thompson）发现 4×5 与 5×2 都可以啃咬 8×10.

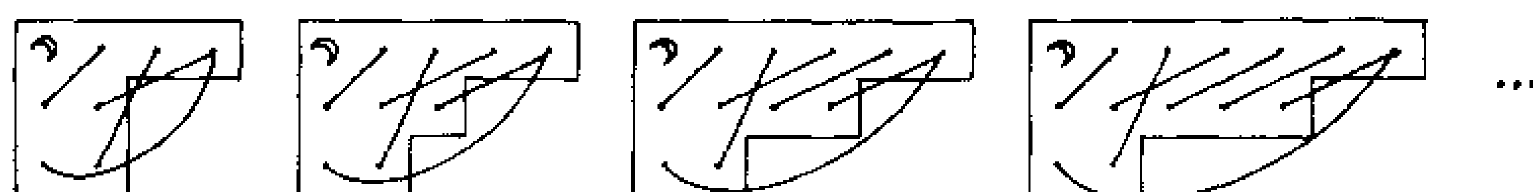
本游戏的算术形式的发明权属于弗莱特・席罕（Fred Schuh），几何形式的发明人则是戴维・盖尔（David Gale）.

---

* 译者注：此词原意为大声咀嚼，不断地咀嚼，即吃得津津有味.

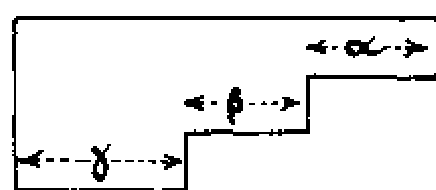


良好回应由联结线表示.



β\γ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0	1	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	11	11	12	12	13	14	15	15	16	17	17	18	19	19
1	1	0	2	3	4	3	5	6	5	7	8	7	10	9	11	10	12	13	14	13	15	16	15	17	18	17	20
2				0	4	4	5	3	6	3	8	9	8	7	7	11	8	10	11	14	15	13	16	17	18	19	18
3					0	4	0	5	6	6	8	3	9	9	10	11	12	12	8	14	10	15	16	12	18	13	19
4								5	0	6	0	8	3	9	10	11	10	12	13	8	14	8	10	16	10	18	13
5												8	0	9	3	3	11	12	11	13	14	15	15	8	17	8	18
6												8		0	9	10	11	3	12	13	14	13	15	16	17	17	18
7												3			9	0	0	11	12	3	14	14	15	16	10	13	8
8												7						11	0	12	3	14	3	13	16	16	17
9												7								12	0	14	14	15	3	16	3
10																						0	14	0	15	16	16
11																									15	0	16

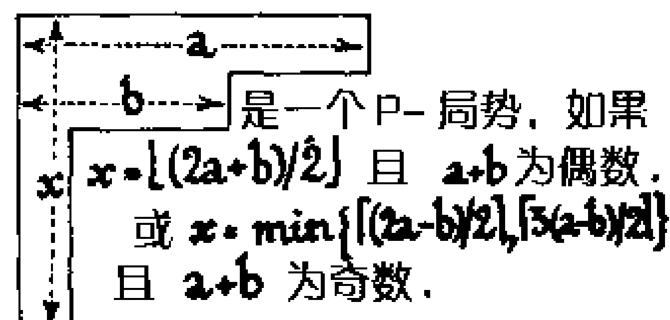
α 的值以便使



为一 P 局势.

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	ↄ	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5	1×6	1×7	1×8	1×9	1×10	1×11	1×12	1×13	1×14	1×15
2	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1
3	2×1	1×1	2×2	2×2	1×2	2×3	1×3	2×4	1×3	2×5	2×5	1×4	2×6	1×4	2×7	2×7
4	3×1	1×1	2×2	3×3	2×3	3×4	2×4	3×5								
5	4×1	1×1	2×1	3×2	4×4	3×3	4×5									
6	5×1	1×1	3×2	4×3	3×3	5×5										
7	6×1	1×1	3×1	4×2	5×4		6×6									
8	7×1	1×1	4×2	5×3				7×7		{4×5, 5×2}						

a×b 矩形中的获胜啃咬法



是一个 P- 局势, 如果 $x=\lfloor(2a+b)/2\rfloor$ 且 $a+b$ 为偶数. 或 $x=\min\{\lceil(2a-b)/2\rceil,\lceil 3(a-b)/2\rceil\}$ 且 $a+b$ 为奇数.

图 12. "吃巧克力"游戏中的 𝒫—局势.

之字形游戏

两位局中人轮流提出不同的数目(它们也可以是分数或负数). 一旦序列中含有一个长度为 a 的递增子序列或长度为 b 的递减子序列,游戏即告结束. 由于正常形式的 $a+1,b+1$ 游戏实质上就是反常形式的 a,b 游戏,因而我们只讨论后者.

由 S·法琪洛维茨(S. Fajtlowicz)提供给我们的之字形游戏,听起来似乎很难分析,幸而存在着一种极巧妙的变换,可以将它转化为几何形式的游戏,例如上面所说的吃巧克力糖游戏. 如果迄今为止的数列中含有一个长度为 r 的递增子序列,长度为 r 的递降子序列并以同一数字结尾,则我们就认作图 13 中的(r,s)格子已被吃掉. 这样一来,各种走法便像"吃巧克力"游戏一样,除了第一步动作可以只吃掉(1,1),在随后的行动中,被吃掉的. 最靠里面的格子必须同以前被吃掉的格子毗邻. 由于格子$(a,1)$,$(1,b)$有毒,所以游戏实际上是在图 13 被框起来的 $a-1\times b-1$ **巧克力块**中进行.

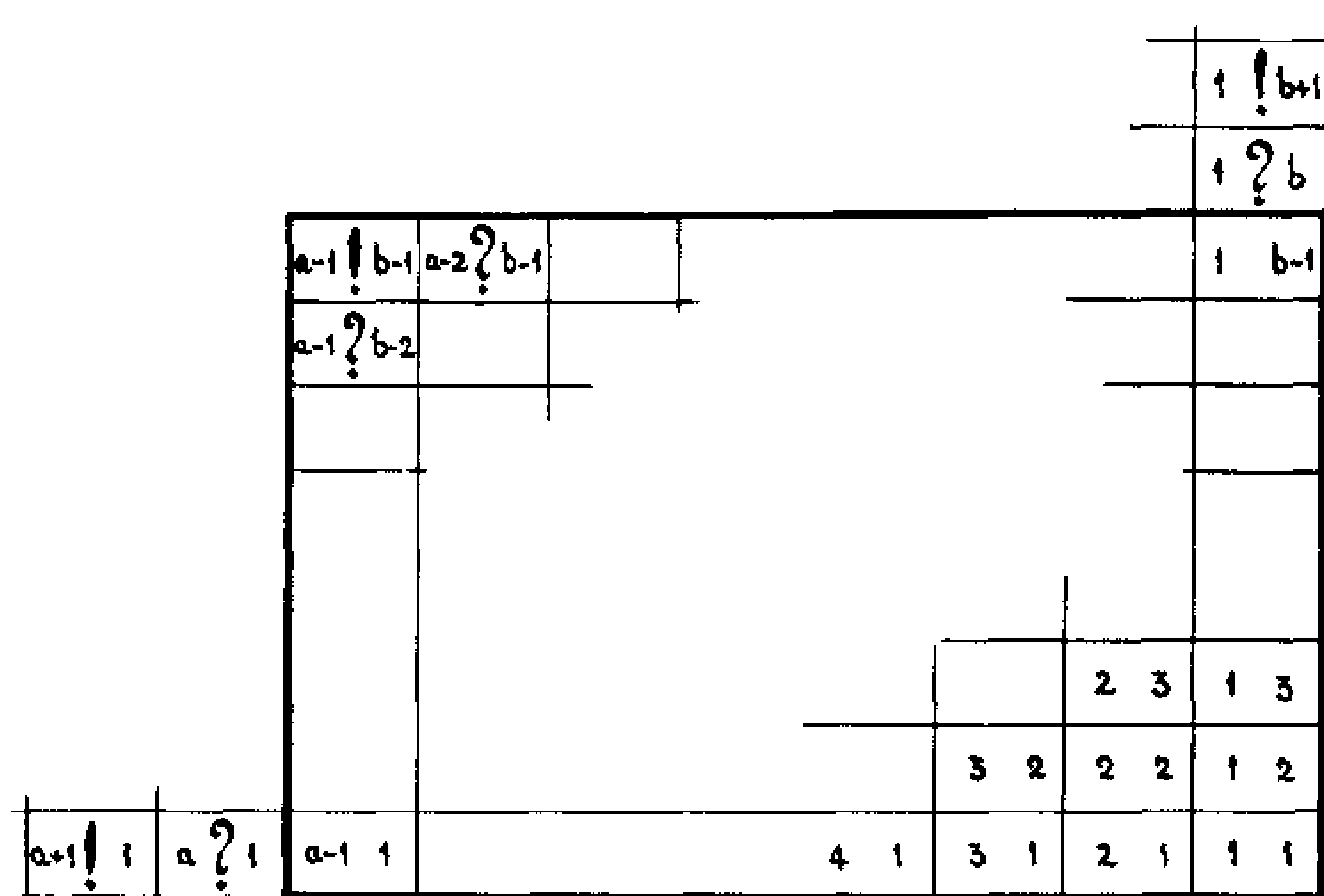


图 13. 之字形游戏的巧克力块形式.

如果 $a\geqslant3$,$b\geqslant3$,且 $a+b\leqslant17$,则先走者将可赢得 a 递增,b 递减游戏,这是由于戴维·西尔(David Seal)的计算已经表明,与之相应的$(a-1)\times(b-1)$巧克力糖块是 $\mathscr{N}$—局势之故.

如果把钱币的正面指定为水平边，反面作为垂直边，我们即可得出一种对应的钱币序列游戏，其中包含右侧头大于尾或左侧. 尾大于头的行动，西尔正是利用了这一概念来计算图 14，给出了所有位于 5×5 糖块内部，尚未吃掉的巧克力糖的 𝒫 -局势.

为了找出吃巧克力与之字形游戏的 𝒫—局势，我们利用了第 15 章的造表法，以及本章的结党(派系)办法.

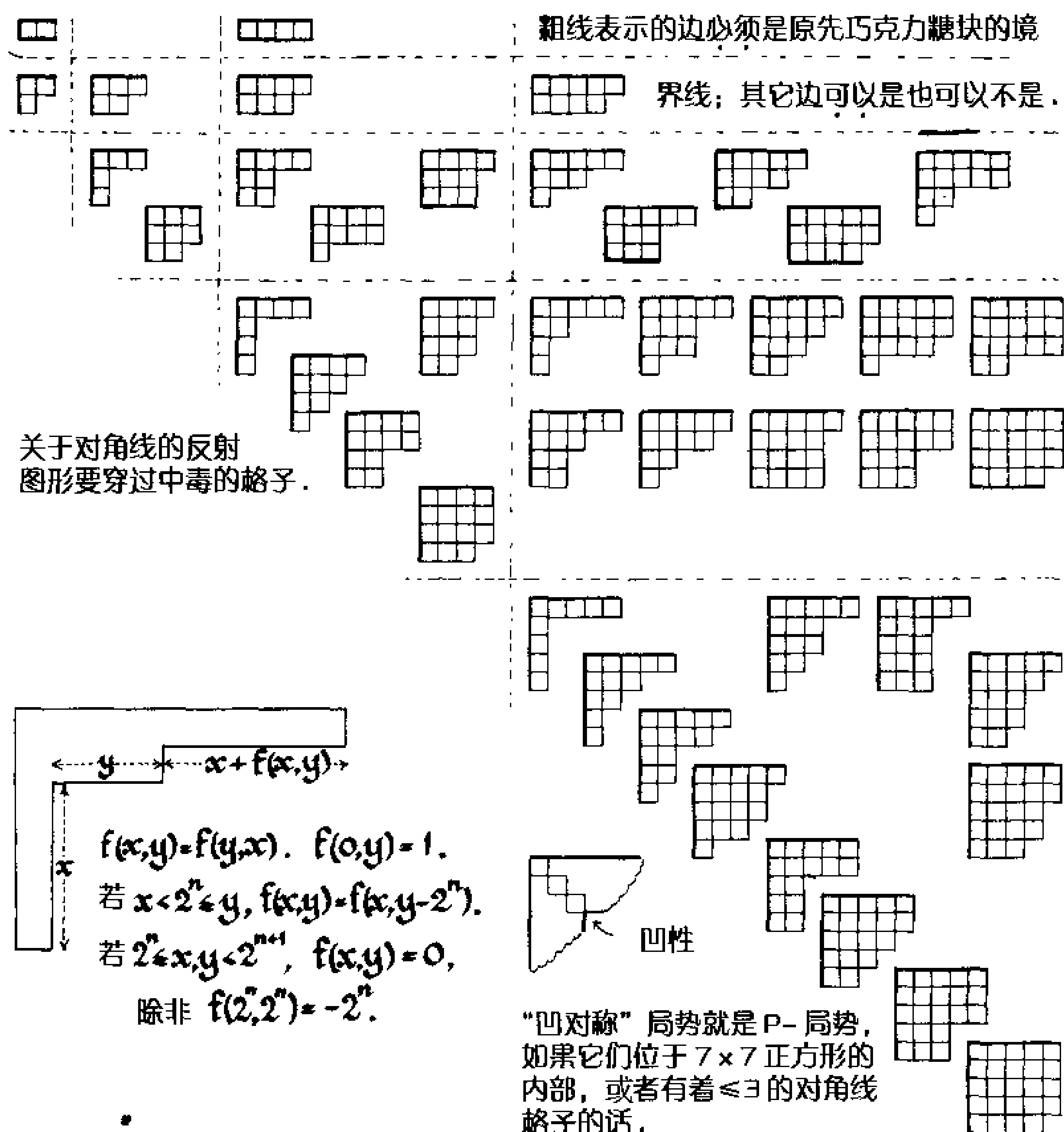


图 14. 之字形游戏的 𝒫—局势.

西尔维钱币游戏的更多派系

为了领会表 6 中的派系，我们建议你从剩下来的数字着手，就像我们在图 2,3,4 中对{4,5},{6,7},{7,10,12}所做的. 未提到的数字已被良好回应排除了.

局势	回应	策略，派系由] 表示
{4,5}	11!	1?](2,3)](6,7)]11!
{4,7}	13!	1?](2,3)](5,6)](9,10)]13!
{4,9}	19!	1?](2,3)](5,11)(6,11)(7,10)](14,15)]19!
{5,6}	19!	1?](2,3)](4,7)](8,9)](13,14)]19!
{5,7}	8!	1?](2,3)](4,6)(9,13)(11,13)8!
{5,8}	7!	1?](2,3)](4,11)(6,9)7!
{5,9}	31!	1?](2,3)](4,11)(6,8)(7,13)](12,16)](17,21)](22,26)]31!
{6,7}	16!	1?](2,3)](4,5)](8,9)(8,10)(8,11)(9,10)(9,11)](15,23)(17,22)16!
{7,8}	5!	1?](2,3)](4,13)(6,9)(6,10)(6,11)5!
{7,9}	19!24!	1?](2,3)](4,10)(5,13)(6,8)(6,10)(6,11)](12,15)(17,20)(22,26)(29,33)19!24!
		after {7,9,22,26} (12,17)(19,24)(15,20)
		{7,9,29,33} (12,15)(17,20)(19,31)(22,26)(24,26) …
		{7,9,19} (12,15)(15,17)(15,20)](22,24)(29,31)
		{7,9,24} (12,15)(17,20)(19,22)](26,29)

表 6. 西尔维钱币游戏中的某些完整策略.

5 的对子

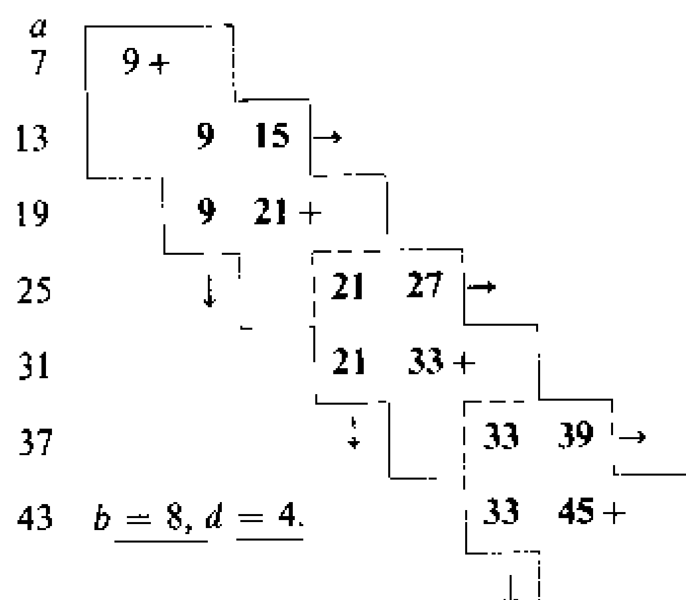
安全组合$\{5,x,y\}$有三种类型. 在图 8 的上面一只抽屉里，y 要大于 x 的，所以坐标$\{a,b,c,d\}$是$\{x,2x,3x,y\}$. 对这些数而言，y/x 似乎趋近于 3. 然而上面这只抽屉里是否存在着无穷多个数目呢?

中间一只抽屉里收有剩下来的一些数目，其时 $x+y$ 应为 5 的倍数. 对这些数目，看来似乎 x,y 总是相差 1 或 2.

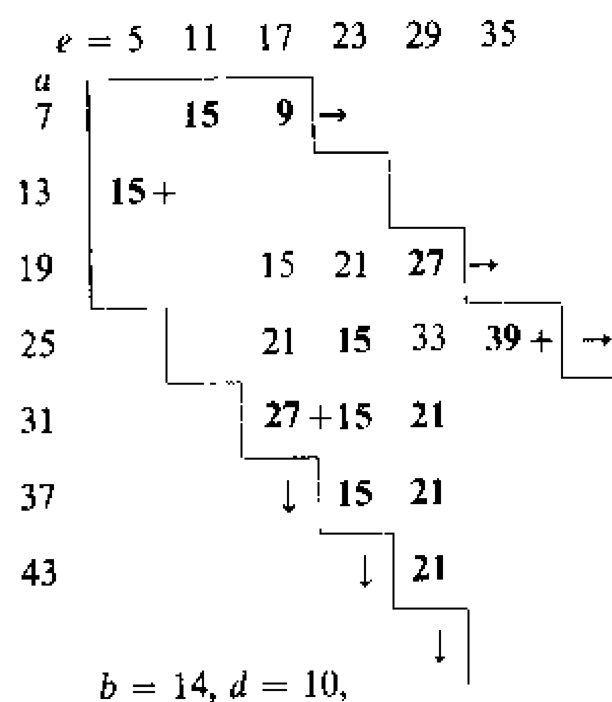
在底下的一只抽屉里我们安排了一些坐标为$\{x,y,x+y,2y\}$的一些对子，其中 x,y 按给定顺序排列. 同第二只抽屉一样，这里看来似乎 y/x 趋近于 1.

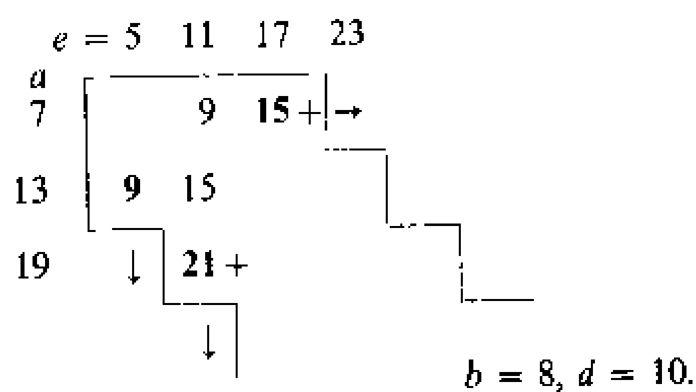
含 6 的局势

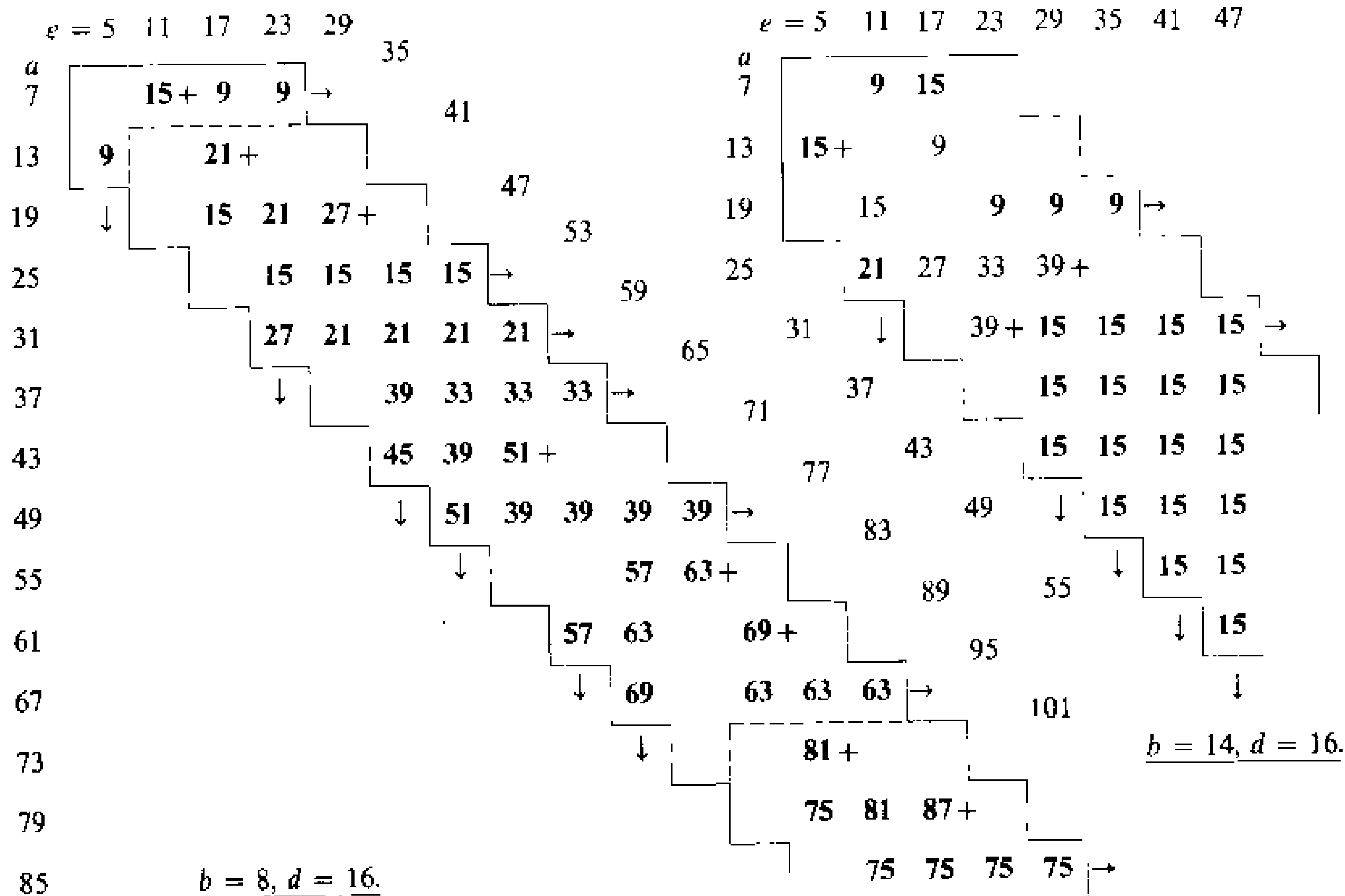
如同我们的其他分析那样，我们把数目字书写在六个纵列里，圈出 0 与其他五个数 a,b,c,d,e，它们分别位于第 1,2,3,4,5 列. 我们用一张四维表格(表 7)，通过表中数字 c 来列出 $\mathscr{P}$一局



表中数字 c≡3，模 6．黑体字表示行或列的表头是冗余的．表中数字可按箭头作无限重复．







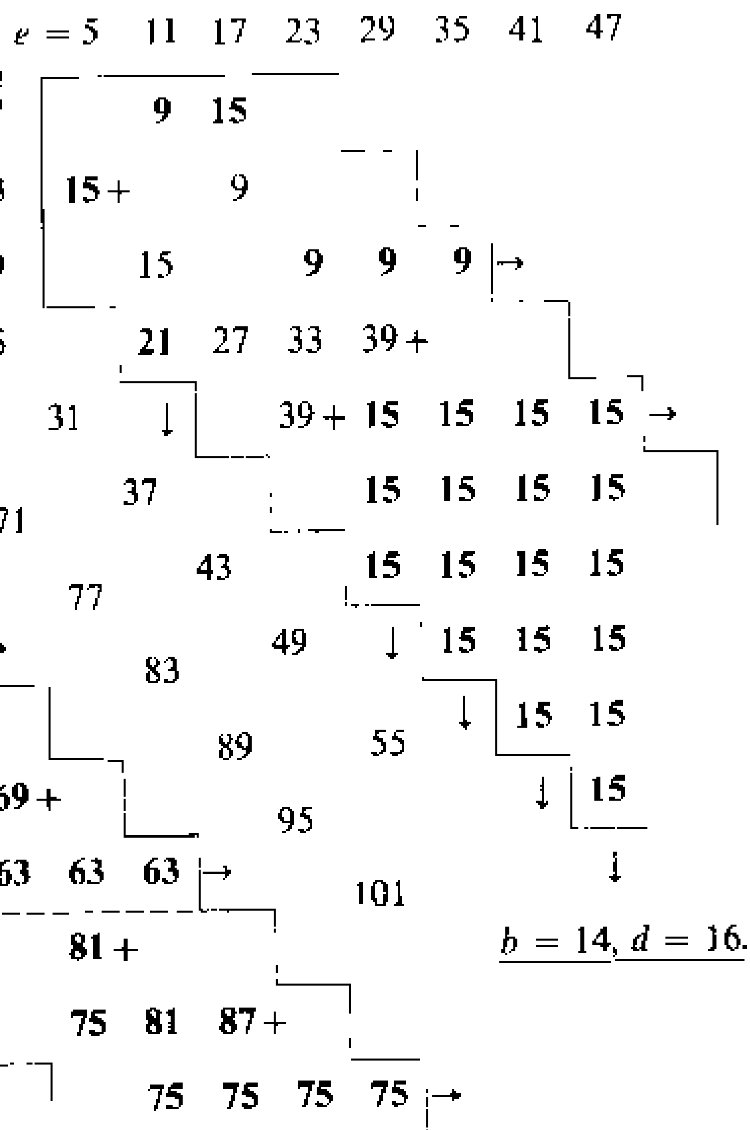


表 7．含 6 的 $\mathscr{P}$—局势．

势，其坐标 a,b,d,e 按模 6 同余于 1,2,4,5.

实线围起来的区域外面的表中数字，可按箭头所示，适当重复表中数字而推出. $b=8,d=4$ 以及 $b=8,d=16$ 的表格可以无限重复，只要重复虚线所围成的区域，并将表中数字分别增加 12 与 60. $d=10,b=8$ 或 14 的两张表格不再给出更多的表中数字了. 在 $b=14,d=16$ 的表格中，如果要得出更多的表中数字的话，它们统统都是**15**.

西尔维钱币游戏有无穷多尼姆值

如果我们把提名 1 视为**非法**之举，而不是**笨拙**走法则西尔维钱币游戏将变成正常而不是反常游戏，而我们将可利用斯普莱格—格隆第理论将它添加到其他游戏中去. 尽管如此，由于某些局势有着无穷多的选择，我们将可期望无限尼姆值的出现，事实上果然如此.

例如，$\mathcal{G}(2,2n+3)=n(n\geqslant 0)$，于是 $\mathcal{G}(2)=\omega$. 另一方面，$\mathcal{G}(3,3n+1,3n+2)=1(n\geqslant 3)$，从而 $\mathcal{G}(3)=1$. 以下给出一些其他尼姆值：

$k=$	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	19	20	22	23	25	26	28	29	31	32
$\mathcal{G}(3,k)=$	2	3	1	4	6	1	7	8	9	11	1	12	14	15	15	17	19	20	21	23	24	26	27
$\mathcal{G}(4,k)=$	?	3	0	5	?	8	1	9	14	4	15	?	16	19	?								

$$\mathcal{G}(4,6,4n-1,4n+1)=1,\mathcal{G}(4,6,4n+1,4n+3)=0\quad(n\geqslant 1),$$

$$\mathcal{G}(5,6)=7,\mathcal{G}(5,7)=8,\mathcal{G}(5,8)=10,\quad \mathcal{G}(6,7)=9,\quad \mathcal{G}(3,3n-1,3n+1)=5\quad(n\geqslant 6),$$

$$\mathcal{G}(3,9n-8,9n-4)=\mathcal{G}(3,9n+2,9n+7)=\mathcal{G}(3,9n+8,9n+13)=10\quad(n\geqslant 3).$$

最后一些问题

对**一般局**势来说，有没有什么有效办法来算出结果与一切良好回应？

如果游戏是在“聪明的对手”之间进行，先走者有何办法来束缚输家？

对有限的长度，是否存在取胜策略？

是否存在 $g>1$ 的一个 $\mathcal{N}$—局势，使**一切**良好回应都导致于 $g=1$ 的局势？

$\mathcal{G}(4)$是否等于 $\omega+1$？还是等于别的数字，譬如说，$\mathcal{G}(4)=6$？

	5,8 5	8,11 8	11,4 11	14,17 14	17,20 17	20,23 20	23,26 23	26,29 26	29,32 29	32,35 32	35,38 35	38,41 38	41,44 41	44,47 44	47,50 47	50,53 50	53,56 53	56,59 56	59,62 59	62,65 62	65,68 65	68,71 68	71,74 71
4,7	+ +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
4	− −	+ −	+ +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
7,10	− −	+ −	− −	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +
7	− −	− +	+ +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
10,13	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
10	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
13,16	+ −	− −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +
13	+ −	− −	− −	− +	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
16,19	+ −	− −	− −	− +	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
16	+ −	− −	− −	− −	− +	− +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
19,22	+ −	− −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +
19	+ −	− −	− −	− −	− +	− +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
22,25	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	= −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
22	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− +	− +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
25,28	+ −	− −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +	+ +
25	+ −	− −	− −	+ −	− −	− −	− +	− +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− +
28,31	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	= −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
28	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− +	− +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −
31,34	+ −	− −	− −	− −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ −	− −	+ +	+ +	+ +	+ +
31	+ −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− +	− +	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −	− −

34,37	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	=−	−−	−−
34	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−
37,40	+−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−
37	+−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−
40,43	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−
40	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−
43,46	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	
43	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	
46,49	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−		
46	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−	−−	−−	−−	−−		
49,52	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	=−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−			
49	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−	−−	−−	−−			
52,55	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−				
52	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+	−−				
55,58	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−					
55	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−+	−+					
58,61	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−						
58	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−						
61,64	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	=−	−−	+−	−−	+−	−−	+−							
61	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−	−−							
64,67	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−	−−	+−								
64	+−	−−	−−	−−	−−	−−	+−	−−	+−	−−	−−	−−	−−	−−	−−								

表 8. {6, 9} 的完整讨论.

本表给出了局势 {6, 9} 的完整分析. 简化的局势含有一个，也有可能两个 $3k+1$ 或 $3k+2$ 的相邻数. 行或列的对子相应于后者或前者. 雉堞线外面区域的局势未予简化. 矩形象限内的模式可以无限重复下去，表中的负号代表$\mathcal{N}$–局势，正号代表$\mathcal{P}$–局势，“＝”号也代表$\mathcal{N}$–局势. 如果漫不经心地观察模式的话，有可能把它误会为$\mathcal{P}$–局势的.

第19章

国王与食客

天使不敢涉足的地方,傻瓜们却蜂拥而入.

——教皇亚历山大,《批判随笔》

……你的魔鬼对手像是一头咆哮的狮子.
正在走来走去寻找它可以吞噬的对象.

《彼得福音》,1:5:8

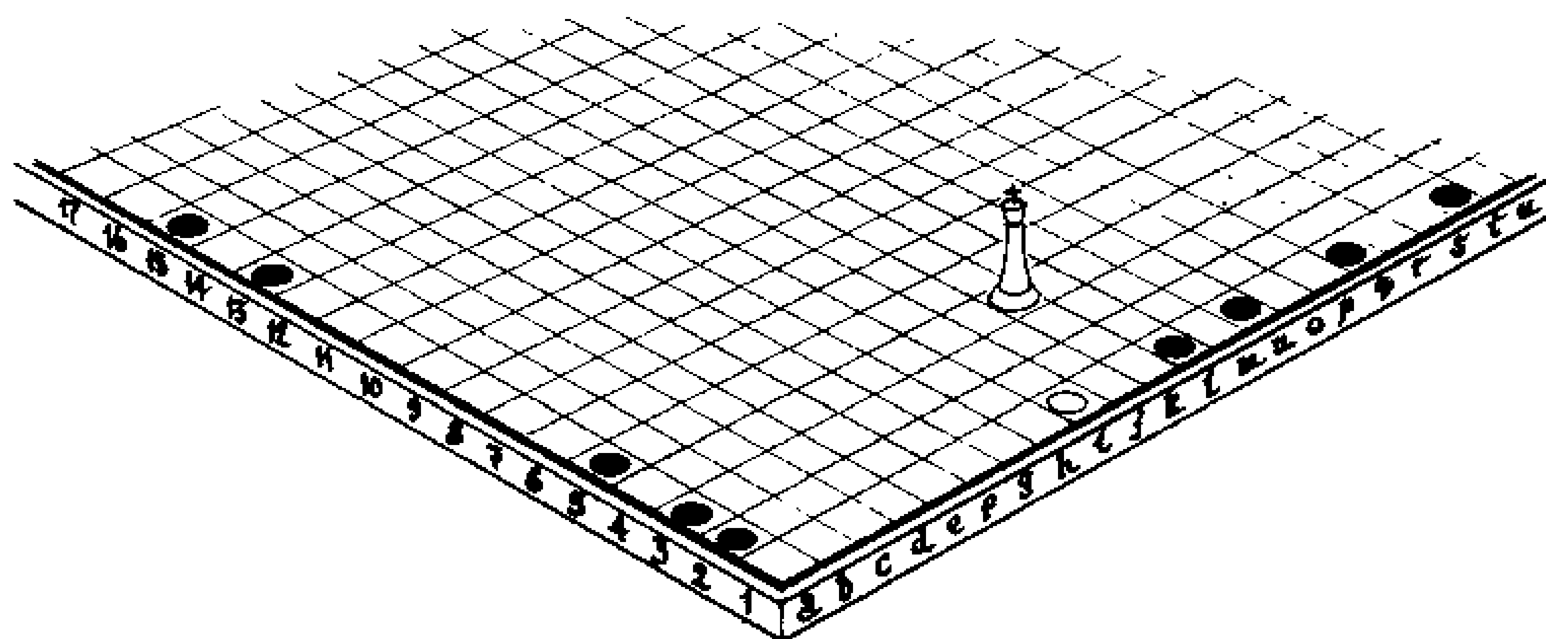


图 1. 赶路者与老土地*在下棋.

---

* 译者注:Geo·　老土地,即 George(乔治),英国的守护神.

走子象棋,国王行走棋与大公行走棋

这些游戏是在某个 $i \times j$ 棋盘上来玩的. 一位局中人(称为赶路者)的手中有一只孤立的棋子,它可以是国王,骑士,大公或贵人*,它们的走法如图 2 所示. 这类游戏的名称随着不同的棋子(普通棋子或"神仙"棋子)而定,如果赶路者手中拿的是一枚王棋,则棋戏名称便是王走棋,……如此等等. 下面我们只讨论王走棋及大公行走棋(简称公走棋).

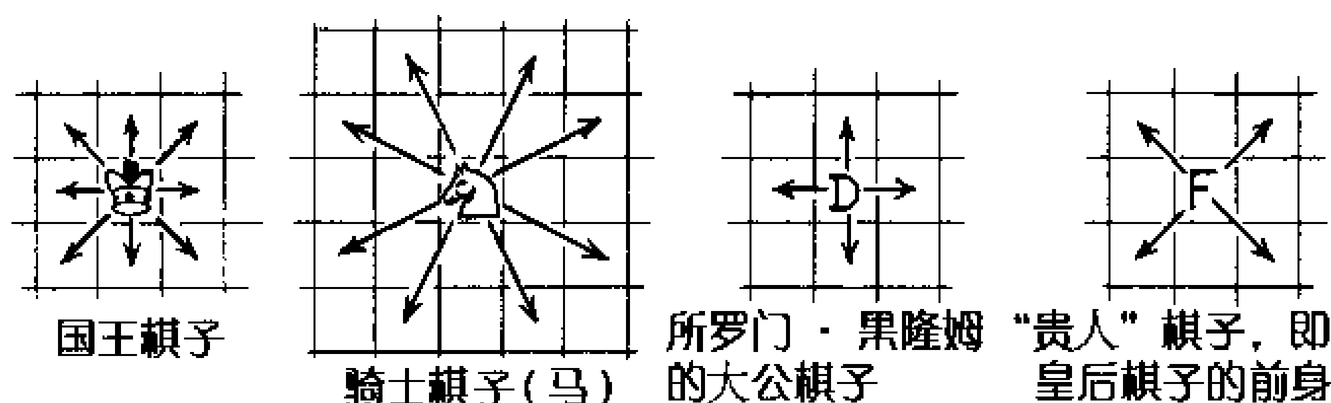


图 2. 各式各样的棋子.

赶路者的对手名叫老土地,他的手中有着一批黑棋(封锁用),一批白棋(游荡用). 开局时,长棋子**放在空棋盘的一个特定方格里. 双方轮流下棋,赶路者每次可将他的棋子按棋子走法移动到一个空格里,而老土地则可在以下三种走法中任择其一:

(a) 把一枚新的围棋子(黑子或白子均可)放入任意空格中去;

(b) 把已经在棋盘上的一枚游荡棋子(白子)走到任意一个其他空格;

(c) 派司(弃权不走,把走子权拱手让给对方).

如果长棋子能走到棋盘边缘上的任何一格中去,赶路者就是赢家. 反之,如果老土地能困死长棋子,使它无法行动,那他就赢了. 如果双方都能无休无止地一直走下去,那就是打成平局,不分胜负.

吃格子游戏

它是 R·埃泼斯坦所发明的游戏的特例,这里既没有游荡子,也没有足以覆盖全部拱盘的

* 译者注:东汉皇帝的习惯做法是在他的四位爱妃("贵人")中,挑选一人立为"皇后". 所以"贵人"就是皇后的前身.

** 译者注:立体形状的国际象棋棋子,见图 1. 做本游戏时要使用两种棋子:国际象棋子与围棋子.

封锁子. 本章的标题已经指明,在这类吃格子游戏中,赶路者手中的棋子是一枚王棋. 用埃泼斯坦的话来讲,老土地是个"吃格子者"(希腊—拉丁语中称为 tesseravore,拉丁—希腊中则叫做 quadraphage). 由于老土地每走一步就要吃掉一格,所以在 $i\times j$ 棋盘上,这种游戏至多只能维持 $ij-1$ 步. 开始时,习惯上总是把棋子放在棋盘的中心,如果 i,j 都是偶数,则应把它尽可能放在与中心最靠近的位置.

由于先走者决不会吃亏,采取依样画葫芦论证法将可表明,在有限棋盘上按正确战略行走的吃格子游戏只能有三种可能结局:老土地是赢家(即便赶路者先走),赶路者是赢家(即便老土地先走),或者先走的人是赢家. 所谓**好局势**是指先走者能赢的局势.

我们将证明:四分之一无限长棋盘上大公的好局势都必须是位于第三排的方格(除了已经在第一排或第二排上的方格之外). 我们也将证明,在这种棋盘上王棋的好局势都必须是位于第九排的方格(除了已经处于较小排数的那些方格). 最后,我们还将证明,对大公来说,**好**局势的方形棋盘(对传统的初始状态而言)就是通常的 8×8 国际象棋棋盘,而且我们断言,对王棋来说,既是好局势又是正方形的唯一棋盘乃是 33×33 或 34×34. 如果棋盘较此为小,那么即便老土地先走,赶路者也会赢. 而在较它大的棋盘上,情况正好相反.

天使与吃格子魔鬼

人们对走子象棋的了解程度仍然很不够,甚至在中等大小的棋盘上,也不易为赶路者指出其彰明较著的取胜策略. 譬如说,在无限长棋盘上,有骑士的一方似乎总能打成平局,但要想证明此事却极其困难.

不要说骑士了,甚至对任何象棋棋子(从广义来看)都尚来证明它能在无限长棋盘上打成平局,从而启示人们去考虑下列问题. 一位**天使**棋子的能力可以达到 1 000 的程度. 它一步就能"飞"到普通王棋走 1 000 步才能达到的方格. 既然称为天使,当然是生着翅膀的,所以即便中间有些方格已被吃掉也不碍事.

如果天使能够永远飞来飞去,对付一个吃格子魔鬼(他能够吞吃棋盘上任何格子,而不管它离得有多远),那么我们就认为天使是赢家. 反之,如果魔鬼能在天使的外围,开出一条硝烟弥漫的,宽度达到 1 000 个格子的深沟,那么魔鬼当然是赢家啦! 你能不能为天使指出一个保证能赢的明确战略呢?

如果魔鬼方面能采用安德烈斯 · 勃拉斯(Andreas Blass)以及约翰 · 康威为他设计的某些巧妙战术,那么天使将会发现他从中心飞出去的距离将会越来越小,其减少数量将变得任意大,

此种不利情况将出现无限多次. 尽管天使从来不像会处于真正的危险境地,但他的飞行路线将含有弯曲得非常厉害的螺线.

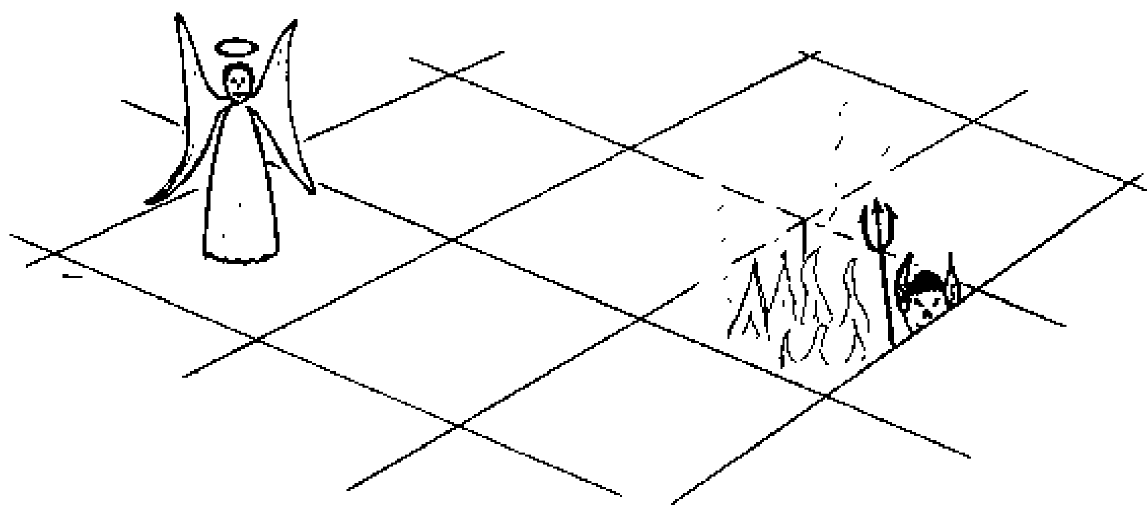


图 3. 天使与吃格子魔鬼.

战略与战术

在王走棋与大公行走棋中都有可能区别战略行动与战术行动. 不论属于何者,老土地一方在足够大的棋盘上都能取胜. 他的办法是:在离开棋子很远的地方先摆放一些战略棋子. 当对方的棋子离开棋盘边缘越来越近时,老土地就转而采取战术性行动. 一旦赶路人的棋子从边缘被驱赶到棋盘中央时,老土地又返回到战略性走法.

大公行走棋

由于大公行走棋要比王走棋简单得多,所以让我们先来讨论它. 兴许你在阅读本节之前就想自己先来玩玩. 我们在这里提供的最佳策略由所罗门·果隆姆(Solomon Golomb)首先发现. 下面让我们先考虑各式各样的无限长棋盘.

在一个无限长的半平面上,大公方面唯一的获胜机会是他第一步就能走到棋盘的边缘上. 除此之外,在任何其他情况下,老土地总是可以在大公与棋盘边缘之间下出一子,使之隔离. 实际上,老土地只需一颗白子(游荡子)就能达到目的.

在宽度为 i 的无穷长条带上,如果 $i\leqslant 4$,如果大公一方先走,他马上就赢了. 但若 $i\geqslant 4$ 而老土地先走,那么他可以在大公与最接近的边缘之间下子加以阻挡,所以他仍然只要用一颗白的游荡子即已足够.

在一个无限长的四分之一平面上,如果大公一方先走,如果开始时他是在距边缘三格以内,

那他一定能赢. 此时他可以走出直趋边界的一步棋子,老土地将别无其他选择,只好在大公与棋盘边缘之间走子加以阻断. 这时大公就可以趋角行进. 老土地被迫,只好在大公与棋盘边缘之间下子,最后,大公到达距边缘两格处的一个方格子里,从而"一箭双雕"而最终赢了.

如果老土地先走,对付无限长四分之一平面上位于第三排格子上的大公棋子,那么他只要用一枚封锁子与一枚游荡子即可达到阻挡目的. 第一步,他可以把封锁子放到距角只有一步之遥的战略位置上(见图 4). 这样就封锁了大公方面唯一的、可以同时攻击两个边缘格子的战略咽喉. 在此之后,不管大公方面走到哪里(用小写字母表示),老土地都可以将他的游荡子放在相应的大写字母格子里加以阻挡.

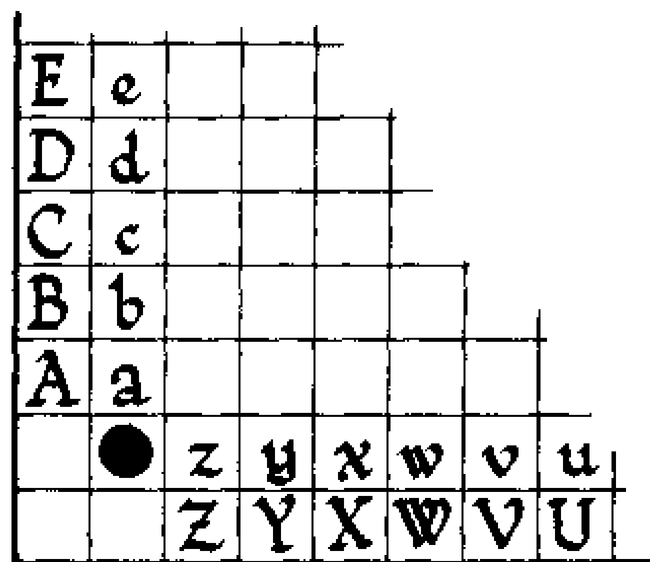


图 4. 在四分之一无限长棋盘上,老土地怎样击败大公.

在一个 $8\times j$ 棋盘上,不论 j 是什么数值,若大公先走,那么他一定能赢,而不问老土地有多少棋子. 大公方面先朝着最近的棋盘边缘冲过去,从而到达第三排战线. 如果老土地封住他的前进道路,那么大公将沿边疾进,而在犄角之一取胜. 如果老土地并不立即封锁进路,则大公的第二步行动将使他走到毗邻边缘的一格,老土地在棋盘上下出第二子. 老土地的两颗棋子中,有一颗必定是下在大公下面的边缘格子里. 如果另一颗子下在它的左面,则大公就向右走;如果下在它的右面,那么大公就向左走. 不管怎样,大公最终将在另一角取得胜利.

在 $7\times j$ 棋盘上,即使老土地先走,大公也能赢,他只要先看一看,棋盘的哪一半不包含老土地开局的一子,朝着那一边冲过去就行了.

在 8×8 棋盘上,老土地只要用三枚游荡子(见图 5)即可达到阻挡目的. 他总是作出安排,把他的棋子放在大写字母的位置以对付大公所走到的小写字母方格. 由于任意两个相邻格子中小写字母组合之差异都不超过一个字母,所以这件事总是可以做得到的. 老土地使用面只游荡子,两只封锁子即可完成阻挡任务,把封锁子置放在 A 与 C 处. 这一着之所以起作用是由于每一个含有三字母的格子里总是会包含 a 或 c 中的一个. 他可以用一个游荡子与置放在 A,B,C,D 处

的四个封锁子达到阻挡目的. 不过,如果老土地没有游荡子,那么他究竟要用多少封锁子就要困难得多. 表 1 对公走棋中的好的开局形势作了一番总结:

		E	F	G	H		
	A	abe	abf	abg	abh	B	
T	adt	abd	ab	ab	abc	bci	I
S	ads	ad	a	b	bc	bcj	J
R	adr	ad	d	c	bc	bck	K
Q	adq	acd	cd	cd	bcd	bcl	L
	D	cdp	cdo	cdn	cdm	C	
		P	O	N	M		

图 5. 老土地在普通国际象棋盘上击败大公.

棋盘的大小	初始位置	老土地先走,至少能打成平局时所需要的最少子数
$4\times\infty$	中　心	1 个游荡子
四分之一无限长	第三排格子,但第一、二排要除外	1 个游荡子 1 个封锁子
$8\times j, j\geqslant 8$	中心	3 个游荡子,或 2 个游荡子,2 个封锁子或 1 个游荡子,4 个封锁子或? 个封锁子

表 1. 公走棋的好局面.

王走棋

本章的剩余几节是专讲王走棋的.

冲向边缘

图 6 表明,距王棋甚近之棋盘边缘,如果防卫不够时,王棋一方冲击它的办法. 图上的粗线

是棋盘之边缘，小圆点则为王棋的目前位置. 写着字母的格子是空的；围棋子可占据任何方格或所有其他方格. 在每一种情况下都是由老土地来走棋.

倘若老土地在所示区域的外面走子，那么王棋只要直接冲向边缘就行；如果老土地走到字母 x 或 x'($x=a,b,\cdots,g$)，则王棋的走动结果应该得出图 6(x)或其反射图形. 例如，假走老土地在图 6(f)的右下角下一子（标记 d'的格子），则王棋可朝下走，从而得出图 6(d)的反射图形.

现在，只要看一看图 7 与图 6(h)，就可得出结论：

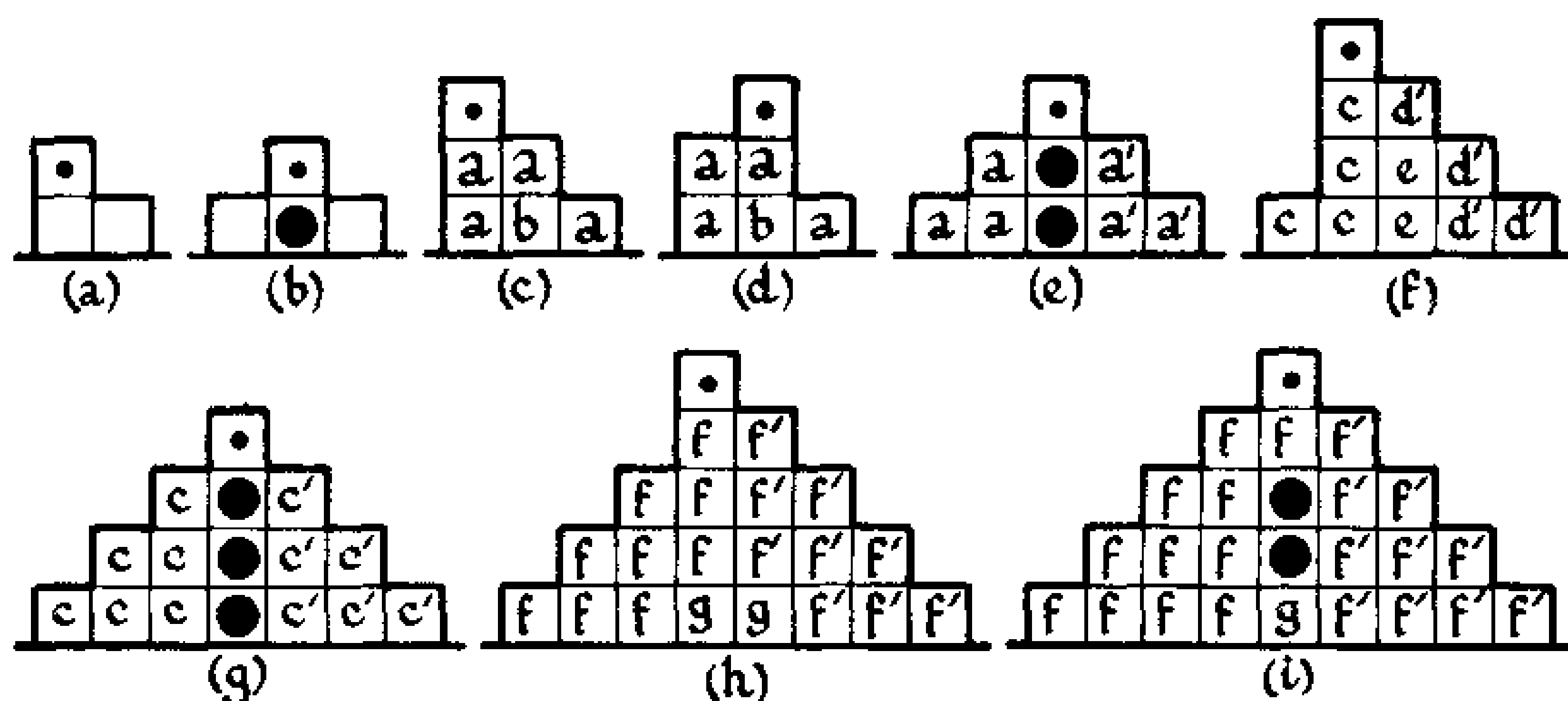


图 6. 王棋怎样走到棋盘的边缘.

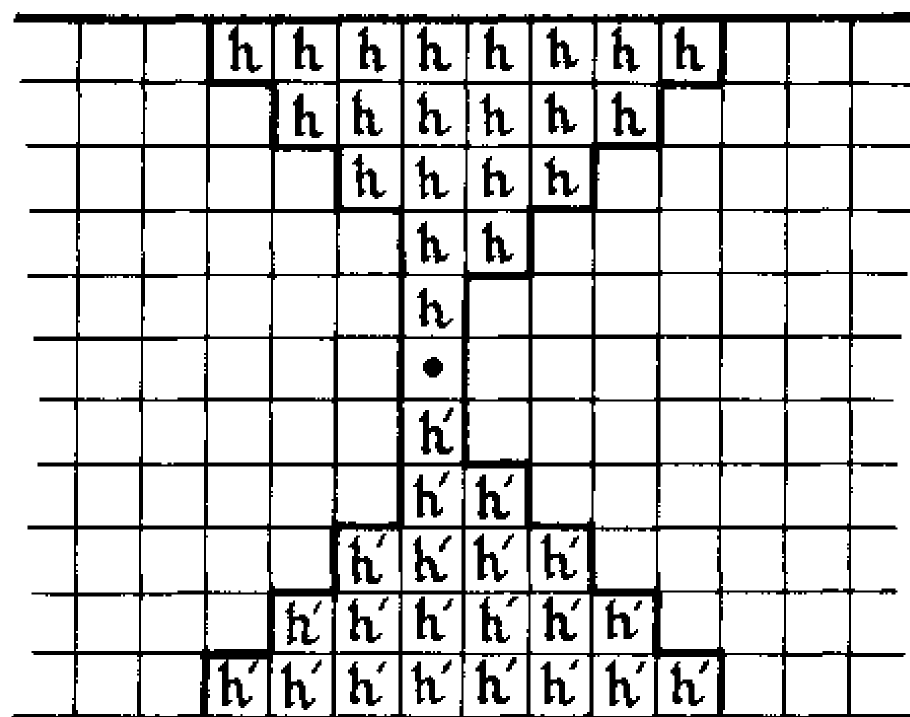


图 7. 王棋怎样在宽度为 11 的无限长条带上取胜.

> 即使老土地先走，王棋仍然能在宽度至多为 11 的无限长条带上取胜.

棋盘边缘的保卫

图 8(仍须回头参照图 6)表明，足以阻挡王棋从空白棋盘的第六线上冲抵边缘的唯一可以采取的走法是图上打着????? 记号的五处. 图 9(k)表明老土地如何运用五者之一成功地捍卫边疆的办法. 王棋可从任一阴影格子出发. 如果它停在这一格里，老土地就可以派司. 当王棋走到字母 x 或 x' 的位置($x=j,k,l,\cdots,q$)，则老土地可以走到图 9(x)的一种情形或其反射图形(犹如他在图 6 中所做的). 要注意图 9(j)到图 9(q)的每一个证明都有赖于其他图形，因为王棋可以很巧妙地从一种局势跳到另一种.

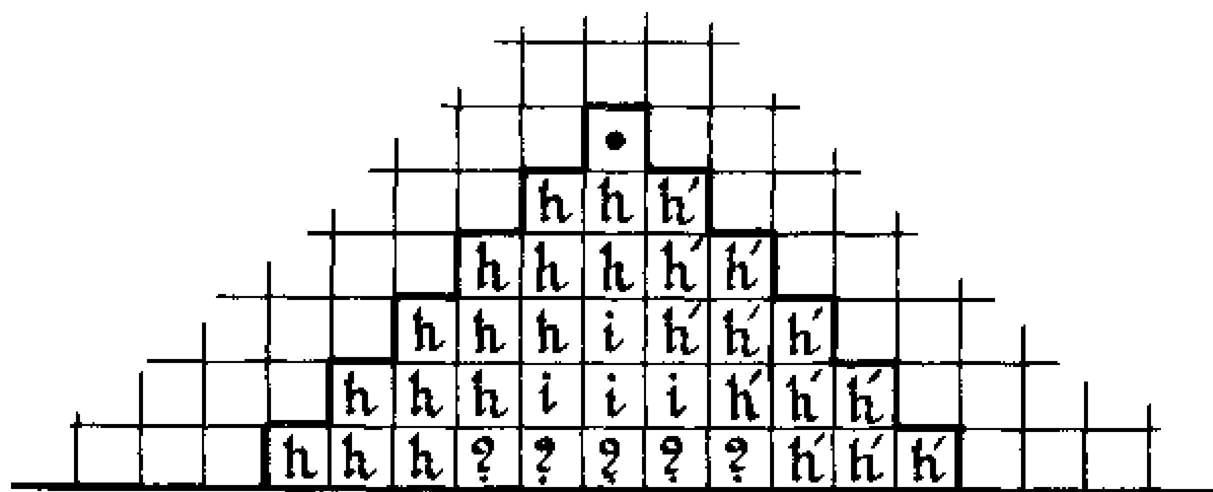


图 8. 老土地保卫边缘，不让王棋走到.

由于在这些局势中，没有一个局势超过三子，所以老土地只要使用三枚游荡子即可守住边缘.

无须死记的边缘防卫法

图 10 采用图 5 的同样记法，它表明老土地怎样通过另一种办法，用三枚游荡子挡住王棋从空白棋盘的第六排方格冲抵边缘的企图. 同图 9 不一样，它无须死记，因为这些棋子的位置只是取决于王棋，而不去研究它是怎样到达那里的.

在本章的后面几节，老土地方面需要把这种守护边缘法(图 11 与图 12)的若干幅复制图形拼补起来使用. 图 11 表明的是左、右镜像的连缀，而图 12 则是改变了一个方格的位相. 通过图 10,11,12 以及它们的平移与反射图形的连接，我们可以得出一些无须死记的边缘防卫法.

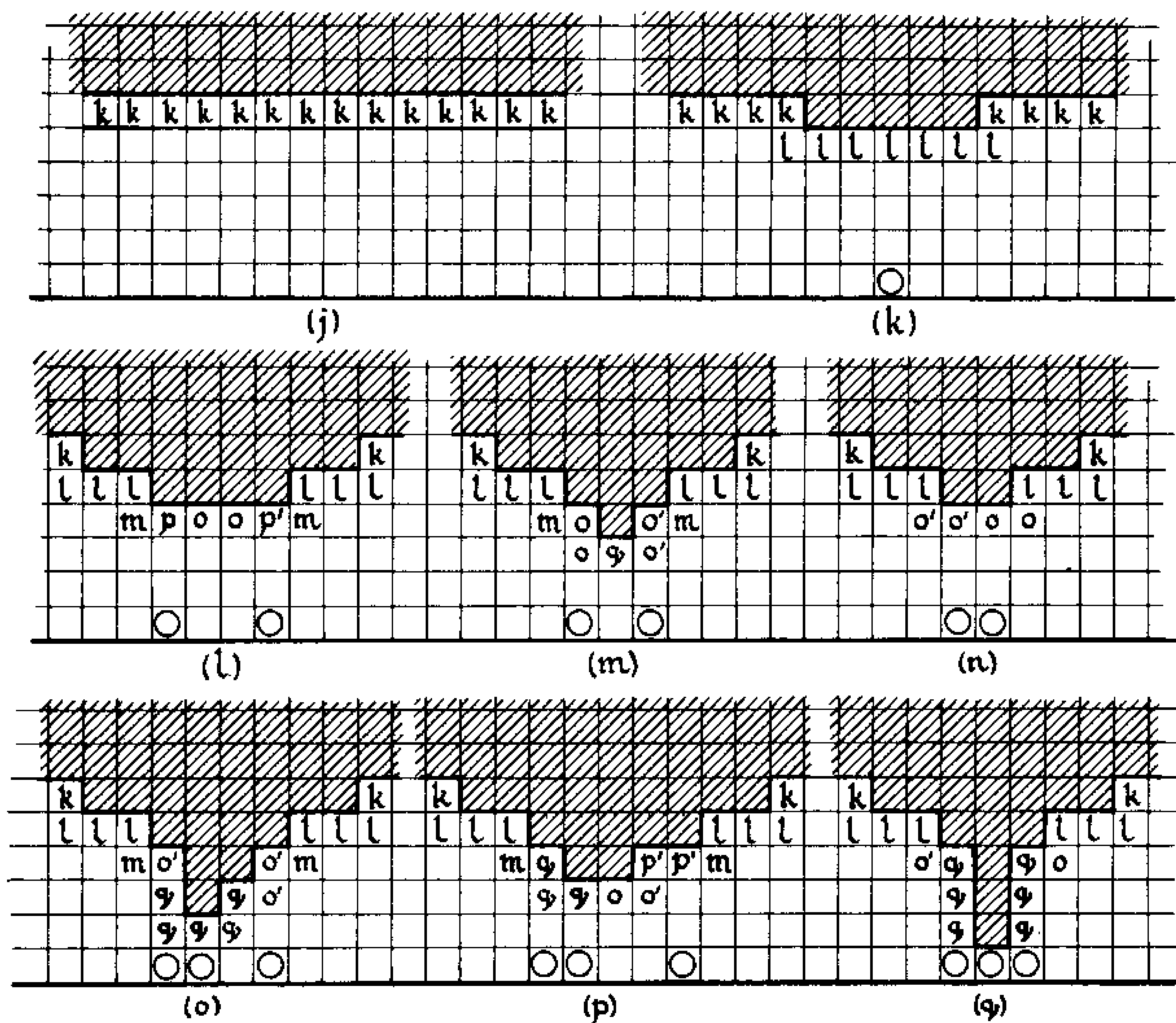


图 9. 三枚游荡子即可阻挡王棋.

		···	c	c	e	e	g	g	i	i	k	k	···		
		···	ac	ce	ce	eg	eg	gi	gi	ik	ik	km	···		
		···	ace	ace	ceg	ceg	egi	egi	gik	gik	ikm	ikm	···		
	···	abc	acd	cde	cef	efg	egh	ghi	gij	ijk	ikl	klm	kmn	···	
	···	abc	bcd	cde	def	efg	fgh	ghi	hij	ijk	jkl	klm	lmn	···	
···	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	···

图 10. 无须死记的王走棋边缘防卫法.

	···	e	g	g	i	i	k	k	k′	k′	i′	i′	g′	g′	e′	···	
	···	eg	eg	gi	gi	ik	ik	kk′	kk′	i′k′	i′k′	i′g′	i′g′	g′e′	g′e′	···	
	···	ceg	egi	egi	gik	gik	ikk′	ikk′	kk′i′	kk′i′	k′i′g′	k′i′g′	i′g′e′	i′g′e′	g′e′c′	···	
	···	efg	egh	ghi	gij	ijk	ikl	[illegible]	[illegible]	l′k′i′	k′j′i′	j′i′g′	i′h′g′	h′g′e′	g′f′e′	···	
	···	efg	fgh	ghi	hij	ijk	jkl	kll′	ll′k′	l′k′j′	k′j′i′	j′i′h′	i′h′g′	h′g′f′	g′f′e′	···	
···	E	F	G	H	I	J	K	L	L′	K′	J′	I′	H′	G′	F′	E′	···

图 11. 把图 10 与其反射图形连接起来.

	···	e	e	g	g	i	i	k	k	k	m	m	o	o	q	q	···	
	···	ce	eg	eg	gi	gi	ik	ik	ik	km	km	mo	mo	oq	oq	qs	···	
	···	ceg	ceg	egi	egi	gik	gik	ijk	ikm	[illegible]	kmo	kmo	moq	moq	oqs	oqs	···	
	···	cde	deg	efg	fgi	ghi	hik	ijk	jkm	klm	kmn	mno	mop	opq	oqr	qrs	···	
···	bcd	cde	def	efg	fgh	ghi	hij	ijk	jkl	klm	lmn	mno	nop	opq	pqr	qrs	rst	···
···	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	···

图 12. 图 10 同伸出一步的自身相连缀.

从图 9,10,11,12 出发,可以立即得出一些有关无限带条的结论:

> 在宽度至少为 12 的无限长带条上,如果老土地先走,他用 3 颗游荡子可以达到阻挡目的,打成平局.
>
> ---
>
> 在无限长带条上,若宽度至少为 13,即使王棋先走,老土地也能达到阻挡目的,打成平局.

如果王棋进犯边缘,则它将在图 9(q)中被遏阻;如果王棋不去进攻边缘,则老土地仍能得到三枚连续棋子,如该图所示.

	对	走到	新位置
(a) 至多两子．不同时在 A，D 上，不同时在 A，C，F 中的两处	A^0	A	
	$A^1B^0C^0D^{\leqslant 1}E^{\leqslant 1}$	C	a
	$A^1B^0C^0D^0E^2$	F	c
	$A^1B^0C^0D^2$	禁止	
	$A^1B^0C^1F^0$	F	b
	$A^1B^0C^1F^1$	禁止	
	$A^1B^1F^0$	F	b
	$A^1B^1F^1$	C	a
(b) 至多一子．	$A^0B^{\leqslant 1}C^{\leqslant 1}$	A	a
	A^0C^2	B	c
	A^0B^2	D	d
	A^1B^0	B	b
	A^1B^1	D	d
(c) 子下在 B，C，D 中之两处，其他地方没有子．	A^0	A	d
	$A^1B^0C^1D^1$	E	—
	$A^1B^1C^0D^1$	E	a
	$A^1B^1C^1D^0$	E	a
(d) 无子	A^0	A	f
	A^1	B	e
(e) 无子	A^0	A	f
	A^1	B	e
(f) 至多一子	A^0	A	g
	A^1B^0	B	f
	A^1B^1	C	e
(g) 至多二子	$A^{\leqslant 1}$	A	—
	A^2B^0	B	b
	A^2B^1	C	d

图 13. 边角攻打.

边角攻打

在一条宽度为 13 的无限长带条上，王棋无法取胜，但是能够逼进到第二排，如图 9(q)所示. 然后他可以在这一战线上双向延伸，迫使老土地伴着他行走. 即使老土地手中有很多棋子，他也只好在第一排筑起一道防堵的长墙，而在一个有限的棋盘上，向边上进逼的王棋最终必能到达角上.

我们现在断言，老土地方面如果想作出有效防卫，他至少要有三枚棋子布置在向边前进的王棋与棋盘的角之间. 所有这三枚棋子都必须放在前面五排的某些位置上. 这一点可由图 13 得到证明. 因为图中已列举出王棋的各种适当走法以对付不满足这些条件的一切位置. 它们是具有前七个大写字母中某一字母的格子以及无穷多个没有字母的格子. 在老土地的动作中他至多只有三枚棋子. 图中有一行写着：

"对 A^0，走到 A，位置 —"

它的意思是指：如果三枚棋子中，没有一枚棋子(上标为 0)在 A 处，则王棋就可走到 A 处并立即获胜.

又有一行写着：

"对 $A^1B^0C^0D^{\leqslant 1}E^{\leqslant 1}$，走到 C，位置 a"

则它的意思是指：如果老土地方面有一枚棋子放在 A 处，没有棋子放在 B 或 C，至多有一枚棋子(上标≤1)在 D 或 E 处，则王棋就应该走到 C，并得到一个位置的平移，如图 13(a)所示.

由于在每一种情况下，王棋应付老土地在图 13(a)到图 13(g)的走法，使之到达由另一个小写字母所表示的子图，所以老土地决不能将王棋阻滞于第五排之上，也不可能阻挡王棋的边角攻势，尽管他可以在七个小写字母中走来走去.

另一方面，沿着棋盘第一排布防的三枚战略棋子的几乎一切组合都足以使老土地方面成功地阻挡王棋的边角攻势. 图 14 指出了唯一的例外情况.

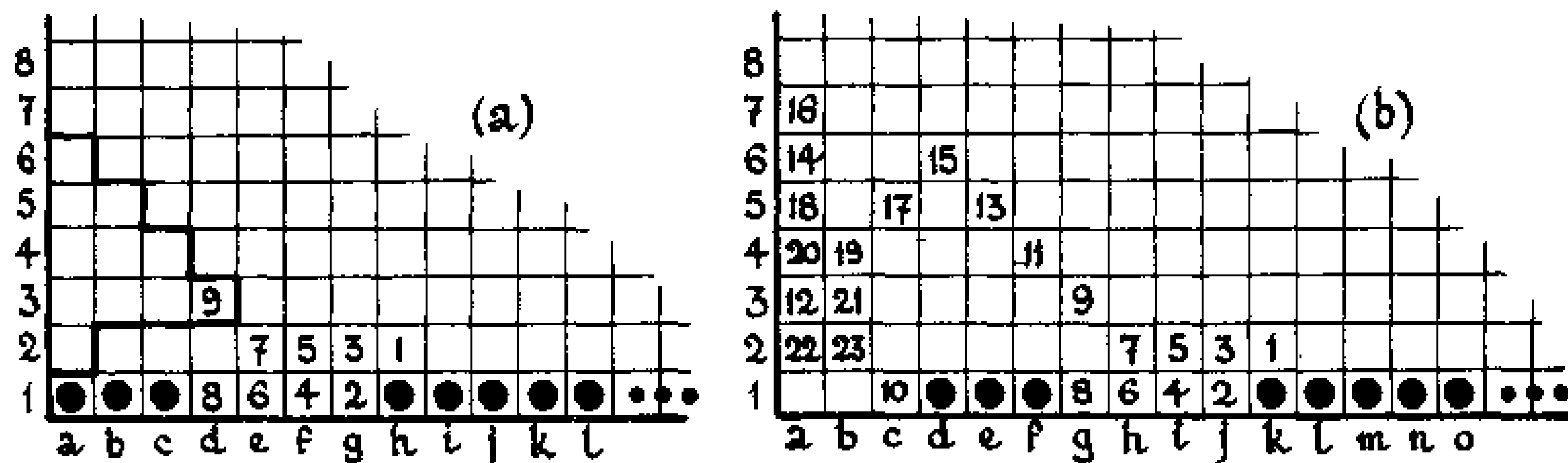


图 14. 阻挡不住攻边王棋的三子组合.

在图14(a)中,老土地方面有三枚战略棋子放在a1,b1,c1处,另外有一些战术棋子放在b1,i1等处以保卫接近王棋的边.此时王棋走到1,迫使老土地不得不在2处下一子,于是王棋走到3,如此等等.王棋走到9处,这样一来,通过图6(f)(反射后的图形),王棋方面终于获胜.图14(b)用了一个类似的记法,它向我们指出,如果老土地的战略棋子放在d1,e1,f1时,王棋取胜的具体方法.

战略与战术棋子

由于老土地方面只要用三枚额外的棋子,即可遏止王棋的边角攻势,这三枚棋子的绝大多数组合都足以完成此项任务,所以,不妨把前五排内沿着任一棋盘边缘布放的三枚最边远的棋子称为战**略**的布子,而他的其余棋子自然是战**术**的了.战术棋子可以阻挠王棋沿着边缘的取胜,而战略棋子则可以阻止他在接踵而来的边角攻势中取胜.

譬如说,让我们考虑宽度为23的无限长条带上的游戏(见图15).王棋在1处开始行动;老土地在2处下子;王棋走到3;老土地在4处下一子;如此等等.……当老土地在16处下子时,关键时刻终于来临.现在,王棋应该怎样行走呢?看来似乎有各种可能性,但只有一种走法能取得成功!

如果你想找到正确的走法,你就必须区别战略与战术的差异.棋子4,6,8是保卫右翼的,而10,12,16是用来保卫左翼的.由于下在16处的棋子是出于**战略**目的,它在战**术**上是没有价值的.

所以王棋方面可以假装16是空的,并走到17,而通过图6(g),这将为他带来**战**术上的胜利!王棋的所有其他走法都将由于α或β的防卫而遭到失数.

当然,由于16不是空的,游戏不会在较低的边上结束,因为老土地方面可以遏制边的攻击,但只能利用在16处放的棋子.最终,王棋方面将有机会走到16,如果它是空白的话.如果他不这样做,那他就将着手进行一个无法遏止的,转向左边,并沿着第二排方格进行的边角攻势.老土地方面将利用他在10与12处的棋子来迫使王棋转移到图13所示的各种位置,但他无法使边角攻击停顿下来.

这类论证表明:

> 如果老土地把他的前10枚棋子放在顶上或底下一排,那么王棋方面能在宽度为23的无限长条带上打成平局.* 即便是老土地先走也好.

* 译者注:原文如此.其意思是:王棋无法达到目的,但双方又可以没完没了地一直走下去.

图15. 在宽度为23的无限长条带上，十棋打成平局的一局典型游戏.

我们相信,如果除去老土地原来要走几步的限制,这依然是对的,因为把他的棋子布放在更接近中间的位置不像能够得到什么好处. 尽管这些动作似乎是无用的,但是我们却也没能找到王棋得以挫败它们的确切战略.

角上的战术

图 16 表明老土地怎样利用三个连续的封锁子与三个游荡子来保角,以抵挡来自任一条边的进攻. 利用图 10,两条边则可继续为老土地在四分之一无限长棋盘上提供一个应付对策.

M	lmn	lmo	kmo	mo	m									
L	klm	klm	lmo	km	m									
K	jkl	jkm	ikm	km	k									
J	ijk	ijk	ikm	ik	k									
I	hij	hik	fik	ik	i									
H	ghi	fhi	fik	fi	i									
G	fgh	fgi	efi	fi	f	x								
F	efg	efg	efi	ef	fx	x	v	v	t	t	r	r	p	p
E	def	cef	cef	efx	ex	vx	vx	tv	tv	rt	rt	pr	pr	np
D	cde	cde	cex	cex	exv	evx	tvx	tvx	rtv	rtv	prt	prt	npr	npt
C	bcd	bce	cez	exz	exy	vxy	vwx	tvw	tuw	rtu	rst	prs	pqr	npq
B	abc	bcz	cez	cyz	xyz	wxy	vwx	uvw	tuw	stu	rst	qrs	pqr	opq
A	●	●	●	Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P

图 16. 三个封锁子与三个游荡子保住了角.

尽管它对来自任一边的攻击都能保住角,但对于来自对角线方向的攻击,它只能提供微弱的防卫. 仅当老土地先走时,它才能抵挡在空棋盘上位于第十排的王棋. 由于老土地方面必须首先投放他的三枚战略棋子,故而在王棋先走时,它将抵达棋盘上的第六排,然后老土地才能在棋盘上置放游荡子,图 16 表明,现在老土地要在 F 与 X 投放游荡子了. 实际上,图 17(它应该与图 6 联合起来使用)已经表明,不论老土地方面采取什么对策,即便在图 17(a)所指出的所有格子中

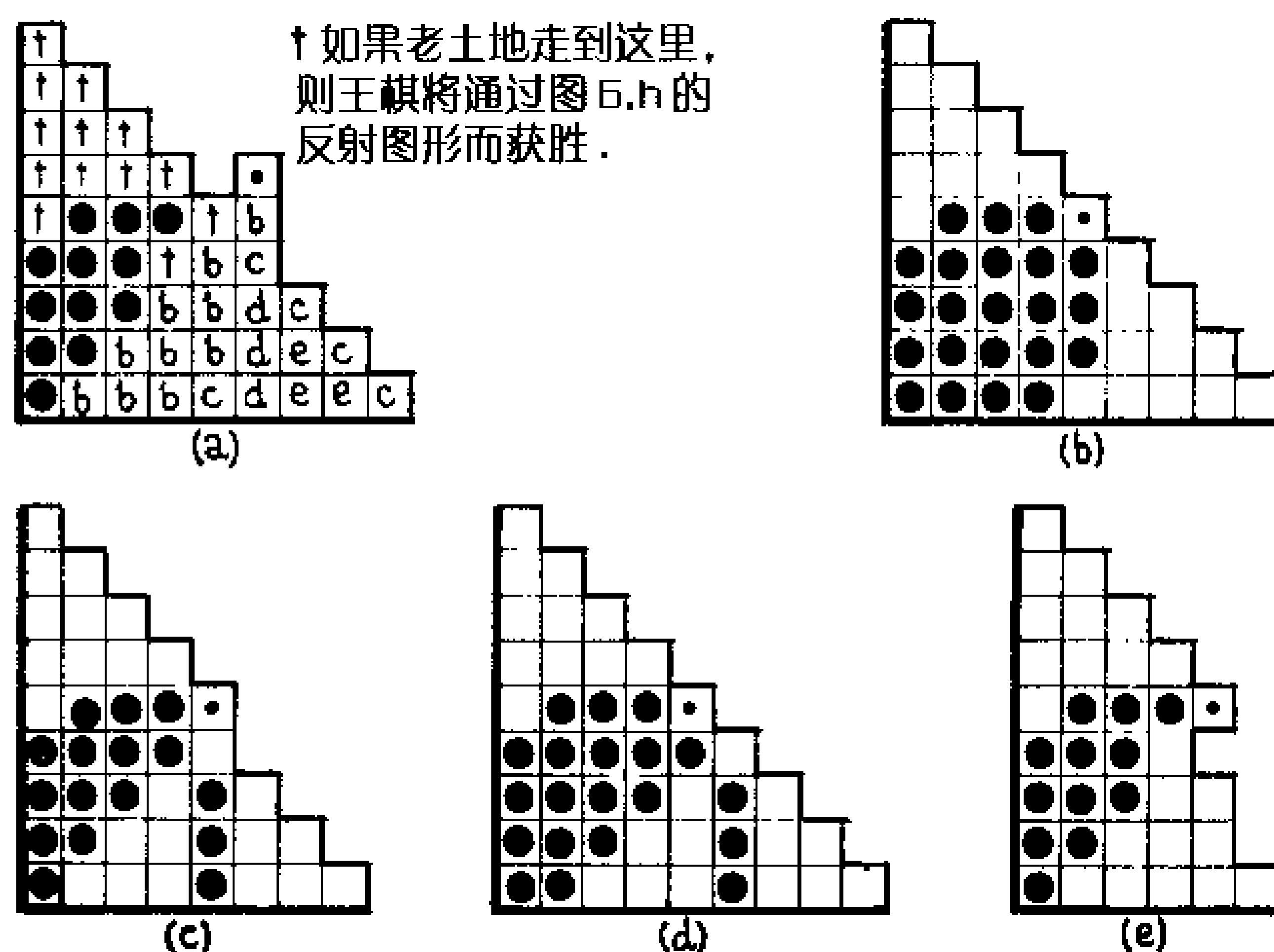


图 17. 三枚连续的封锁子仍然保不住角，抵挡不住位于第六行与第六列交点处的王棋.

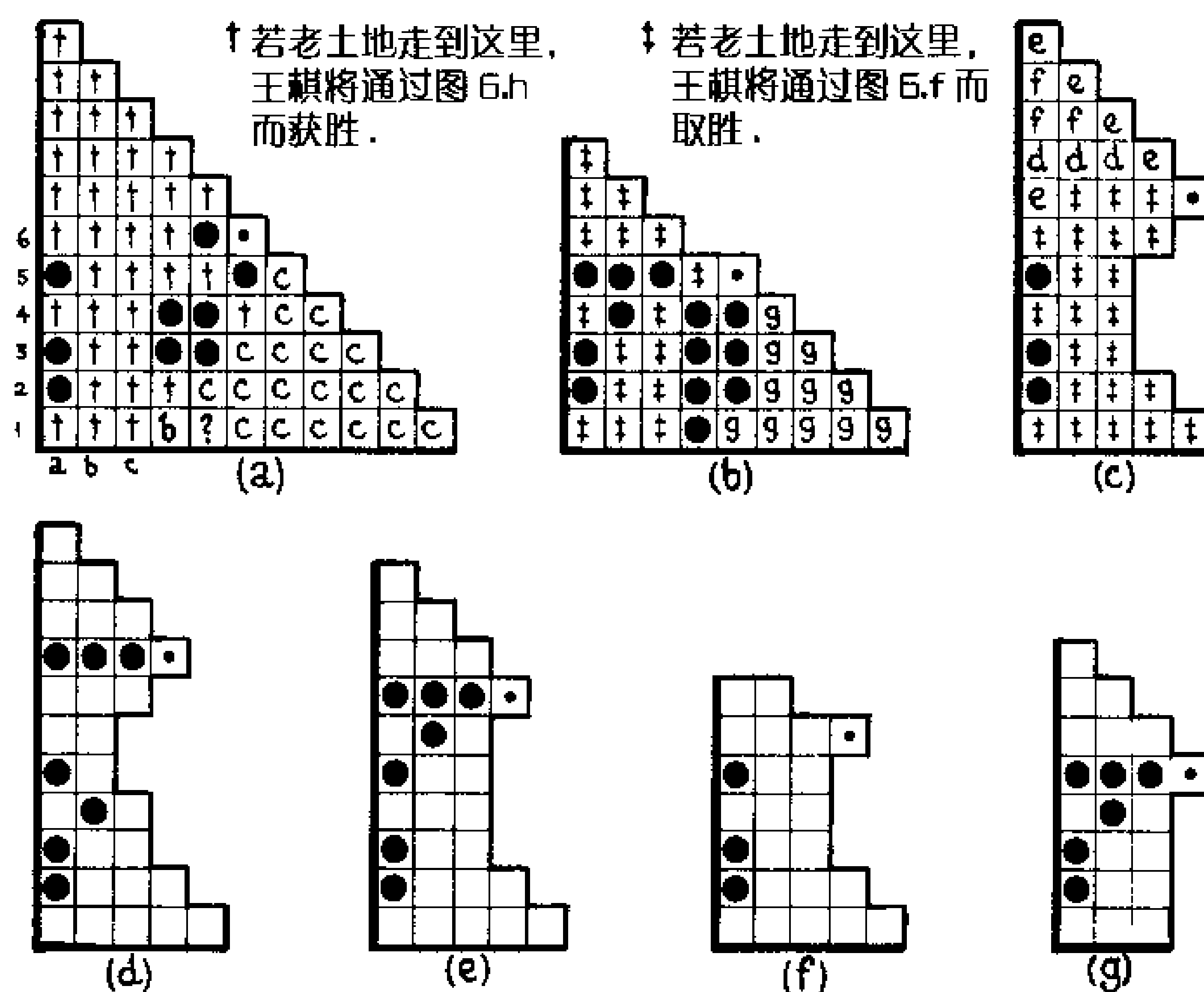


图 18. 利用三枚放置得当的棋子，再加上先走之利，老土地能成功保角，挡住王棋的对角线攻势.

都布放了棋子，王棋还是能赢，这一点将取决于图 17(b)至 17(e)，请读者自己加以证明.

图 17 表明，要想挡住来自第十行与第十列的王棋的对角线攻势，老土地方面能成功地保角的唯一希望只能是：他的前三枚棋子必须放在别处. 其中一个颇有前途的下法是利用沿边的格子 $a2$，$a3$，$a5$，而老土地的主要问题是，当王棋到达第六行第六列时，他将如何寻求合适的后续走法. 图 18(a)表明，仅仅只有一种可能性(图上用？来表示). 图 18 的证明有赖于图 17 及图 6，但我们还是想把其中的一些证法留给读者自己去作出.

所以，只有一种走法能使老土地成功地保住图 18(a)！他的完整对策在图 19 中作了揭示，而边的延伸则可参照图 10. 利用图中所示的三枚封锁子，他将成功地保角以挡住来自边及对角线的攻势.

B	abc	abc	ace	ac	c						
C	bcd	bce	ace	ce	c						
D	cde	cde	cel	ce	e						
E	def	del	cel	el	e						
F	efl	efl	ejl	el	l	n	n	p	p	r	r
●	fgl	fjl	ejl	jl	ln	ln	np	np	pr	pr	rt
G	gjl	gjl	jl	jln	jln	lnp	lnp	npr	npr	prt	prt
●	gij	ijl	jkl	jlm	lmn	lno	nop	npq	pqr	prs	rst
●	hij	ijk	jkl	klm	lmn	mno	nop	opq	pqr	qrs	rst
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S

图 19. 无需死记的保角防御.

把图 13 与图 19 结合起来，我们可得出下列结论：

> 在四分之一无限长棋盘上，好的开局是第九行或第九列，但要排除较低的行或列.

在老土地先走时，他可以按照图 19 的办法，用三枚封锁子与三枚游荡子来保住任何这类局势. 若王棋先走，他可进攻最近的一边，而无视介于王棋与角顶之间的三子，如图 15 的示范性游戏所示. 由于图 13 业已表明，老土地需要三枚战略棋子才能保住角，所以王棋要末在边上得胜，要末像图 13 那样，在边-角攻打中取得胜利.

在很大的正方形棋盘上的防御

我们已经看到，老土地能用三只封锁子，三只游荡子来保住一个角，所以他可以用十二只封锁子(每个角使用三只)来防卫一个足够大的正方形棋盘，自然还要外加三只游荡子. 他首先把十二只封锁子放在它们的永恒位置上. 如果棋盘的大小是 35×35 或者较此更大，而开始时王棋相距任何一条边

至少18格，则在老土地放下他的12只战略棋子之后，王棋距离棋盘边缘至少还有6格，故有

> 若老土地先走，他可以在35×35或更大的正方形棋盘上获胜.

33×33棋盘

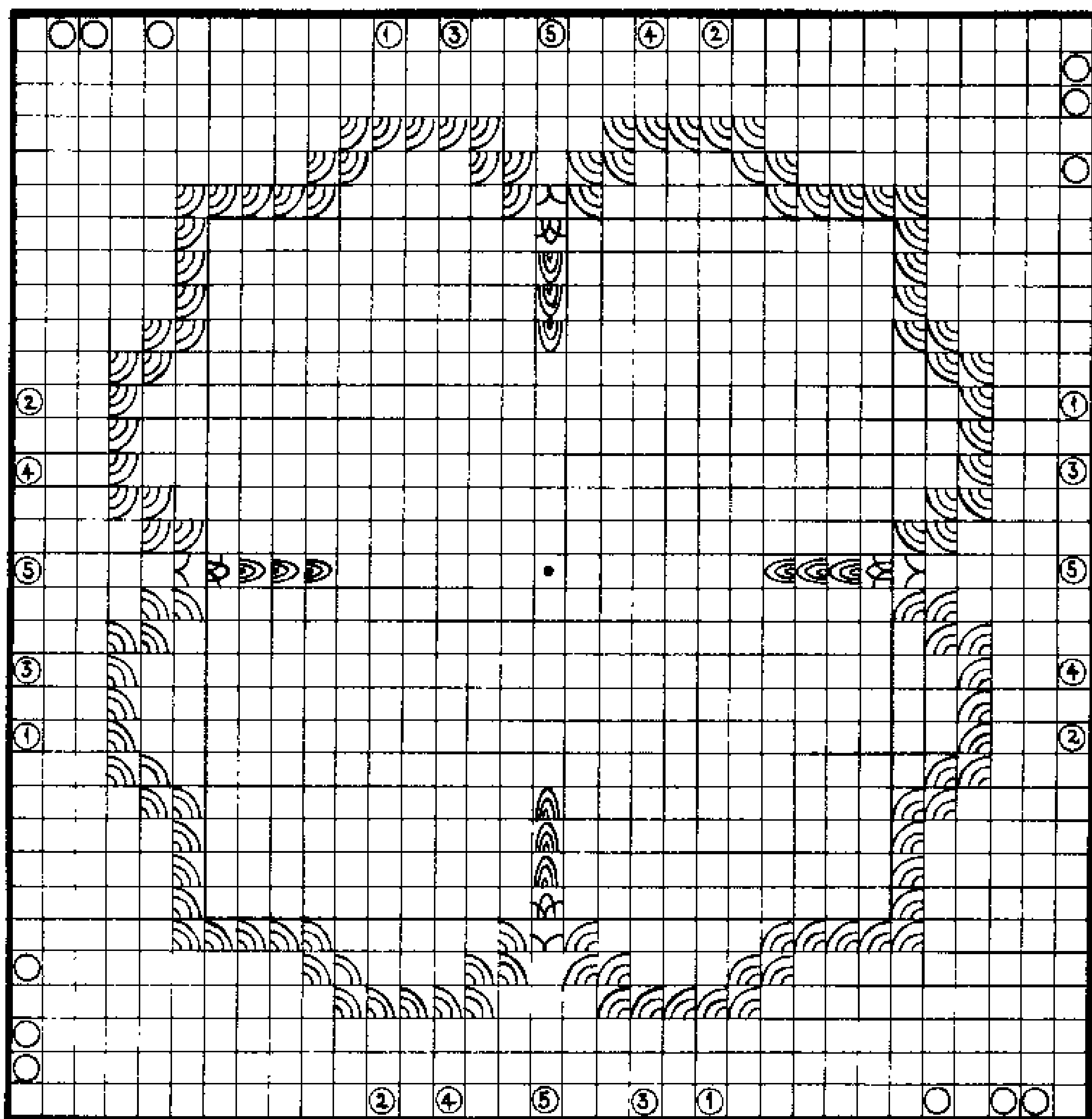


图20. 33×33棋盘上位于中央的王棋.

我们将给出一个更加复杂的防卫战术，它将使老土地在先走时，可以不多不少，正好用 12 只游荡子在 33×33 的棋盘上困住王棋，其细节请参看图 20 至图 26.

位于中央的王棋

只要王棋停留在图 20 所示的中央区域内，老土地就可以在某些有战略意义的方格里下子，见图 20 中棋盘的四周边缘上标着小圆圈记号的格子. 这些格子里一共下了 32 子，其中靠近每只角的有 3 子，每条边有 5 子. 老土地先在每条边上各下四子，在王棋走过四步或四步以上时，老土地所下各子的分布情况见图 21 所示，此图是图 21 中一部分的审视图(棋盘的四个象限是重合的). 中央区域中绝大多数方格可以区分为九个子方格，其中心格子始终是个空白格子. 另外的八个子方格则告诉老土地，他应该在每个相应区域中投放多少子. 譬如说，如果王棋走到一个标有

3		
1	4	

记号的格子里，则老土地的着法是：他应使左边有三子，左下角有一子，而底边有四子. 他在接近这角上三格里投子的先后顺序是不重要的. 但是，对每条边上的五只战略性方格来说，中间一格务必在最后投子. 在图 20 与图 21 中，一种比较合理的顺序已经用小圆圈中的数字 1，2，3，4，5 加以表明了.

图 21 中主对角线上某些格子带着箭头符号：

	1	
1		1
↖	2	

意味着

	1	
1		1
	2	

或

	1	
2		1
	1	

而

↙	1	
2		1
	2	↙

意味着

	1	
2		1
	2	

或

	0	
3		1
	2	

或

	1	
2		0
	3	

(但不是

	0	
3		0
	3	

)

在这些可供选择的办法中，老土地可任选一种以作为令人满意的防御.

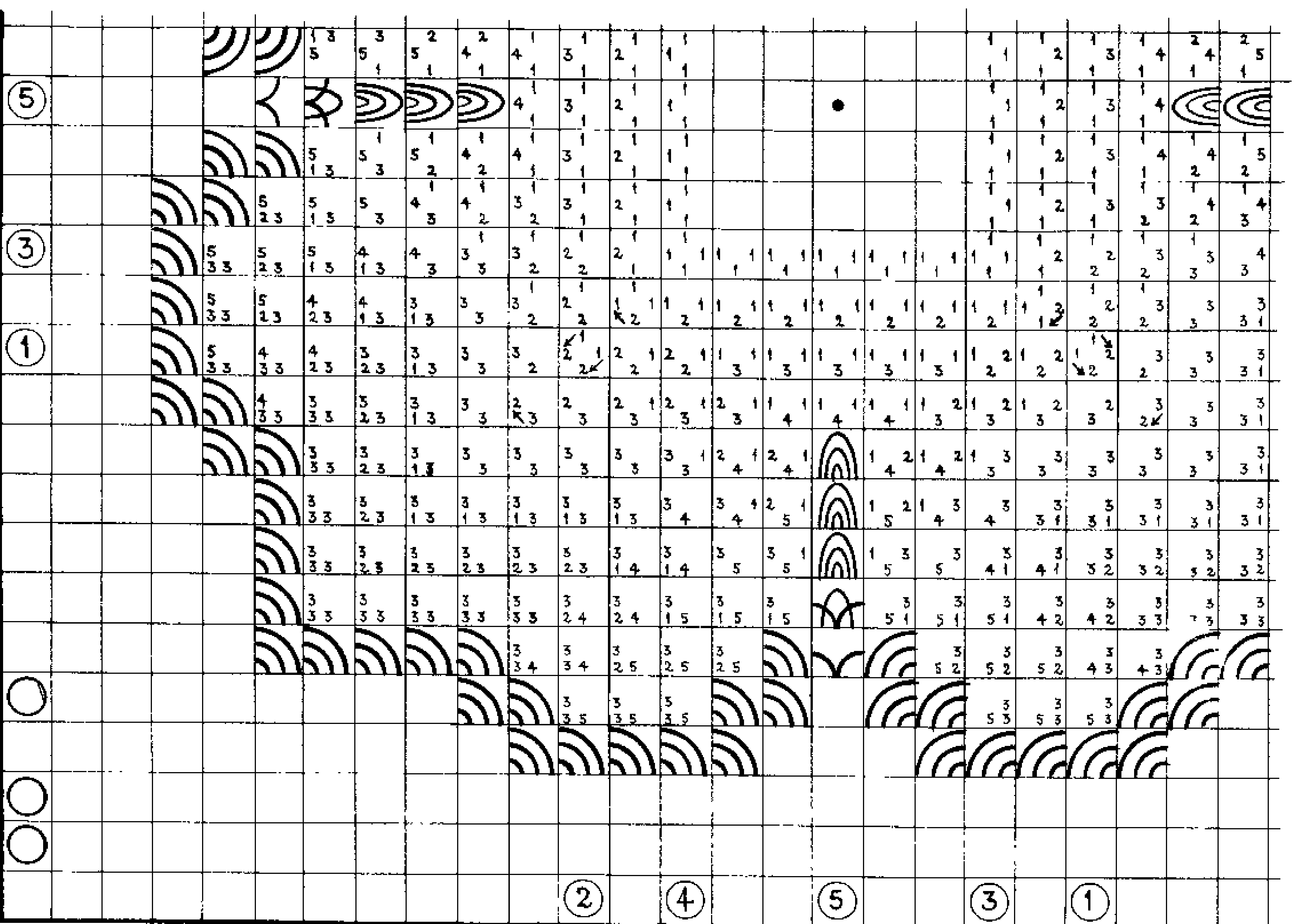


图 21. 图 20 的审视.

离开中心区域

如果王棋通过图 22(a)中所标记号的方格离开图 20 的中心区域，我们就说它将被围困在棋盘的左下角，老土地将把它束缚在图 23 的区域之内，其办法是作一些战术移动以阻止王棋走到

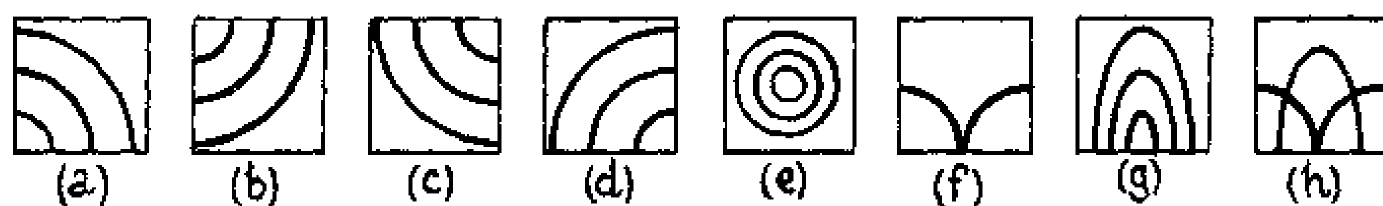


图 22. 图 20,21,23,24,25 中的指示方格(详见正文).

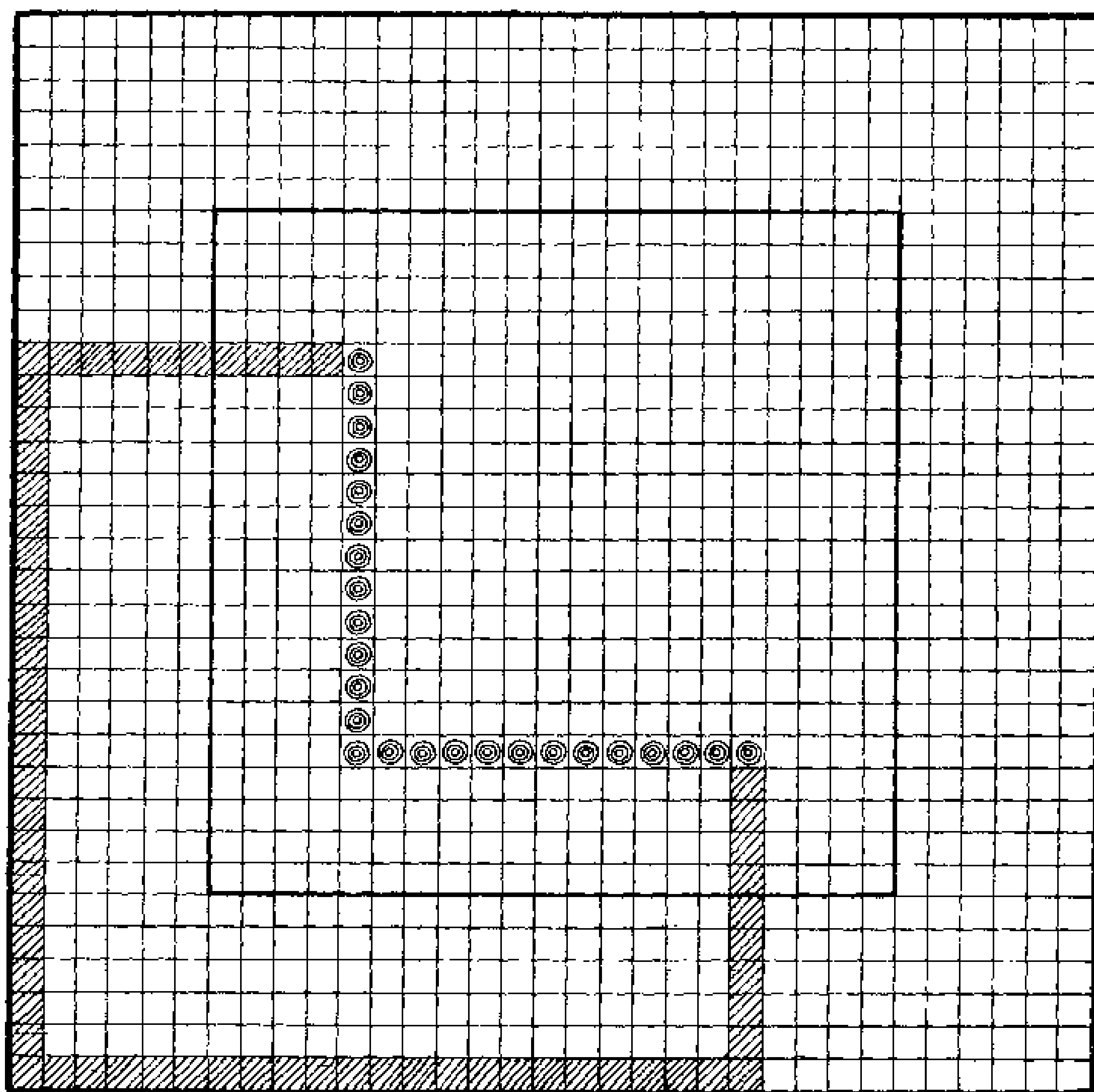


图 23. 困在角上的王棋.

图上的阴影方格，这样，王棋就只能通过像图 22(e)所标出的那种方格重新返回到棋盘中央. 如果王棋走到图 22(b)(c)(d)中所标的格子，那时它就被相应地围困在棋盘的左上，右上与右下角. 如果王棋走到图 22(f)所标的方格，则它将被围困在棋盘的左下或右下角，究竟困在哪里则要取决于它来自哪一个方向. 如果王棋走到图 22(g)那样的方格，则它将被困于边上(详见下文). 当王棋走到图 22(h)所示的方格，则它将被困于边上或角隅，取决于它的来路(如来自对角线，它将被困在边上，如来自水平方向，则它将被赶回跑来的那一角).

困在角上的王棋

图 24 是图 23 的一个审视，它显示了老土地怎样运用三只游荡子，九只固定子(半固定的，战略与战术的)，把王棋围困在角上的技术细节. 自然，当王棋进入图 22(a)所示的格子而初遭围困时，老土地可能还没有在图 24 的确切位置上布置好他的九枚固定子，但他将在王棋与左下角之间有三子，底边上有三子，左边上有三子. 老土地可利用这些已在边界线上的棋子，作为图 24 中尚缺少棋子的替代. 在战术要求他安放一子在已被占据的方格上时，老土地在图 24 的一个尚未占据的圆上放置一子.

譬如说，王棋走到 $k4$ 方格(见图 1)，以离开图 20 的中心区域时，它必然来自标有

3		
3	5	

记号的 $l5$ 方格. 因此左边已有三子，接近左下角有三子，在方格子 2，4，5，次于 Z 与 A 并在它们之间("3"与"1")的格子里有五子. 王棋目下在标有"S24"的方格子里，于是老土地把他的最后一子(图 1 中的白子)放在 S，随后继续按照图 24 的指示，用"5"处的棋子代替在 Z 与 A 之间尚缺少的棋子.

在图 24 中接近右上方的向右箭头意味着，第三个真正游荡子(非固定子)属于右边的一个战略方格.

困在边上的王棋

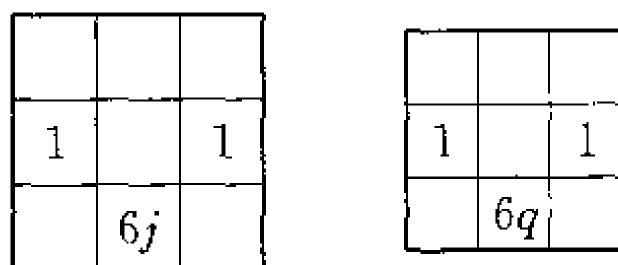
如果王棋通过一个图 22(g)的方格离开图 20 的中心区域，则它将像图 25 所示，被围困在边

A																						
B	ab3	abc		bc	b																	
③	b3c	b3c	bcd	bc	c																	
C	3c1	3cd	bcd	cd	c																	
①	c1d	c1d	cdf	cd	d																	
D	1de	1df	cdf	df	d																	
E	def	def	dfh	df	f												→	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{ij}$	$\overrightarrow{ij}$	J
F	efg	efh	dfh	fh	f												i	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{fi}$	$\overrightarrow{hi}$	hij	I
G	fgh	fgh	fho	fh	h												i	fi	$\overrightarrow{fi}$	fhi	ghi	H
H	ghi	gho	fho	ho	h											5	f	fi	efi	fgi	fgh	G
I	hio	hio	hmo	ho	o	q	q	s	s	u	u	v	v	w	w	5	5f	ef	efi	efg	efg	F
●	ijo	imo	hmo	mo	oq	oq	qs	qs	su	su	uv	uv	vw	vw	w5	w5	5e	5ef	cef	cef	def	E
J	jmo	jmo	mo	moq	moq	oqs	oqs	qsu	qsu	suv	suv	uvw	uvw	vw5	vw5	w5e	w5e	5ce	5ce	cde	cde	D
●	jlm	lmo	mno	mop	opq	oqr	qrs	qst	stu	su2	u2v	uv4	v4w	vwx	wx5	w5y	5ye	5ze	zce	bce	bcd	C
●	klm	lmn	mno	nop	opq	pqr	qrs	rst	stu	tu2	u2v	2v4	v4w	4wx	wx5	x5y	5yz	yze	zce	zbc	abc	B
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	②	V	④	W	X	⑤	Y	Z	●	●	●	A

图 24. 图 23 的审视.

上.老土地将采取一种战术,使王棋无法走到图上有阴线的格子,而只能通过一个像图 22(e)所示的方格,重新回到棋盘的中心区域.

图 26(图 25 的审视图)的记号一如图 21 与图 24,但我们现在还会遇到一些标着



的方格.它们将告诉老土地,左边,右边都必须有一子(图 25 中,在它们的最低位与最高位都已标明),底边上必须有六子,不仅是通常的五子,而且在 J 或 Q 处还得有一子.[假定老土地有 6 子布置在 1,2,3,4,J,Q,而最后两子中的一子是取代 5 的.]

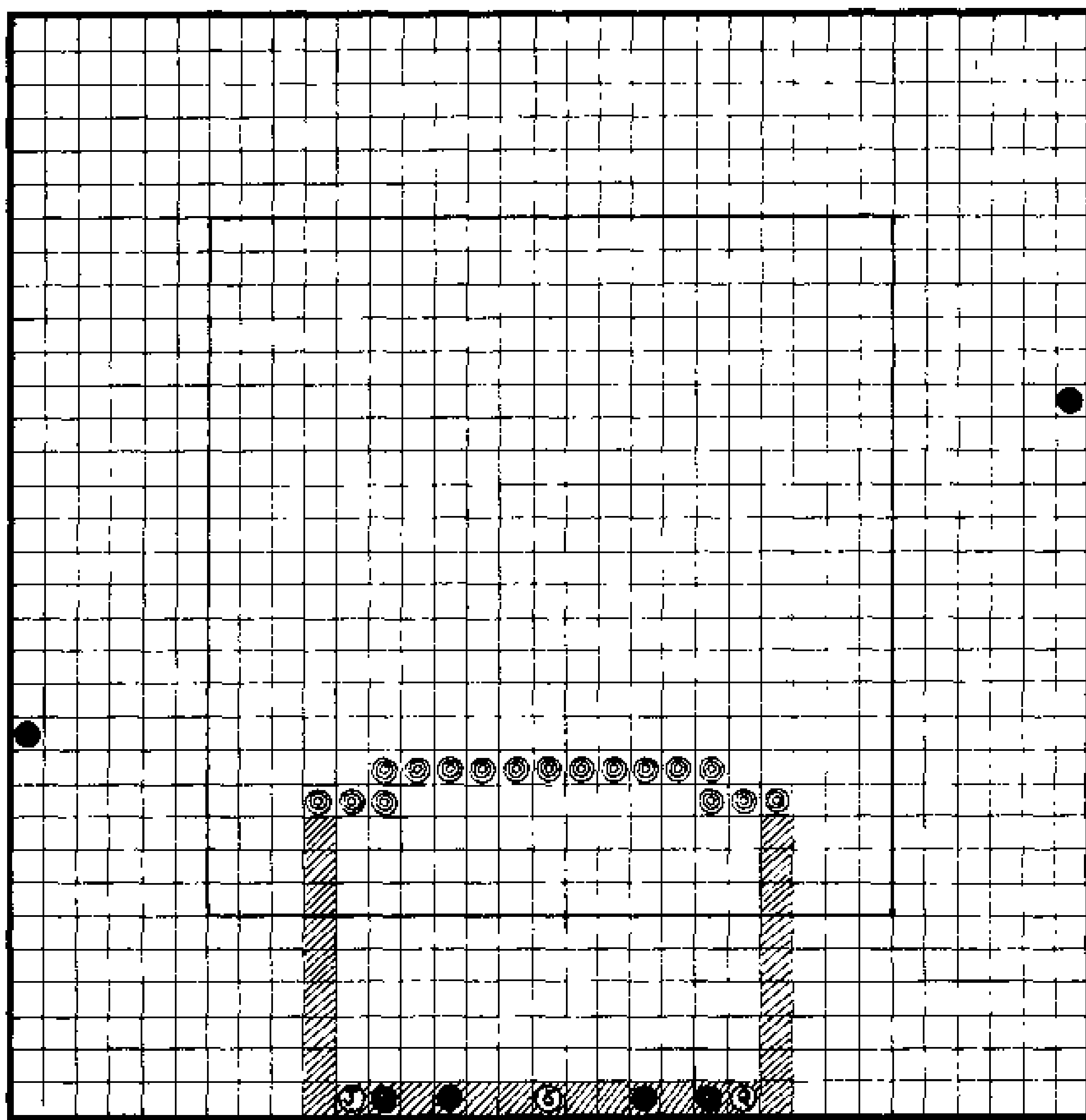


图 25. 被困在边上的王棋.

			$\overleftarrow{ac}$	ac	a	6j	5	6v	z	xz	$\overrightarrow{xz}$			
A	$\overleftarrow{ab}$	$\overleftarrow{ac}$	$\overleftarrow{ac}$	ac	a	6j	5	6v	z	xz	$\overrightarrow{xz}$	$\overrightarrow{xz}$	$\overrightarrow{yz}$	Z
B	abc	abc	ace	ac	c	6j	5	6v	x	xz	vxz	xyz	xyz	Y
C	bcd	bce	ace	ce	c	6j	6	6v	x	vx	vxz	vxy	wxy	X
D	cde	cde	ceg	ce	e	5	5	5	v	vx	tvx	vwx	vwx	W
E	def	deg	ceg	eg	e5	e5	5n	5v	5v	tv	tvx	tvw	uvw	V
F	efg	efg	eg	eg5	eg5	e5n	e5n or m5v	5nv	5tv	5tv	tv	tuv	tuv	U
G	fgh	egh	egk	egl	el5	em5	m5n	5nv	5ov	otv	ptv	stv	stu	T
H	ghi	ghk	egk	ekl	elm	lm5	m5n	5no	nov	opv	ptv	pst	rst	S
I	(J)	●	K	●	L	M	(5)	N	O	●	P	●	(Q)	R

图 26. 图 25 的审视图.

赶路者怎样在 34×34 棋盘上取胜

在 33×33 的王走棋棋盘上如果老土地先走，有 12 只游荡子的话，他肯定可以实现其阻挠目的，因而他在 35×35 或者更大的棋盘上当然更不在话下，即便是王棋先走.

然而，看来王棋能在 34×34 的棋盘上取胜，如果他先走的话. 现在要说明一下他怎样才能办到. 他的前三步沿着对角线方向直接攻打最近的角. 然后转向左面或右面，在老土地至多只有一子的半个棋盘上攻击相邻之角. 再走九步之后，譬如说，它可到达 $l6$，而老土地不可能在棋盘上得到 9 只有用的棋子. 如果角上的防卫已经很充分（有三子），那么一个或另一个侧面是很脆弱的，通过深思熟虑的边角进攻，最终即可取胜.

不幸的是，我们未能将这些注释形式化地归纳出一个赶路者的取胜策略，即便它像老土地

在 33×33 棋盘上的取胜办法一样显然. *

矩形棋盘

在宽度为 23 的无限长条形棋盘上，即使老土地先走，并且拥有无限量供应的围棋子，他也不能击败王棋. 但是，如果他在 $24\times n$ 的棋盘上先走，则对充分大的 n，他是可以赢的. n 的最小值好像是在 63 左右. 不管王棋趋近哪一条长边，它将立即受困. 王棋可以绕过老土地的守边防线的假角（图 26 的 I 与 R），但只能后退到大致在两条长边中途的一些方格里去迂回. 于是老土地就可以在真正的角与第一个假角之间建立起第二假角的防御. 当王棋到达角上时，老土地已沿着棋盘的一条短边与一对假角（在王棋与未受攻击的短边之间的某处）之间建立了防线.

对 $24\leqslant i\leqslant 37$ 的每个 i 值，看来似乎存在着 j 值的一个范围，以使 $i\times j$ 矩形棋盘成为对抗王棋的吃格子游戏的一个良好战场. 我们相信，32×33 棋盘是个好局面，如果老土地先走，其取胜策略大体上与我们为 33×33 棋盘给出的策略相似. 我们要为本书的热心读者留下一个问题来作为挑战：请判定一切先走有利的吃格子游戏的棋盘大小.

---

* 译者注：世界上有些知识只能意会，不能言传，详见“论知识经济中的默会知识”，见 2000 年 8 月《文汇报》.

增 补

多维天使

可以从相应维数的多维吃格子恶魔中逃脱. 这已被汤姆 · 侃纳(Tom Körner)所证明,并相信其证法也能适合于二维游戏. 不过,除非你们充分考虑了本书第 199 页的注释. 你们切勿轻率地把你们对天使问题的解法写信告诉我们!

包围游戏

本章所讲到的游戏,以及下面的两个游戏都是属于包围或逃脱性质的. 如果追溯以前的漫长历史,则还有许多游戏是把上述概念同各种各样的捕捉或擒拿相结合的. 以下讲一些实例.

狼与羊

存在着一些在类似于独粒钻石式棋盘(见第 23 章)上玩的游戏. 在**狼与羊**游戏(图 27(a))中,牧羊人有 20 只羊,他可以先走. 走法是向前或向旁边走一步,走到未占据的空位上. 狼的走法与此类似,在任一条线上可以像跳棋一样地吃子,并允许连跳连吃. 因失误而未能吃子的狼可以被牧羊人除去,所以羊可以用作囮子*. 如果能使九只羊进入羊栏(棋盘顶上的 9 个位置),牧羊人就赢了.

图 27(b),(c)中的游戏也叫**狐与鹅**,但同我们将在下一章中讲到的游戏实际是同名而异物. 上述两游戏其实同狼与羊游戏很类似,但不能斜走. 狐狸可在任何一个未占据的位置上起步,而众鹅则企图把狐狸逼到角落里去. 在图 27(b)中,13 只鹅可以沿着四个直交方向任意移动,但是

* 译者注:诱捕猎物时用的小兽,作为牺牲品,使猎物误中圈套.

图 27(c)中的 17 只鹅却是只能前进，不能倒退，它们的走法同狼与羊游戏中羊的走法相同.

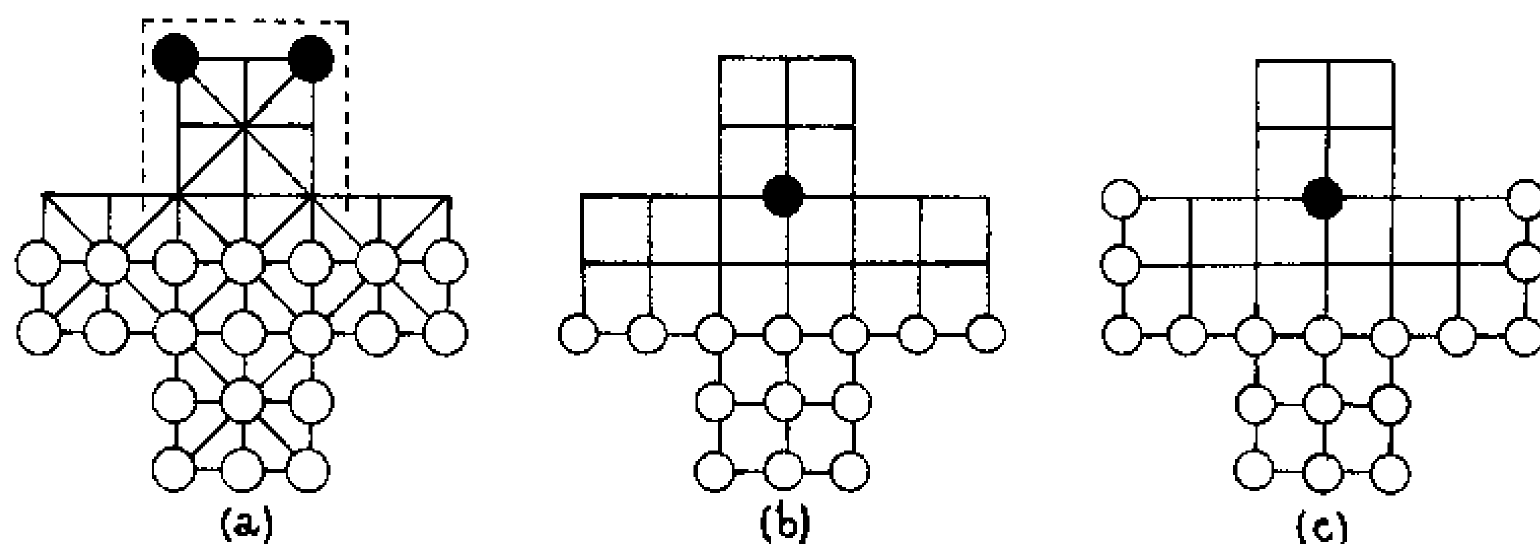


图 27. 狼，羊及其他动物.

哈拉塔福(狐狸游戏)与**弗雷斯塔福**游戏在后期冰岛神话传说中都曾提到过. 正如在本书第 20 章中要讲到的. 它的变种狐与鹅游戏一样，只要走得好，数量较多的动物那一方总是可以赢，但在实际对局时极易出错!

书板游戏

林纳乌斯(Linnacus)在 1732 年的拉普兰*之游时，记录了一个在 9×9 棋盘(图 29)上所玩

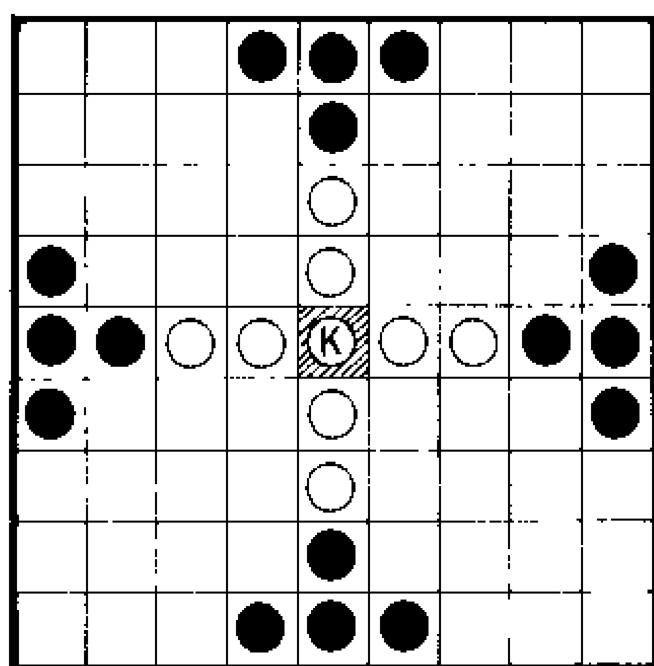


图 28. 书板游戏的开局.

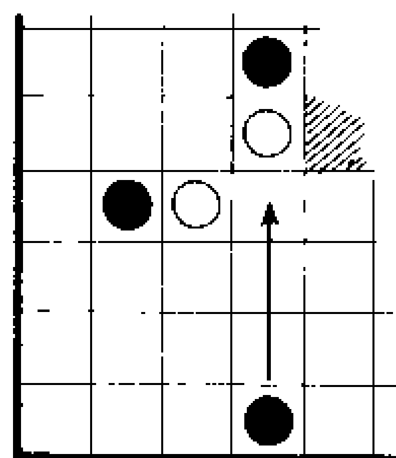


图 29. 一个莫斯科人抓住两名瑞典人.

* 译者注：挪威，瑞典，芬兰与俄罗斯等国北部拉鲁人所居住的地方.

的游戏. 棋盘的中心格子称为**康纳吉斯**(宝座或御座),只能由瑞典国王占据. 护驾的有 8 位白皮肤的瑞典兵,与之敌对的却有 16 个黝黑的莫斯科士卒*. 所有棋子的走法都像国际象棋中的"车",可以横冲直撞. 当国王四周,东、西、南、北都被四个莫斯科人包围时,或者三个莫斯科人与国王的宝座构成一个正方形时,就算国王被活捉了. 其他棋子(不论白子或黑子)的吃法称为"**拘留**",即对方有两枚棋子紧贴在它的南、北或东西时,该子即被"吃掉". 图 29 画出了一个莫斯科人抓住两个瑞典人的着法. 不过,棋子主动进入"监护"状态时,不算被吃. 瑞典方面的目标是要把他们的"国王"走到棋盘的边上去.

萨克森的 HNEFATAFL**

仅有棋盘的一角残片被人们发现过. 此种游戏所使用的棋盘有可能是 19×19 的现代围棋盘***. 请参看 R.C. 贝尔所著的一卒精致小册子,它有可能是一篇 10 世纪时英文手稿原物的重新改写. 显然,此游戏与上节的书板游戏玩法相同,仅不过棋盘大小、棋子数量与位置有所不同而已.

我们将用两个国际象棋问题结束卒章,它们也有脱逃与围困之意.

王、车擒王

绝大多数国际象棋初学者很快就学会了这类残局的取胜方法. 所以,正是利用此等材料,不过是在四分之一无限长棋盘上所提出的、两个不太简单的问题就难免令人感到惊讶了.

在图 30 中,白方能赢吗? 如果能赢的话,至少要走几步? 西蒙 · 诺顿认为,更好的提问方式应该是:"如果黑子走出棋盘的东边或北边就算黑胜,那么至少应是怎样大小的棋盘,白方可以赢棋?"我们的热心读者,你能证明它是 9×11 吗?

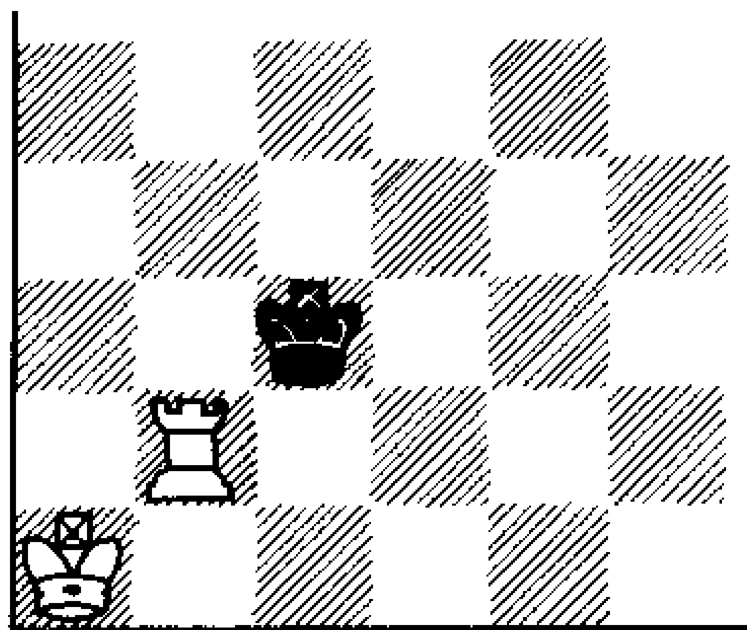


图 30. 西蒙 · 诺顿问题.

* 译者注:历史上,沙皇俄国曾同瑞典人打过许多仗. 夺取了不少领土.

** 译者注:此单词可音译为"纳福得福",是一种民间杂棋. 一般英语辞典中根本不收入此词.

*** 译者注:历史上曾用过 17×17 的围棋盘.

图 31 是李奥·穆塞问题：只能用车走一步棋，白方能赢吗？如果你对此感到困惑而无从着手，请把图中的三个纵列分成四个集合：

a1,a3,a5,…,c2,c4,c6,…

b1,b3,b5,…

a2,a4,a6,…,c1,c3,c5,…

b2,b4,b6,…

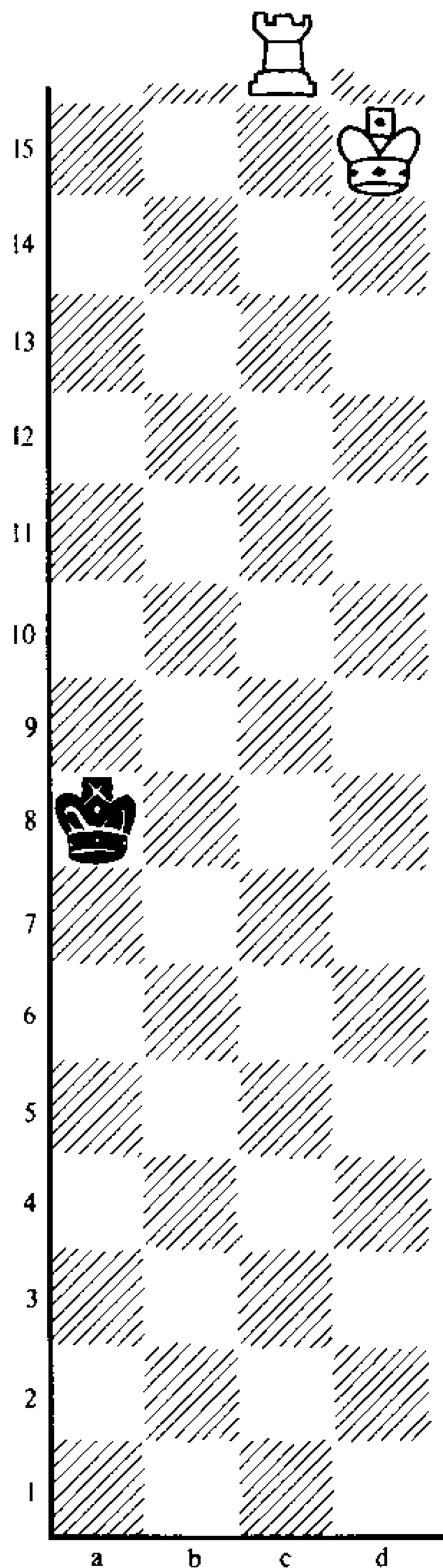


图 31. 李奥·穆塞问题.

参考文献及进一步阅读材料

Robert Charles Bell, "Board and Table Games from Many Civilizations", Oxford University Press, London, 1969.

Richard A. Epstein, "Theory of Gambling and Statistical Logic", Academic Press, New York and London, 1967, p. 406.

Martin Gardner, Mathematical games: Cram, crosscram, and quadraphage: new games having elusive winning strategies, Sci. Amer. **230**#2(Feb. 1974)106—108.

C. Linneaus, "Lachesis Lapponica", London, 1811, ii, 55.

H. J. R. Murray, "A History of Board Games other than Chess", Clarendon Press, Oxford, 1952.

David L. Silverman, "Your Move", McGraw-Hill, 1971, p. 186.

第20章

狐与鹅?

如果一个人有意躲避,另一个人就必须紧追不舍.

——罗伯特·勃朗宁,《爱情生涯》

十二条好规则支配着堂皇的天鹅游戏.

—奥列佛·哥特史密斯,《荒村》,I.232

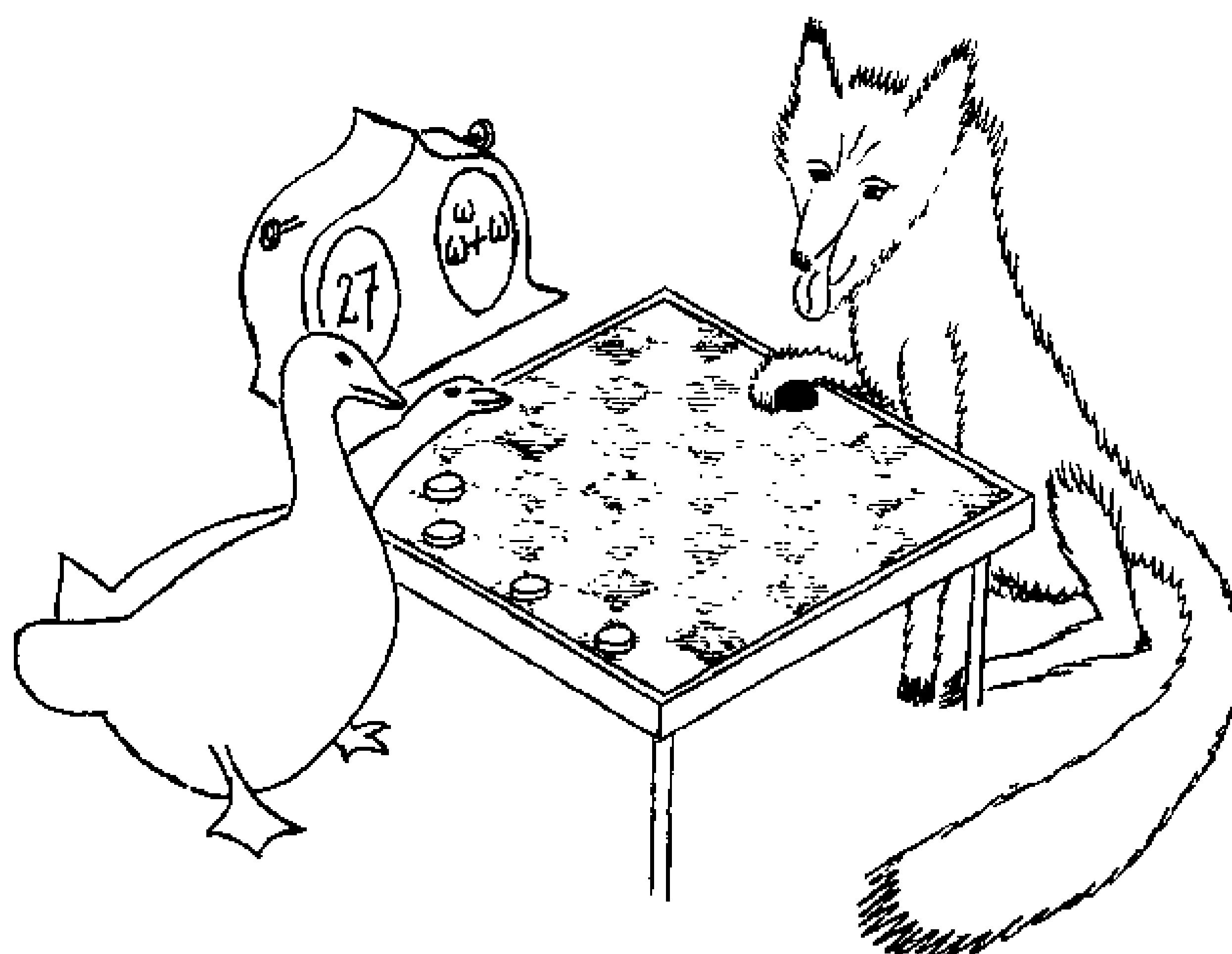


图 1. 一局狐与鹅游戏.

这种游戏在通常的跳棋盘上进行，其中的一方称为狐狸，它只是一枚黑子或红子，另一方称为鹅，有着四枚白子. 对局双方只能利用棋盘中某一种颜色的格子(像跳棋那样)，而鹅这种棋子开始时是放在图上标记着○的格子里的，如图 2 所示. 狐狸通常放在图 2 中的×位置，由于鹅有着枚好的胜机，因此最好让狐狸来选择它的初始位置(如果初始方格的颜色是正确的话)，然后让鹅的一方先走.

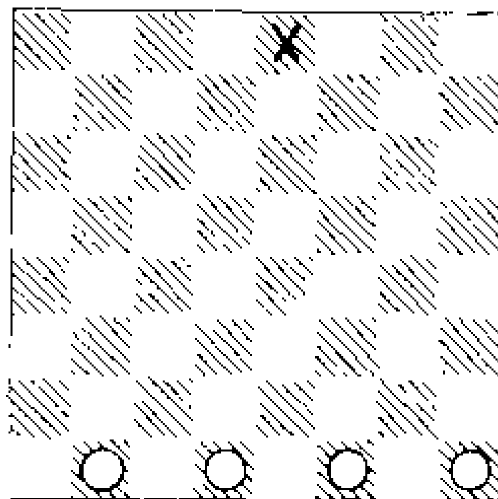


图 2. 常见的开局状态.

鹅的走法是向前方斜走一步，就像是普通的跳棋，但只能前进，不能后退. 狐狸的走法也是斜走一步，但它像王棋一样，可在四个斜角方向任意行走(可进可退). 双方既不能吃子，也不能跳跃. 鹅的目标是要困死狐狸，使它无法行走. 反之，狐狸则企图突破鹅的防线，自由自在地生活. 所以我们只要简单地说一下就行：哪一方不能行走，他就是输家. 即通常的正常游戏规定.

一般认为，如果双方都是行家，鹅的一方通常能赢. 但对中等水平的对手来说，狡猾的狐狸往往能够取胜，如果我们允许让它选取其初始位置，那他就有可能屡屡挫败新手. 对本书的读者来说，最好先来玩几局试试，然后再仔细读下去.

在本章中，我们要提出并给出答案的问题是：在这种游戏中，鹅的一方究竟占有多大的优势? 也许我们应该首先证明，鹅的一方确实拥有一种获胜策略，即使狐狸的一方能够获得我们所建议的额外特许. 在图 3 中我们表明了有利策略所依赖的五种类型的状态. 图中，○是鹅的位置，而×表示狐狸的特别重要的关键位置，当狐狸占据着这些位置之一时，我们将认为，鹅是处于危险之中.

如果鹅的一方听从我们的建议，他们可按以下方式玩这游戏，绝大部分时间他们可以闭上眼睛，无需为狐狸的动作打扰他们的好梦. 我们可以为他们提供保证，一旦他们张开眼睛，面前出现的局势就总会是 A,B,C,D,E 的五者之一(也可能是其左—右对称映像)，而他们在继续合上眼睛之前唯一要干的事情就是察看一下他们是否处在危险之中. 倘若不是，他们应在位于图 3 所示的斜线记号(/)前面的数字中选择其步法，而若处在危险状态之中，则应在斜线记号后面标出的数字中采取行动. 我们也在斜线前后用字母标出下一次将看到的是 A,B,C,D,E 中的哪一种类型. 所指出的行动可以闭着眼睛去做，因为我们也能保证狐狸决不会拦在路中，因此鹅的一方可以在系列动作完成之后再睁开眼睛，而出现的局势仍将是 A,B,C,D,E 中的一种.

很容易证明上述策略确实管用，如果鹅方一旦走到状态 A 的话. 作为一个例子，让我们考察局势 D. 如果鹅方一直照我们所建议的那样行动，那它们只能从处于危险状态下的状态 B 或 C

走到状态 D，因而狐狸只能在为数很有限的几个位置之一. 实际上它只能处于图 4_0 中 X，Y，Z，T 的四者之一.

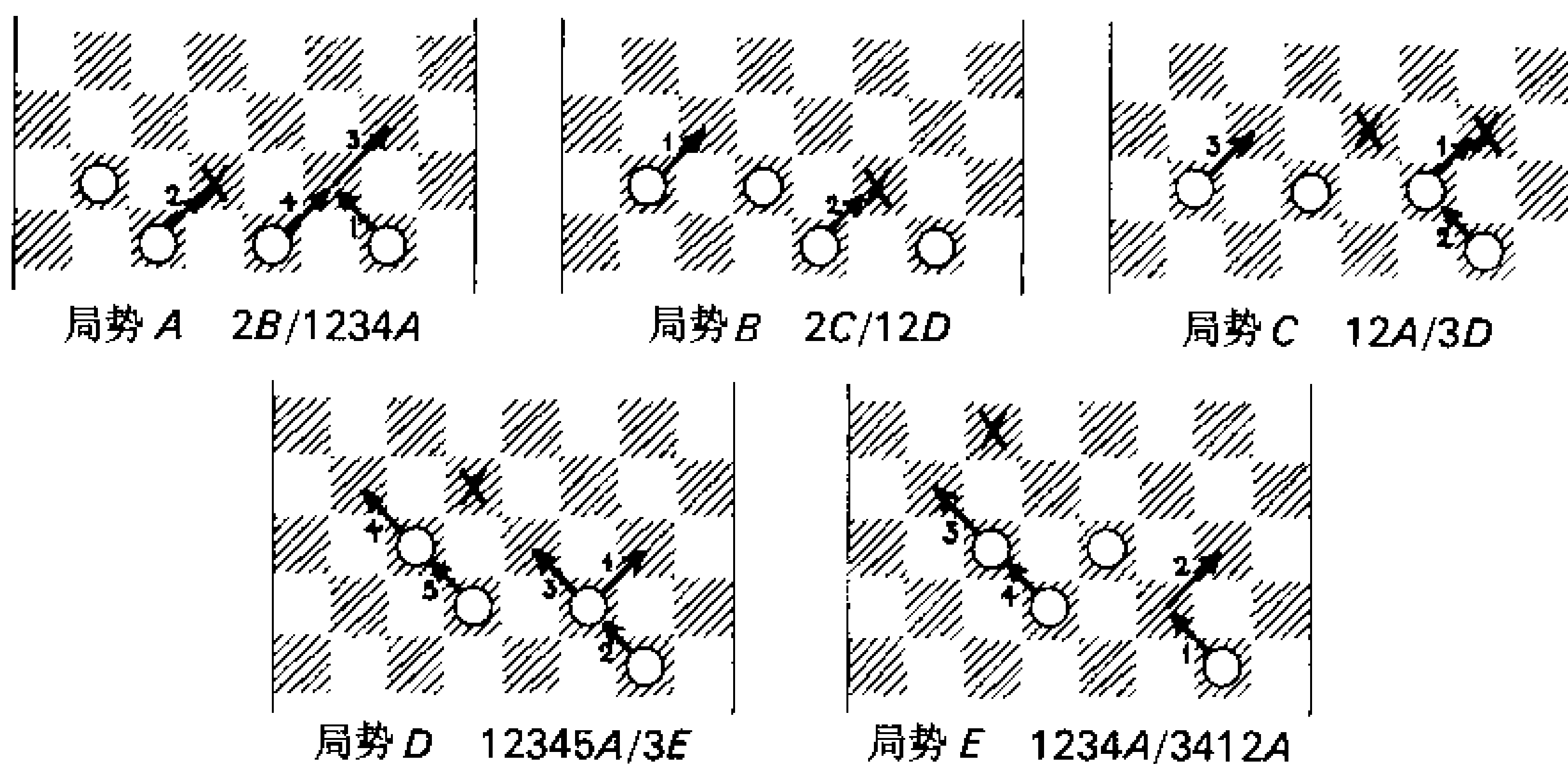


图 3. 最简明的策略.

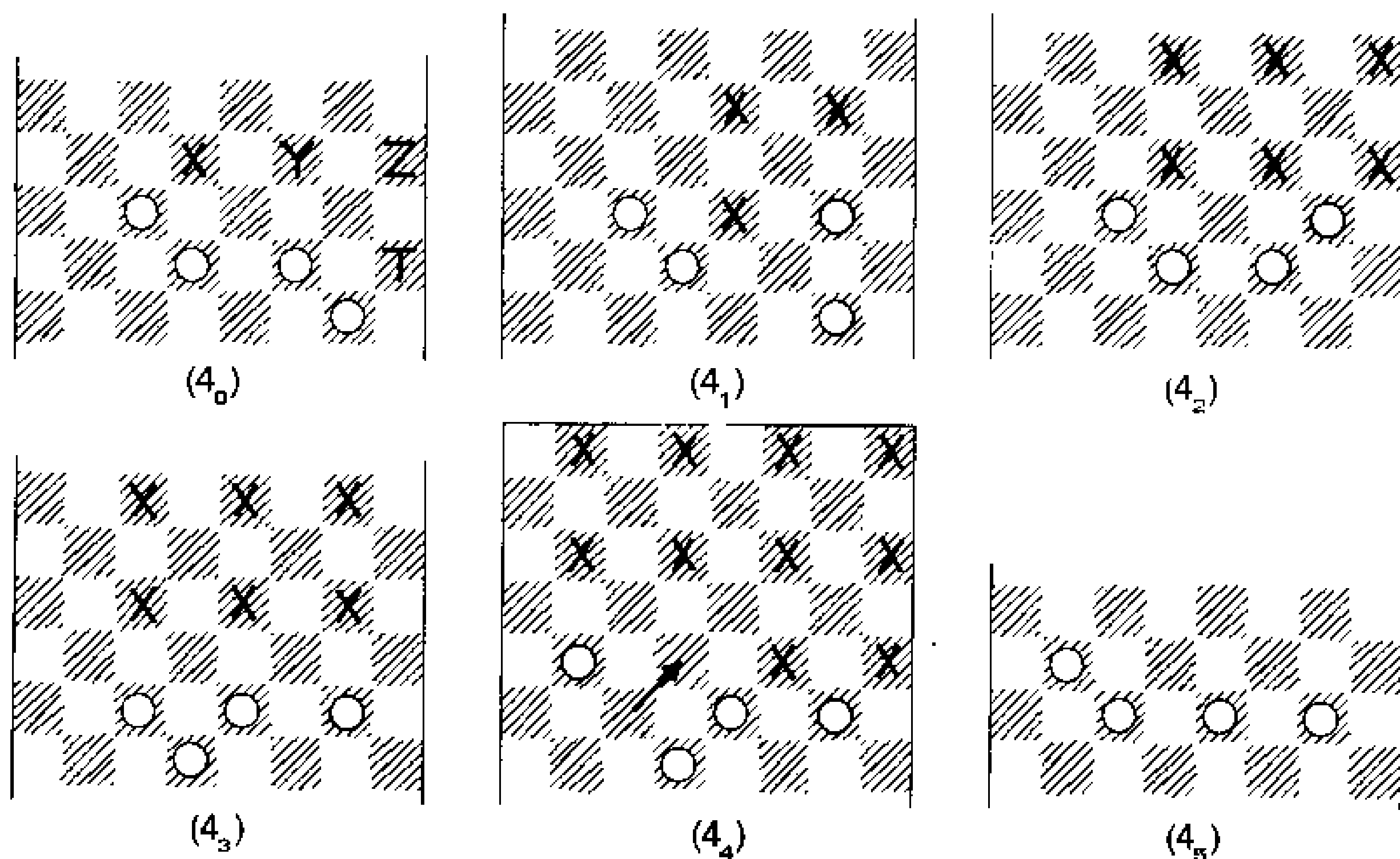


图 4. 状态 D 的分析.

现在,如果鹅的一方处于危险之中(狐狸在×处),它们就可走上简单的一步而立即达到局势 E. 因此我们可以假定狐狸是处于 Y,Z 或 T 的位置,而鹅的一方受到指点,要走出 1,2,3,4,5,于是,图 4_1,4_2,4_3,4_4,4_5 先后表明定过这些相应动作之后的局势,并表明系列中的下一步是合乎规则的,因为在图 4_1 至图 4_4 中我们已经用 X 表明了即将走一步时,狐狸所能到达的每一个可能位置. 由于图 4_5 中所标明的位置属于类型 A,这就证明了对形为 D 的局势来说,策略是能够起作用的. 请注意,如果狐狸处于图 4_0 中的 T,则在走了 1 这一步动作之后他会马上输棋,因为它已在棋盘的边缘被困死.

对形为 A,B,C,E 诸局势的讨论我们打算留给本书读者自己去思考,只是要指出,E 只能从鹅方处于危险状态的局势 D 导出,我们需考虑的只是局势 E 中的狐狸所处的两个位置,即图 3 中打上×记号的,另外还有它右边的两格位置. 不过,对局势 A,B,C 而言,狐狸可以在鹅群一行之上的任何位置,只要是黑白色方格对路就行.

鹅方怎样启动其策略呢? 答案是,除非狐狸选取图 5 中的开始状态 F,鹅方只要第一步定到 A 局势就行. 如果狐狸是在图 5 的 F,那么我们建议鹅方去定步子 1,2,3,然后睁开眼睛,注视另一个异常局势 G,而对于后者,我们只须闭着眼睛去定出另一序列的三步,就可迫使它们返回正常轨道上来.

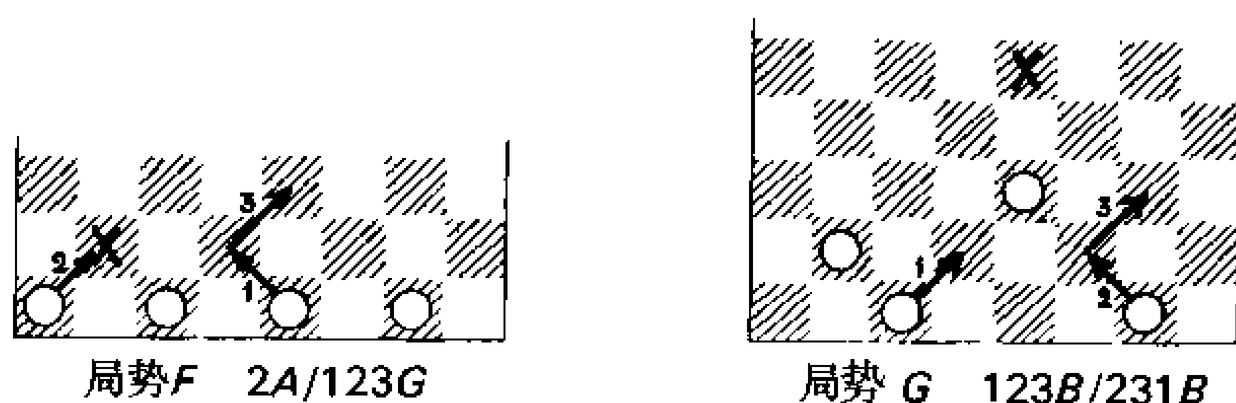


图 5. 异常的开局状态.

我们所取策略的若干性质

由标准的开局状态,实际上除了图 5 所示的异常状态 F 以外的任何状态出发,我们的策略始终不会让鹅方定到最左或最右一列上去. 这种定法之所以有趣是因为绝大多数有本事的玩家只要他们能做到,总是要把鹅走成一排横行. 但如果鹅方这样走的话,那么一头狡猾的狐狸将迫使对方面对一系列复杂局面,其数量将远远超过在我们的策略中所出现的局势,这样一来,鹅方如想取胜,就必须对本游戏的方方面面了解得更加深入. 实际上一只有本事的狐狸能迫使鹅方

面对所有的 A,B,C,D,E 各种类型，而不问它们采用何种取胜策略. 不过，只要鹅方采取我们的策略，那么狐狸就无法迫使鹅方面临其他局势，其时因为它们的动作不能机械式地照本宣科而不得不张开它们的眼睛. 由于我们的策略是唯一的、能使鹅方的决策少到只有五种状态的办法，因而它是唯一的，最小取胜策略.

许多玩家自诩懂得很多获胜秘诀，然而他们老是会上当，这是由于一只狡猾的狐狸能把他们引到一种很不熟悉的局势. 实际上，要使狐狸的一方得以利用对方知识中的缺陷也得有相当功夫. 我们在这里可以给出若干提示：狐狸应该挨近鹅方，使它们围着它，尽量处在棋盘的中间部分，然后乘虚而入，钻进两旁边的空子. 最好的开始位置是靠近诸鹅且直接位于图 2 中 X 下方的方格（对 F 状态而言，就是位于╳的右方两格），不过局势 F 本身也是有用的.

鹅方的优势有多大?

由于在鹅与狐游戏中首先不能移动的一方是输家，所以我们应当可以应用本书其他部分所讲过的一般理论并且至少能近似地估算一下鹅方的优势能有多大. 或许优势是一步的 $\frac{1}{2}$，又或许它等于 $\uparrow$？更有可能它是非常复杂的博弈值而我们还说不出它有什么用处.

本问题的答案相当令人惊讶，因为我们居然能够很精确地计算鹅方的优势，而它确实具有很不寻常的性质. 现在让我们首先来证明此项优势严格地大于 1 步. 为了看出这一点，当然让我们来玩下列游戏：

狐与鹅 -1

（鹅方视为左方），并证明鹅方仍然能赢. 这种新的游戏其实仍是狐与鹅游戏，但允许狐狸这一方在玩游戏时可以“派司”一次（也就是说，它可以在分支博弈 -1 中行动）. 实际上，这种破例的允许对狐狸来说派不上多大用场，而在几乎一切情况下它只能有利于鹅方，如果狐狸派司的话.

但是，图 4 中的分析表明我们的最小策略不再起作用了，因为要使狐狸不逸出轨道就必须频频使用奇偶性. 例如，在图 4_1 中，狐狸有可能在最接近鹅的位置，然后在图 4_2 中停留在那里，这就使走到图 4_3 中成为不可能了. 但这类古怪动作是没有多大用处的，在每一种场合鹅方都能重整旗鼓，尽管它们需要懂得一大批局势来应付局面. 鹅方甚至可以允许狐狸方面“派司”任意多次，只要它不连续两次都“派司”的话. 在以上所述的任何一种情况下，这些说明已足够表明

狐与鹅 >1.

下文我们将要论证，在另一方面，我们将有

狐与鹅 <2.

这个想法就是，狐狸可以一直等待，直至众鹅已极其接近棋盘的顶部，然后再连续“派司”两次. 这样一来就迫使众鹅超越狐狸前进，而狐狸就乘虚而入，然后再一直等待，直到众鹅在棋盘顶上困住而动弹不得为止. 对这种说法作出一个形式化的证明是极其困难的，因为鹅的可能走法非常之多. 但是，如果狐狸方面能紧紧抓住鹅群所形成的障壁并抓住机会进行穿越，则对任何给定局势而言，除了极个别的鹅的行动之外，绝大多数都是明显地带有灾难性的，因此鹅的行动必然是相当简单而直捷的. 看来狐狸方面能安排到一个有利的局势，例如图 6 的 H 或 I. 对 H 位置，在鹅方走过以后，狐狸方面应当“派司”两次，当鹅方从 I 位置走开后，则狐狸方面可以走一步箭头所指出的动作，然后再“派司”两次. 当然这不能算是一个形式化证明，但有兴趣的读者可以来玩上几局试试，他将看到，迫使这种状态的出现是极其容易的，如果鹅方不想输得更早的话. 一个完整的证明不会太困难，但肯定很冗长，因为有许多麻烦的情况要考虑. 我们宁愿假定上述论证已经可以使读者信服.

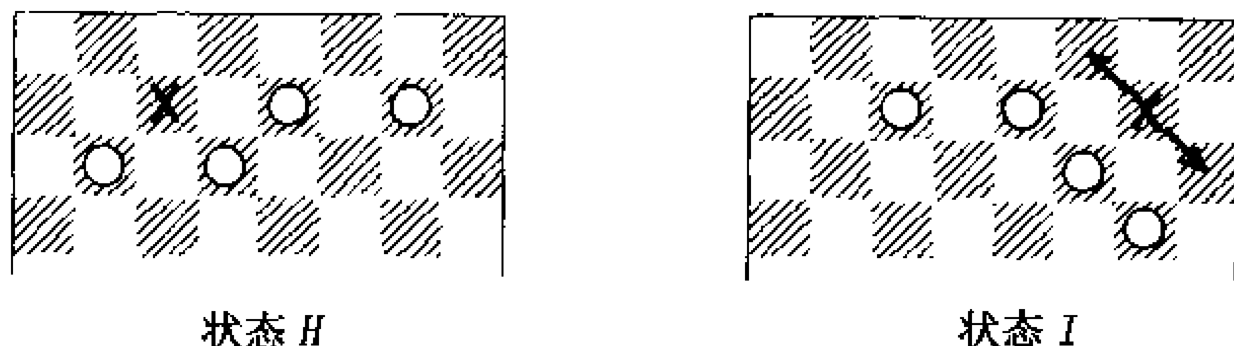


图 6. 狐狸应在何时派司?

显然，下一个要检查的值是 $1\frac{1}{2}$. 表示值 $-1\frac{1}{2}$ 的树图见图 7，它表明，游戏

$$\text{鹅与狐}-1\frac{1}{2}$$

实际上就是狐与鹅游戏，但狐狸(右方)可以“派司”两次，而鹅方也允许“派司”，但只能“派司”一次，并且必须在鹅方没有“派司”时才允许.

我们不需要进一步检查这种形势了. 鹅方显然不愿意用“派司”来浪费时间，因为它们正需要集中精力来防止狐狸的偷渡，所以他们对我们的建议(如果他们喜欢，鹅方也可以“派司”)甚至会感到很不高兴. 在狐狸方面的第一次“派司”之后允许鹅方“派司”或许是有用的，因为这时他们的问题就成为他们被迫穿过狐狸而行动，但当然这正是我们不愿意允许的. 所以，$1\frac{1}{2}$ 是太太了.

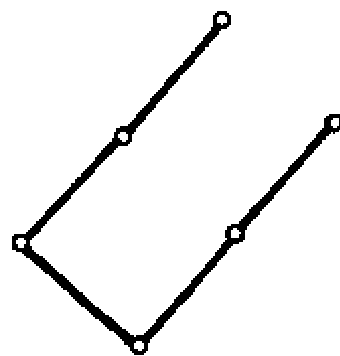


图 7. 负 $1\frac{1}{2}$.

同样的论证表明 $1\frac{1}{4}$，$1\frac{1}{8}$，…也是太大了. 下述建议只会触怒鹅方，即允许他们可以"派司"三次，但它们必须在允许狐狸两次"派司"中的第一次还没有执行之前去做. 但图 8 表明这等价于从该游戏中减去 $1\frac{1}{8}$. 于是显然我们现在可以断言：

$$1 < \text{狐与鹅} < 1+\frac{1}{2^n}$$

对一切 $n=0,1,2,3,\cdots\cdots$ 均成立. 换言之，狐与鹅游戏的值同 1 相比，只大出一个无穷小量.

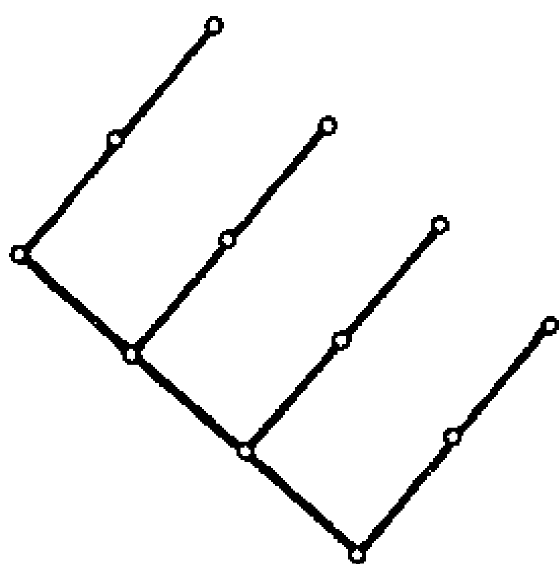


图 8. 负 $1\frac{1}{8}$.

对现实生活中孩子们所玩的游戏能够说上这样一番话自然很有趣，但当然我们不需要就此止步. 我们知道，许多游戏是正值性质的游戏，但要小于任何正数，譬如说，$\uparrow$ 这个游戏就是最有名的. 那么，同 $1+\uparrow$ 比较起来，狐与鹅游戏又怎么样呢？

$$\text{差} \quad \text{狐与鹅}-(1+\uparrow)$$

最好看成是

$$\text{狐与鹅}+\downarrow \text{的游戏.}$$

作为附加条件，允许狐狸方面可以"派司"一次. 鹅方应当怎样办呢？它们直率地需要消除分支 $\downarrow$，因为我们已经知道给狐狸方面一个简单的"派司"是阻挡不了鹅方获胜的.

所以，在狐与鹅游戏的主体部分采取行动以前，鹅群必须在 $\downarrow$ 中行动，留下 $*$，然后如果狐狸方面不照这样去做，则鹅方就在下一步中用○来取代 $*$. 若狐狸在 $\downarrow$ 或 $*$ 中行动，情况甚至会更有利. 从而，事实上有

$$\text{狐与鹅} > 1+\uparrow.$$

通过完全类似的论证我们将可得出

$$狐与鹅>1+n\cdot\uparrow$$

对 $n=1,2,3,\cdots$ 都成立. 关键是 $n\cdot\uparrow$ 是一个极小极小的博弈,只要对一个局中人仍有合法的一步可走,则对另一局中人也必然有其合法的一步. 鹅方于是在开始进人游戏的主体部分之前先囊括所有的小分支,而狐狸如何应答是无关紧要的——他要么在棋盘上无所事事. 要么在小的分支博弈上慢慢咀嚼其食物,这是因为对他来说,白白浪费掉一次"派司"是笨拙之举——但当他一旦这样去做时,那么真正的游戏开始时,他的报应就将来临.

一个悖论

此时,我们似乎发现了一个自相矛盾之处. 不论哪一方先走,狐与鹅游戏最多只能持续 57 步,因为四只鹅中的任何一只至多只能前进七格,同鹅方的 28 步作为交替,狐狸方面至多只有 29 步可走. 但我们的一个定理却断言,小于任一正数的任何有限博弈必定小于 $\uparrow$ 的某个有限倍数,从而我们似已证明了

$$n\cdot\uparrow<狐与鹅-1<\frac{1}{2^n}$$

对一切 n 都成立. 这又如何解释?

或许麻烦来自公认的易变论证:它声称事情再明白不过,狐狸方面用两次派司即可取胜? 也许两次派司确实可赢,但推广到 $1+\frac{1}{2^n}$ 仍是足够的说法就未必如此(瞧不起人地)显而易见? 涉及 $1,1+n\cdot\uparrow$ 的论证看来很保险,但即使在那些地方或许我们仍然忽视了某些东西?

对你们来说,提出这些建议是不难的,但具体实现起来却不大容易. 我可以打保票,在

$$狐与鹅-(1+n\cdot\uparrow)$$

游戏中,我如果走鹅方,你们绝对打不败我. 另一方面,我已准备下一笔很大的赌注,在

$$狐与鹅-\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

游戏中,我准备下狐狸一方,不管你们选释什么数 n,而我总是能赢.

噢! 当然现在我明白了! 狐与鹅实际上完全不是一种有限博弈. 游戏本身至多只能持续 57 步,这是不错的,但现在我们已经不是在玩一个单纯的游戏,而是一种博弈之和. 在狐与鹅游戏中,狐方可连续走几步,但鹅方却可以在别处行走. 所以狐与鹅游戏实际上是一种无限博弈,而我们从第 11 章已经了解到,存在着大于 $\uparrow$ 的一切整倍数的无限博弈(甚至是某些数),但仍然小于 $\frac{1}{2^n}$(对每一个有限数 n),例如

$$\frac{1}{\omega}=\left\{0\middle|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\right\}.$$

我们才刚刚略为仔细检查了狐与鹅游戏，现在让我们再拿它来同 $1+\frac{1}{\omega}$ 作比较. 它究竟等于什么呢？同以前一样，我们允许狐狸方面"派司"二次，但如今鹅方可以"派司"任意有限多次，只要它们做在狐狸的第一次派司以前就行，并且在它们第一次"派司"时明确宣布它们究竟要作出多少次"派司". 换言之，在它们的第一次"派司"时，它们可以选择让狐狸从数 $-2,-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{4},\cdots$ 中选取哪一个，以便同方程

$$-1-\frac{1}{\omega}=\left\{-2,-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{4},\cdots\middle|-1\right\}$$

取得一致.

无礼之举，你又能干到什么程度？在这种存心冒犯的限制下，我们向它们提供一次或二次"派司"机会，鹅方是并不乐意的，如果向它们提供无限多次"派司"，那只会使冒犯更为严重. 显然，

$$\text{狐与鹅}<1+\frac{1}{\omega}.$$

让我们来看看，我们究竟能冒犯到什么程度？如果我们真的尝试一下的话. 方程

$$-1-\frac{1}{2\omega}=\left\{-1-\frac{1}{\omega}\middle|-1\right\}$$

给了我们一个暗示. 因为对任一序致 β，我们将有下列方程

$$-1-\frac{1}{2^{\beta+1}}=\left\{-1-\frac{1}{2^{\beta}}\middle|-1\right\}.$$

更一般地，有

$$-1-\frac{1}{2^{\alpha}}=\left\{-1-\frac{1}{2^{\beta}}(\text{对一切 }\beta<\alpha)\middle|-1\right\}$$

这是对任一序数 α，而 β 遍及于一切较小数都成立的式子. 我们能够为鹅方提供下列超级奉献. 它们可以选择它们所喜欢的任意序数 α，不管它何等庞大，譬如说 $\omega,\omega^2,\omega^{\omega},\omega^{\omega^{\omega}},\cdots\cdots$ 然后，当它们一旦"派司"，它们就必须用一个严格的较小的致来取代，而在下一次"派司"时再用一个更小的数来取代，……就这样依此类推. 只有一个极小的限制，在如此慷慨大方的奉献之后，我们希望它们不会介意. 那就是：允许狐狸方面"派司"两次，即使鹅方可以"派司"一百万次. 不过在狐狸方面作出第一次"派司"之后，鹅方就不能再"派司"了. 鹅方的可能反应强烈地提示，对任一序

数 α,不论它多么大,总有

$$\text{狐与鹅} < 1 + \frac{1}{2^\alpha}.$$

另一方面,我们可以将狐与鹅游戏同 1 加上 ↑ 的无限多个倍数去比较. 这类博弈是存在的,但 ↑ 的无限多倍都是一些极为渺小的博弈,而我们对 ↑ 的有限多倍所作的论证仍可适用. 唯一的差异只是我们不再给出一个时间的上界来让鹅方吞噬所有的 ↑. 于是我们就能进一步强化以前所获得的结论:

$$1 + \uparrow \text{的任意倍数} < \text{狐与鹅} < 1 + \text{任一正数}.$$

即便对无限终端游戏,这样的事情也不会发生. 然而,在狐与鹅游戏中,狐狸可以行走无穷多次,即便鹅方已经无法行动了. 由此可知,狐与鹅游戏不是一个终端游戏,然而它可以是一个停止游戏(参看第 11 章).

按记录钟

我们可以把狐与鹅游戏转变为一种真正的终端游戏,只要像图 1 那样,给狐狸的一方某种时间记录钟就行了. 在任何时刻,狐狸一方的记录钟都有着一个数,无论何时它走动时,都必须按一按时钟——即将此数变换成一个比原数更小的数. 例如,我们可以从具有 100 个读数的时钟开始,限制他至多只能走 100 步. 在我们所作的最新讨论之后,这看来似乎限制得太苛刻了,不过,我们可以同意他选择任何序数,甚至从无穷大开始都行. 当然,鹅方的记录钟决不会显示出大于 28 的数字,甚至省略掉也不打紧. 因为鹅方的记录钟已经植入游戏的本性中去了.

让我们把经过修改后的游戏(即狐狸方的记录钟由 α 开始)称为(狐与鹅)$_\alpha$. 现在我们已把游戏修改得使狐方更加不利,从而自然会期望下列不等式成立:

$$(\text{狐与鹅})_\alpha > \text{狐与鹅}.$$

实际上我们可以证明

$$(\text{狐与鹅})_{\alpha+30} < 1 + \frac{1}{2^\alpha} < (\text{狐与鹅})_\alpha.$$

因为鹅方可以利用那些我们提供给他们的那些极端蔑视性的派司而赢得下列游戏:

$$(\text{狐与鹅})_\alpha - 1 - \frac{1}{2^\alpha}.$$

任何时刻,只要狐狸一方按一按时钟,用 γ 替换 β,鹅方就可以运用他们的派司动作,用 $-1-\frac{1}{2^\gamma}$ 来替换 $-1-\frac{1}{2^\beta}$. 在狐与鹅游戏本体中,鹅方不需走任何动作,因为在它们需要行动时,狐狸

方面早就输了！

另一方面，狐狸方面用类似的欺诈方式可以赢得游戏

$$(狐与鹅)_{\alpha+30}=1-\frac{1}{2^{\alpha}}.$$

他可以使他的记录钟至少显示出比留给鹅方的派司数多出 30 步的动作，而当鹅方用尽派司动作时，他可利用自己的两个派司来赢得游戏. 而这至多不过 30 步动作.

那么，狐与鹅游戏究竟有多大的“值”呢？似乎比较自然的办法是把狐与鹅游戏视为截短形式(狐与鹅)$_\alpha$ 的极限，此时 α 将通过一切序数集合类 on 而无限递增. 或者可以记为

$$(狐与鹅)=(狐与鹅)_{\text{on}},$$

这是因为 on 可用来表示一切合适的序数之极限. 实际上，on 本身并非真正是一个序数(犹如∞实际上并不是一个整数，而是整数之极限). 把 on 想像为最大的序数，其实并没有多大的害处(它实际上不存在，但可视为绝对最大的无限数).

由于 $\alpha+30$ 如同 α 那样趋向于 on，所以下列写法

$$狐与鹅=1+\frac{1}{\text{on}}$$

颇有意思，此时，式子的左端不是一个真正的游戏，而式子的右端则不是一个真正的数！尽管我们的论证不能算是一种形式化证明，但就第 11 章的转圈子游戏而言，这个式子极有可能是成立的.

有一个著名的数学论证叫做布拉里—福迪(Burali-Forti)悖论，按照它的说法，应当确实存在一个最大的序数. 我们现在可以说，狐与鹅游戏在数量上有欠缺，以致不能认为是一个真正的游戏，正如布拉里—福迪论证确实是似是而非的一般无二！

增 补

土邦主与印度兵*

如同我们在第 19 章增补材料中所说过的那样，合围游戏有许多种类，捕捉方式也各有不同. 例如，鹅与狐游戏也可以在英国式的独立钻石棋盘上来玩(见本书第 23 章)，其中有些已在第 19 章的增补材料中描述过. 这些游戏中的绝大多数都在敌对双方的子力中有意地赋予数量上的不平衡. 譬如说，对力量较弱的一方给予较大的流动性. 在这方面，一个极端的例子是"土邦主与印度兵游戏"，它可以像普通国际象棋那样来玩. 这时白方有一套 16 枚棋子**，从它们的通常位置开始行走，而黑方只有一枚棋子，叫做"土邦主"，它可以放置在任意一个没有棋子占据的空格上，像皇后或骑士那样行走. 双方的目的是要将死对方：白方的王棋或黑方的土邦主. 像这类游戏中的大多数情况一样，大兵团的一方总是占上风，如果行走得法，白方一般可赢.

棋子数量接近，力量也比较均衡的其他游戏将在第 22 章予以阐述.

参考文献及进一步阅读材料

Robert Charles Bell, Board and Table Games from Many Civilizations", Oxford University Press, London, 1969.

Maurice Kraitchik, "Mathematical Recreations", George Allen and Unwin, London, 1943.

Fred. Schuh, "The Master Book of Mathematical Recreations", transl. F. Göbel, ed. T. H. O'Beirne, Dover. N. Y. , 1968. Chapter X: Some Games of Encirclement, pp. 214—244.

* 译者注：也有译作"摩诃拉迦"的，是印度的土邦领主.

** 译者注：其意思是指，白方的全套人马都全，包括王，后，车，马，象，兵等.

第21章

野兔与猎狗

我喜欢打野兔，

更甚于猎狐狸.

——威尔弗莱德·斯坎温·勃伦特,《老乡绅》

法国军队中的打猎游戏

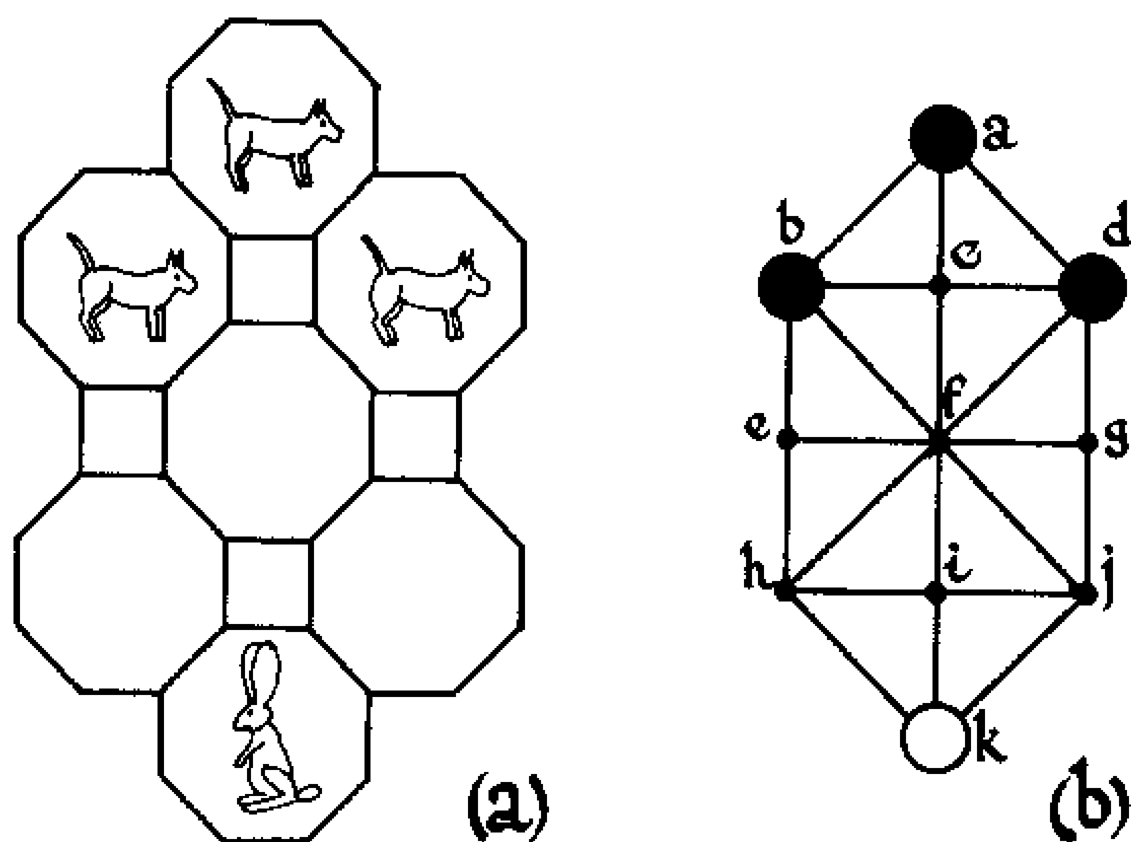


图 1. 法国军队中的打猎游戏，野兔与猎狗在小型棋盘上.

这种小游戏很像狐与鹅游戏. 一位猎人有三只狼狗，企图捕捉一只野兔，棋盘的形状如图 1(a)所示. 如果你没有本事说服这些动物进行正确的操练，那么你最好还是用四枚硬币在相应的棋盘上(见图 1(b))来玩耍. 在较大的棋盘上(见图 2)来玩，自然更加有趣. 轮到走棋时，猎人可以把他的任意一只猎狗移到相邻的位置上去，野兔的走法也与此类似. 不过，从顶上出发的猎狗只能前进，不能后退，但在水平方向允许来回走动，如图 1(b)中的 e 与 f. 至于兔子，那是完全自由的，它可进可退，又可在水平线上走动. 如果猎狗的一方逼得兔子不能走动，那么他就赢了. 反之，如果猎狗方面连走十步而不能擒获兔子，那么就算是兔子一方得胜.

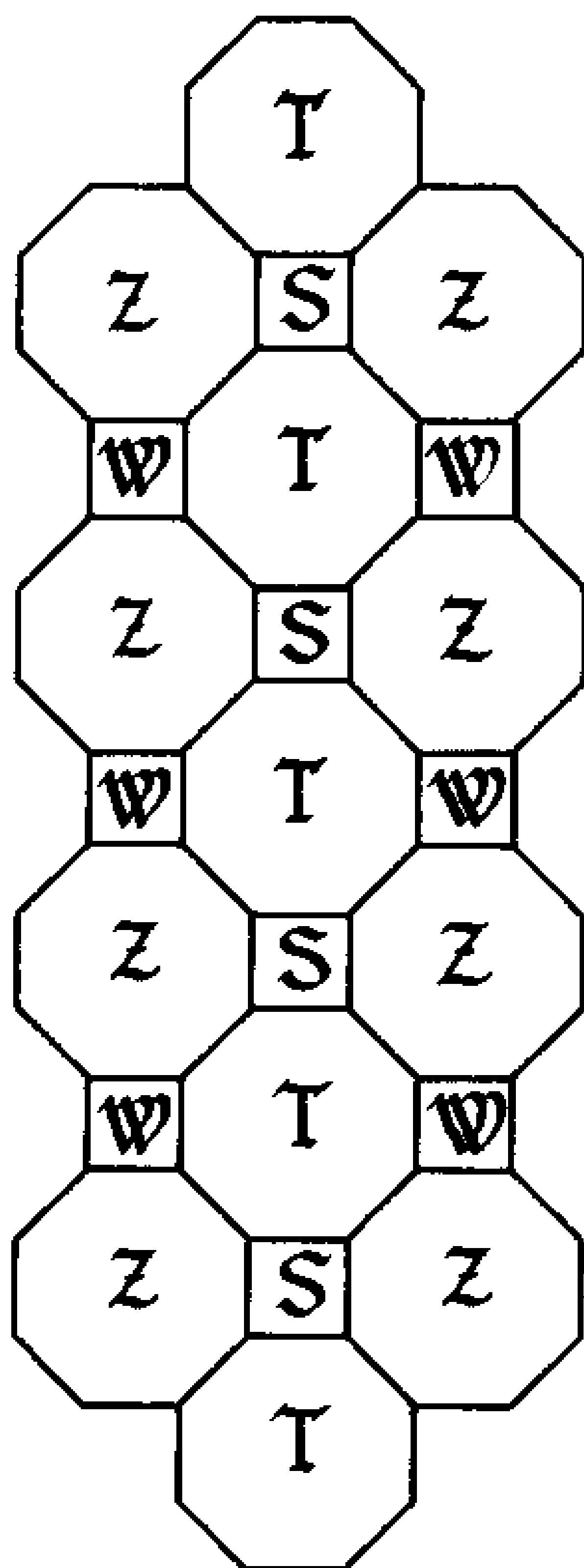


图 2. 有四类位置的较大棋盘.

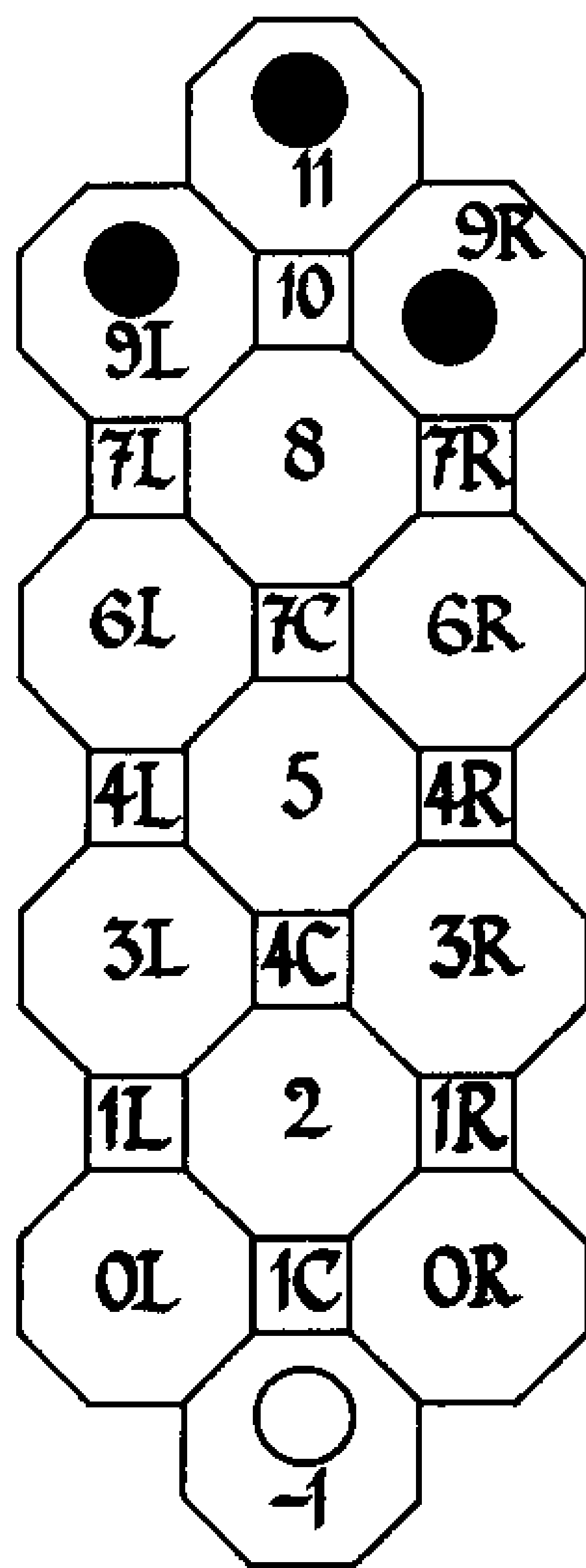


图 3. 较大的棋盘，已用数目字编好号. 以便进行跟踪.

两个试验性质的对局

倘若你想了解本游戏究竟是如何进行的，那就请你摆好棋子，看一看一位老练的猎人怎样抓住一只初出茅庐的兔子：

猎狗：*abd cbd fbd fed fhd fhg fhj ihj*（赢了！）
野兔： *k i j g j i k*

第一局

捕捉十分容易，犹如手到擒来，于是这位新手就想指挥猎狗去擒住一只狡猾的野兔了：

猎狗：*abd cbd fbd fed feg fhg fig eig fig fij*
野兔： *k j i h k j k j k h*

第二局

现在兔子就会通过 *e* 或 *f* 逃跑了.

如果让老练的猎狗来追逐狡猾的野兔(图 1)，那么何者能赢呢？假定由兔子走第一步，情况又将如何？由不同的位置开局呢？(见本章增补材料.)图 3(那时你已变得更加老练)的情形又将怎样？

简史

按照刘卡的说法，图 1 的那种游戏在 19 世纪的法国军官中十分流行. 有人说发明人是路易·狄因(Louis Dyen)；另有一些人则把它归功于康斯顿·劳合(Constant Roy). 这游戏在刘卡(1893)与席罕(1943)手里得到解决，并且再一次被马丁·加德纳(1963)推向公众. 席罕的研究分析建立在一张表格之上，此表含有猎狗一方的 18 类获胜形势(已复印于本章附录). 他认识到“对立”走法起看重要作用，但他未能对它给出确切的定义. 在后面的一节中我们将给出定义以简化图 1 的游戏，它也使我们解决了图 3 的游戏.

不同种类的位置

现在让我们仔细地察看棋盘. 实际上存在着两种类型的八边形：处于中间位置的(图 2 的 T)与位于边上的(图 2 的 Z). 正方形也有两种：中间的(S)与边上的(W)，除了图的顶部与底部，每个 T 或 Z 都至少与另一类型的一个图形相邻，但是每一个 W 或 S 只与八边形 T 或 Z 相邻. 由于

W 与 S 从来不相邻，所以为了方便起见，有时可以把它们放在一起，视为单独的一类 N. 对这三种类型 T，Z，N 来说，任何一个位置，即使是顶上与底下的，都至少同其他类型的一个位置相邻，但是同本类型的位置不相邻. 图 3 中的数字除以 3 后的余数对应于下列字母：

> 余数 0：Z
> 余数 1：N＝弱或强
> 余数 2：T

在图 3 中，相邻位置的两数之差总是等于 1 或 2.

四只动物占位数字之和是位置的一项重要性质，我们称为**追迹**. 每走一步，追迹将会改变 1 或 2. 如果猎狗们在棋盘底部捕获兔子，则猎狗们将处于 0，1，0 位置，而被擒的兔子处于－1，从而追迹等于 0. 如果猎狗们是在棋盘边上（譬如在 1L）抓住兔子的，则它们是在 3，2，0 的位置，而兔子在 1 的位置，于是追迹等于 6. 容易验证，下列测试法则必然成立：

> 不管你在何处抓住兔子，你将发现：追迹必能被 3 整除！

三整除，抓兔子！

对立

猎狗们想擒获兔子，最好的办法是在每轮行走时尽量使追迹等于 3 的倍数. 我们将称此办法为"保持对立". 如果它们真的这样做了，那么兔子的走法必须是走到一个不是 3 的倍数的地方，因这将使追迹改变 1 或 2. 但当追迹不能被 3 整除时，猎人通常有几种走法移动他的猎狗以使追迹重新成为 3 的倍数，在这些选择中他应选出一个可以取胜的位置.

> 能够被 3 整除的追迹，绝大多数情况可获胜.

保持对立

如果你复查一下上面第一局的游戏，棋盘上的编号如图 4 所示的话，你将发现，猎狗们确实是一直保持着对立状态的：

兔子：	*k*	*i*	*j*	*g*	*j*	*i*	*k*
猎狗：	*cbd*	*fbd*	*fed*	*fhd*	*fhg*	*fhj*	*ihj*
追迹：	9	9	6	6	3	3	0

兔子不想被擒，它当然不希望猎人走到追迹等于 3 的倍数的位置. 为了防止这种情况发生，最好的办法莫过于兔子自己急忙抓住"对立"位置. 这样一来，不论猎狗怎样去走，都将导致追迹不是 3 的倍数了，而兔子倒可以继续保持"对立". 这正是兔子在上面第二局中获胜的策略. 猎犬们在第二步中慌乱地犯下一个大错误，从 4 走到 2，结果使追迹等于 8，从此以后兔子在它的每一步行动中都保持了"对立"：

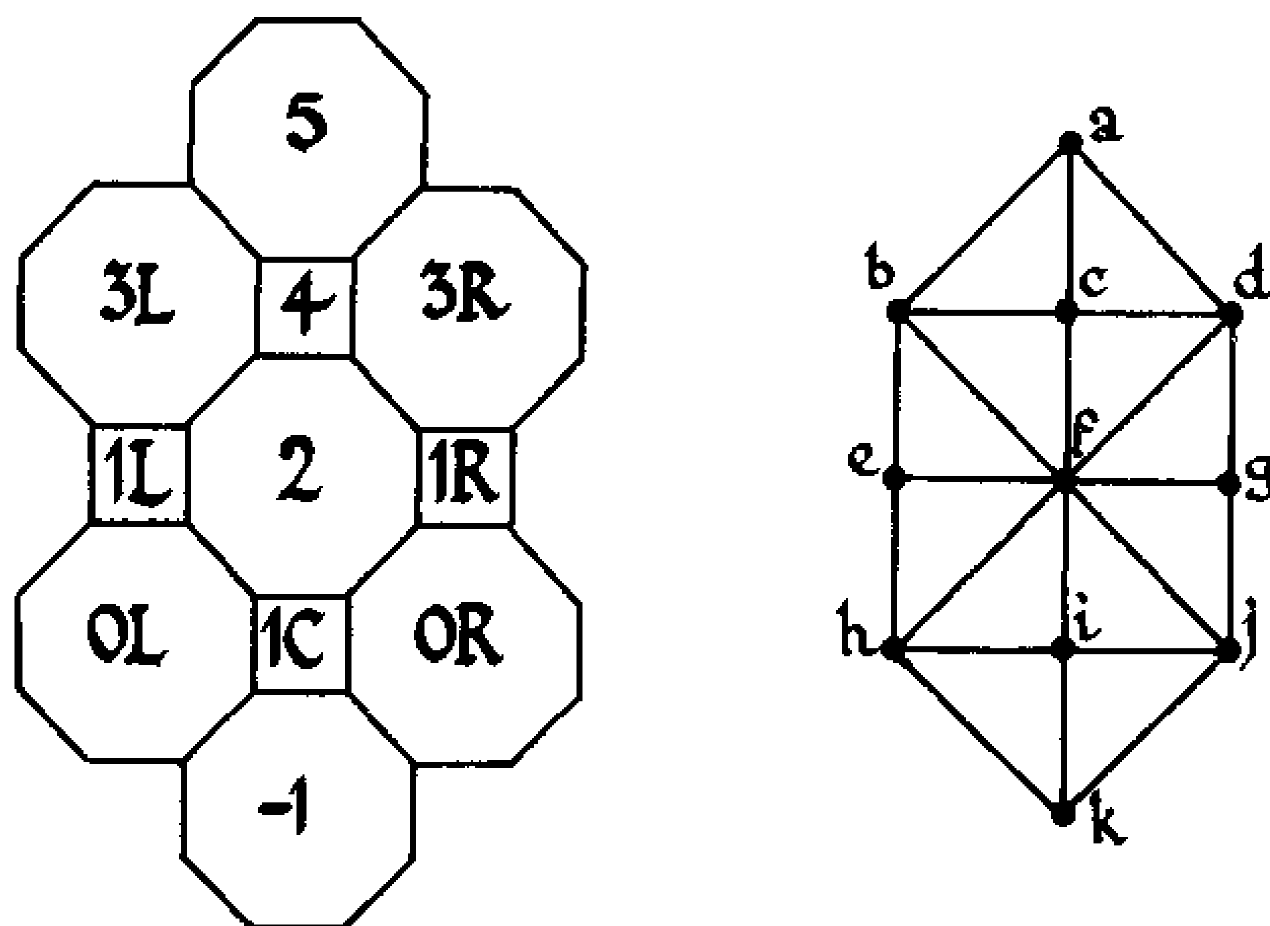


图 4. 确定"对立"的棋盘编号.

猎狗：	*abd*	*cbd*	*fbd*?*	*fed*	*feg*	*fhg*	*fig*	*eig*	*fig*	*fij*
兔子：	*k*	*j*	*i*!	*h*	*k*	*j*	*k*	*j*	*k*	*h*
追迹：	10	10	9	6	3	3	3	3	3	3

* 译者注：?号来示导致失败的劣着.

第三局

猎　狗	兔　子	追迹	评　　注
3L,5,3R	—1	10	取得“对立”态势.
3L,4,3R		9	
	0R	10	
2,4,3R		9	一名新手猎人或许会从 4 走到 2，表面看来，似乎他取得了坚实的位置，但失去了“对立”.
	1C	10	
2,3L,3R		9	另一个“合理”的走法，3R 走到 1R，使追迹变为错误的数字. 由于从 2 走到 1 将会使兔子逃脱，所以实际上只有一种正确的选择.
	—1	7	
1C,3L,3R(!)		6	由于猎狗不能后退，它们无法使追迹增加 2，为了取得“对立”态势，只能使一只猎狗从 2 走到 1，以便使追迹由 7 减到 6. 走到 1R 或 1L 虽然不会输，却浪费了时间，因为兔子走到 1C 即可迫使猎狗回复到目前的位置.
	0R	7	
1C,2,3R		6	把追迹回复到 6 的另外两种走法（从 3R 走到 2，或者从 1C 走到 0L）将会使兔子逃脱.
	—1	5	
1C,2,4(!)		6	保持“对立”的其他走法（从 3 走到 1，或者从 2 走到 0）将会再一次使兔子逃选，从而只剩下这一个看来不大会利用的走法.
	0R	7	
0L,2,4(!)		6	从 4 走到 3R 又会回到老地方；从 2 走到 1 就会让兔子逃走；只有从 1C 到 0L 才有进步.
	1R	7	
0L,2,3R		6	
	0R	5	显然.
0L,2,1R		3	
	—1	2	兔子的最后关头.
0L,0R,1R		0	新手猎人有可能会从 1R 走到 0R 而输棋.
	1C	2	
0L,0R,2		3	唯一的时刻，猎狗们的追迹比它们以前的要大.
	—1	1	
0L,0R,1C		0	赢了.

所以不论是哪一方，谁能走到追迹可以被 3 整除的位置，他就掌握了胜机，或者说，拥有了“对立”. 所以，“对立”是双方都想要的宝货. 但它并不是所有情况下都能得胜的“法宝”，因为有时，猎狗们拥有“对立”，但还是不能阻止兔子的溜走. 另外，有时兔子在几步中拥有“对立”，但它后来却失去了，因为猎狗们封锁了通路，使它走不到保对“对立”的位置. 尽管如此，这些情况是较为少见的，所以水平一般的猎人，只要将上述原理同普通常识结合起来，就足以在较小的棋盘上捕获一只初出茅庐的小兔子. 本书 245 页上给出了一盘详细注释过的对局.

兔子何时逃脱？

如果兔子已经或正在越过两只猎狗，那么它就能**逃脱**，除非它是在一个正方形位置(W 或 S)，而猎狗们可以立即进占在它旁边或头上的、与之相邻的正八边形格子(Z 或 T).

尽管兔子未必脱逃，但在某些位置，猎狗未能迫使它后退时，那么它就取得了**自由**. 这种情况是肯定能够实现的，如果它已经严格地越过了一只猎狗，又不在一个较弱的 W 方格里，或者，它是在中间的八边形格子(T)里，已经或正在越过至少一只猎狗.

失去“对立”

有时某方尽管不拥有“对立”形势而还是能赢，为了分析这类例外情况，最好的办法是分析这些动物所占位置的类型. 譬如说，猎狗们刚才获胜的一切位置都是 Z^2NT 这种类型，这意味着两只动物处于 Z 位置，一只在 N，一只在 T.

某些例外情况的出现则是由于 N 位置的强弱差异. 每一个强(中间)N 方格与四个其他位置相邻，但是一个(边缘)N 方格仅仅同其他三个位置相邻. 在其他情况相同时，一个动物宁愿要强格而非弱格，因为两者在“对立”方面所作的贡献是相同的，而强的位置在今后会向它提供更多的机会. 例如，当猎狗们走到图 5 时出现一种情况. 尽管猎狗方面占有“对立”态势(追迹 3)兔子却可以走到 1C 而获胜，因为现在唯一的能保持“对立”的猎狗走法却使兔子逃走了. 从某种意义上说，这种 N^2T^2 的位置导致失败的原因是由于在 1R 处的猎狗是位于弱势方格. 另一方面，我们从上面的第三局可以看到，在 −1 位置的兔子对 4C，2，1C(另一个 N^2T^2 位置)处的猎狗毫无防卫能力可言. 除非兔子越过一只或多只猎狗，S^2T^2 对猎狗能赢，可是 SWT^2 却经常导致失败.

作为另外一个例子，可以假定兔子正好走到了图 6 的位置. 他掌握着“对立”态势，但当位于 4C 的猎狗走到 3L 之后，兔子必须后退到 0L，丢失了“对立”，也输了棋. 但在 1C 处的兔子对付

这些猎狗的话，那就可以拥有"对立"并且赢棋. 于是可以再一次看到，方格的强弱之差即意味着输或赢，但这一次是站在兔子的立场来说话.

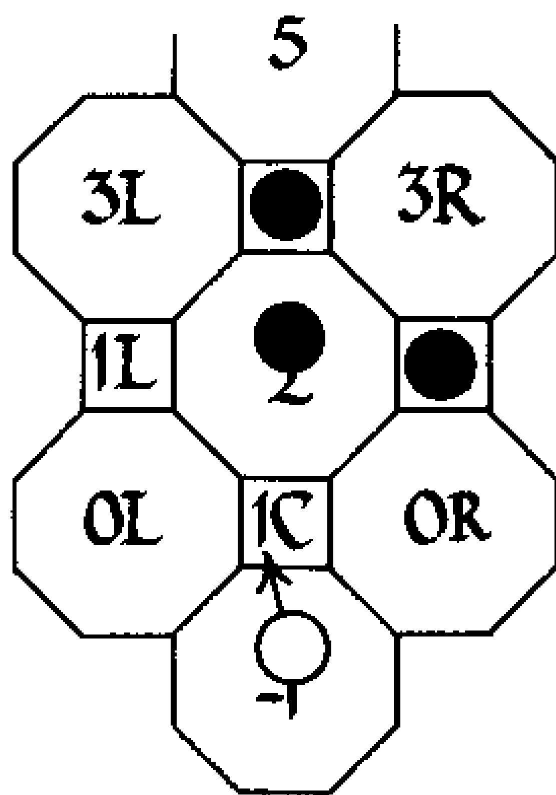


图 5. 一个例外的、兔子与猎狗位置.

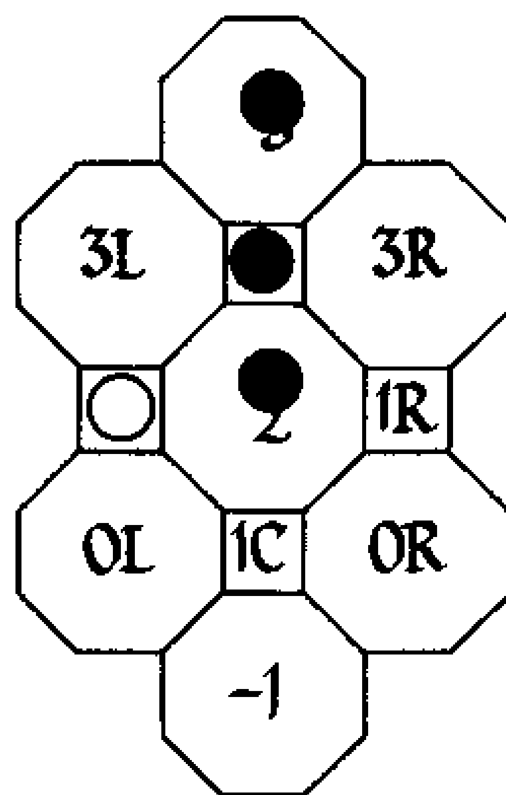


图 6. "对立"原理的另一个例外情况.

兔子的一个策略

我们将要表明，在图 7 那样的半无限长棋盘上掌握"对立"态势的一位兔子行家要么能够无限期地维持，要么逃脱出去，除非它必须从**吓坏兔**子 * 的位置(见图 8)出发. 实际上兔子将始终停留在编号为 1C，0L，0R，－1，－2L 与－2R 的六个打上阴影线的格子里，除非猎狗放它出去，它的基本策略是维持"对立"态势.

> 如有可能，马上逃走或获得你的自由！否则，你就滞留在六个阴影位置内，倘若你能走到一个不弱的格子而能继续保持"对立"的话，那就这样去做. 如果通向 S(1C)的一步已被封死，则(A)对付 T^2S 的众猎狗，应该走到 W(－2L 或－2R)，(B)对付 ZN^2 的诸猎狗，应该进到 Z(失去"对立")，在被猎狗占据的 Z 的棋盘的另一侧. 如果通往 Z(0)的一步已被封死，则(C)走到 T(－1)(失去"对立").

兔子的策略

* 译者注：譬喻兔子好像惊弓之鸟，吓得要死，躲藏在这些地方.

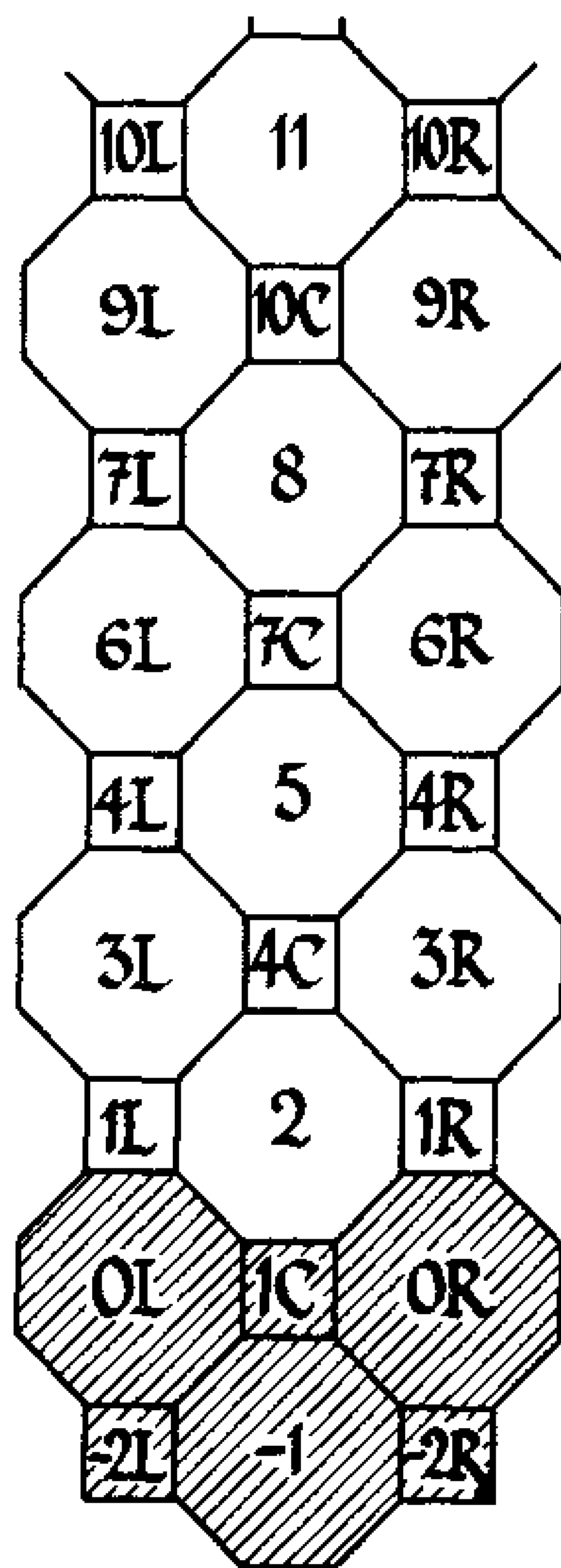


图 7. 在半无限长棋盘上保持"对立".

如有两种或两种以上走法都符合上述法则，则可任择其一. 如果连一种都没有，那就干脆推盘认输(或者蒙混过关，等待对方走出错着)!

首先我们证明，若猎狗们到达图 8，则兔子的新近一步必为(A)，(B)或(C)型. 因若诸猎狗从它们拥有"对立"态势的位置出发，则兔子在走出其最后一步时，必将失去"对立"态，而目前的位置必走是由(B)或(C)而到达的. 否则，猎狗必定来自一个追迹为模 3 同余子 1 的位置，也就是来自 Z^2N，因为图上它们是在 Z^3 的. 在兔子的最近一次移动时，2 是空白的，而 0L 或 0R 中的一格

则被一只猎狗所占据.但如果兔子来自 0L,1C 或 0R 时,它就可以走到 2 而逃脱了,因而它必定来自较弱的方格－2,而这只能通过(A)型的一步而到达那里.

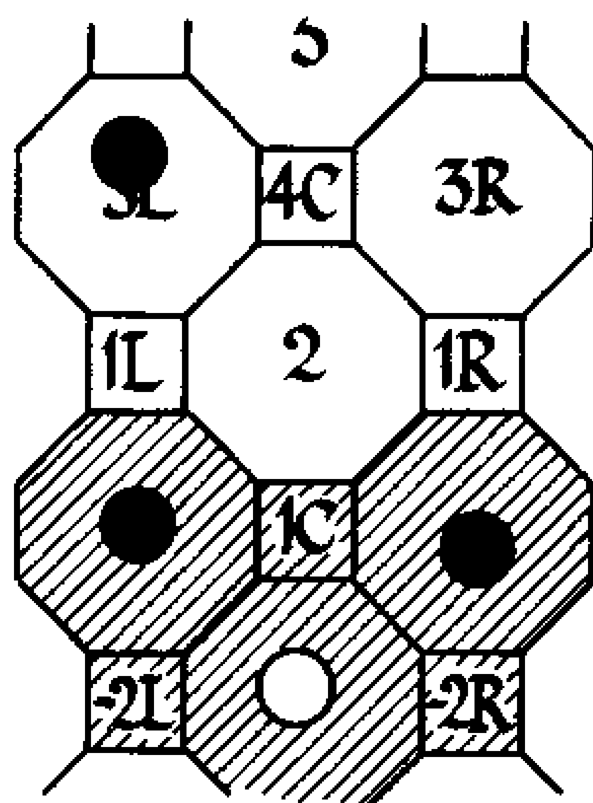


图8. 惊魂未定兔子的藏身巢穴

假定你按此策略刚刚走出了不属于(A),(B),(C)型的一步.于是你就拥有"对立"态势,又不在弱的方格,下面的表格将表明,兔子策略将会再赐给你另一步,除非你而对的是惊魂来定的兔子位置.

从＼到	Z	S	T
Z	——	(A)或进到 T 而获得自由	已经自由
S	进到 T 而逃脱	——	已经自由
T	不是图 8,可以逃脱	(A)或(B)	——

接着,再假定你刚刚走出了属于(A)型的一步.于是在以后几步中你能做到或者逃脱,或者通过不属于(A),(B),(C)型的一步而重新获得"对立"态势,并且诸猎狗不能立即定到图 8 的形势.这是由于:利用了(A)之后,强势方格 1C 必被占据,被占的还有两个中央八边形(不包括－1,因为兔于还没有逃脱),见图 9.现在,兔于策略中从一个 N 方格失去"对立"的唯一途径是:在一只猎狗定到 0L 时,走出属于(C)型的一步.但在图 9 中,走出(a)的一步之后,兔子方面重新掌握

了"对立"态势,而且在(b)的一步后,它很快逃脱了.猎狗们没有办法及时到达使兔子吓得半死的状态.

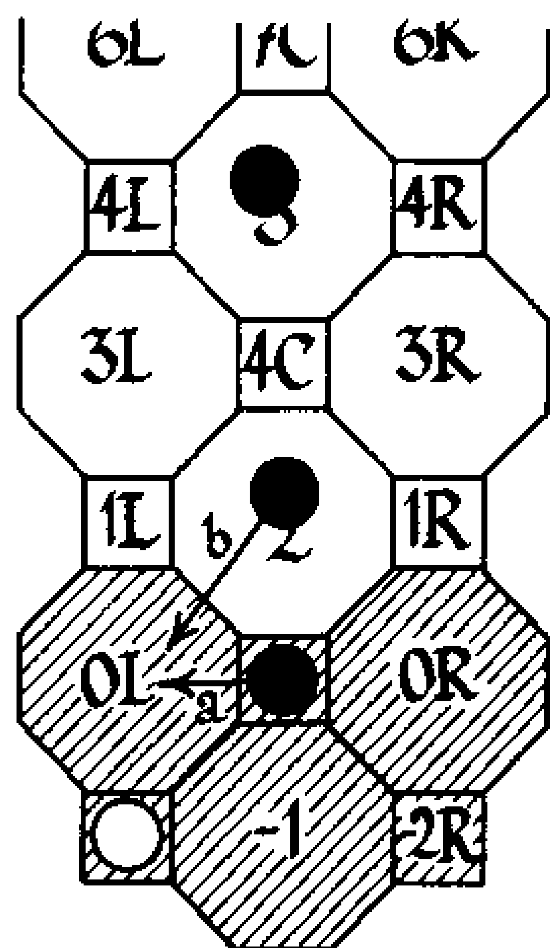


图 9. 走过(A)型一步以后的位置.

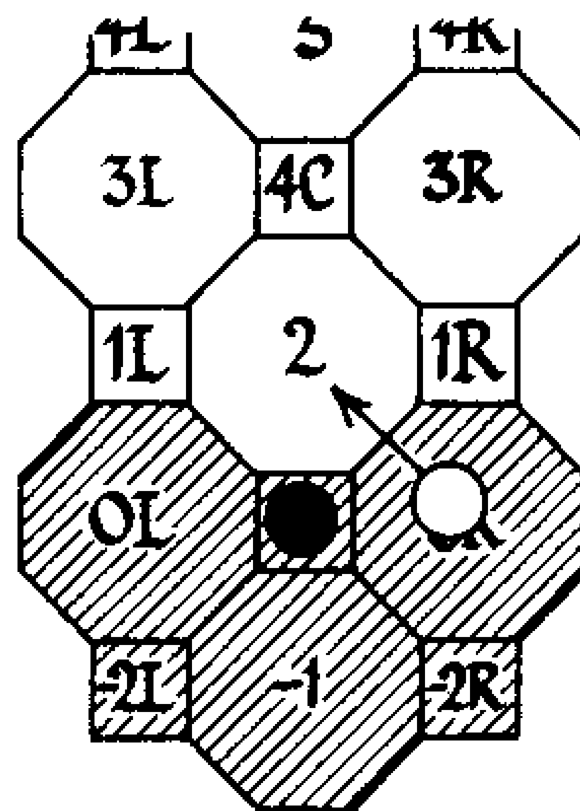


图 10. 走过(B)型一步以后的位置.

现在假定你刚刚走出了属于(B)型的一步(图 10).你吓唬对方说你将走到前面的空白 T 位置而逃跑.如果猎狗方面从 N 走过来填补了这个空格,你就可以逃到 W,而若一只猎狗从 Z 走过来填补,你就可以后退到 T 而重新掌握"对立"态势.众猎狗是无法直截了当地到达使兔子吓得魂不附体的位置的.

最后,如果你刚刚走出了属于(C)型的一步,并且是在一个强势方格里,则两个相邻的 Z 格必然被对方占据着,而你可以逃脱.由此可见你是在一个弱势方格里,我们已经讨论过这种接续你以前一步的情况,它必然是属于(A)型的.

在小型棋盘上

兔子策略表明,如果猎狗方面不能掌握"对立"态势,在较小棋盘上只有一种情况可赢,即将猎狗驻守在 5,直至把它走到 4 或 3 而取得"对立".如果它们能从 3L,5,3R 而获先走之利,则猎狗方面可以捕获在任何位置起步的兔子,除了 4 以外,下面是一局示例.

猎 狗	兔 子	注 释
3L,5,3R	1C	(兔子也可在 1L 或 1R 起步.)
3L,5,2		
	−1	若不走到 0,猎狗方面可从 5 走到 4,取得“对立”态势.
1L,5,2		
	1C	若不走到 0,猎狗方面可从 5 走到 3,取得“对立”态势.
0L,5,2		
	−1	若不走到 0,猎狗方面可从 5 走到 4,取得“对立”态势.
1C,5,2		由子在此种棋盘上不存在−3 位置,兔子方面只好让猎狗方面取得“对立”态势,束手就擒.

在中型或大型棋盘上

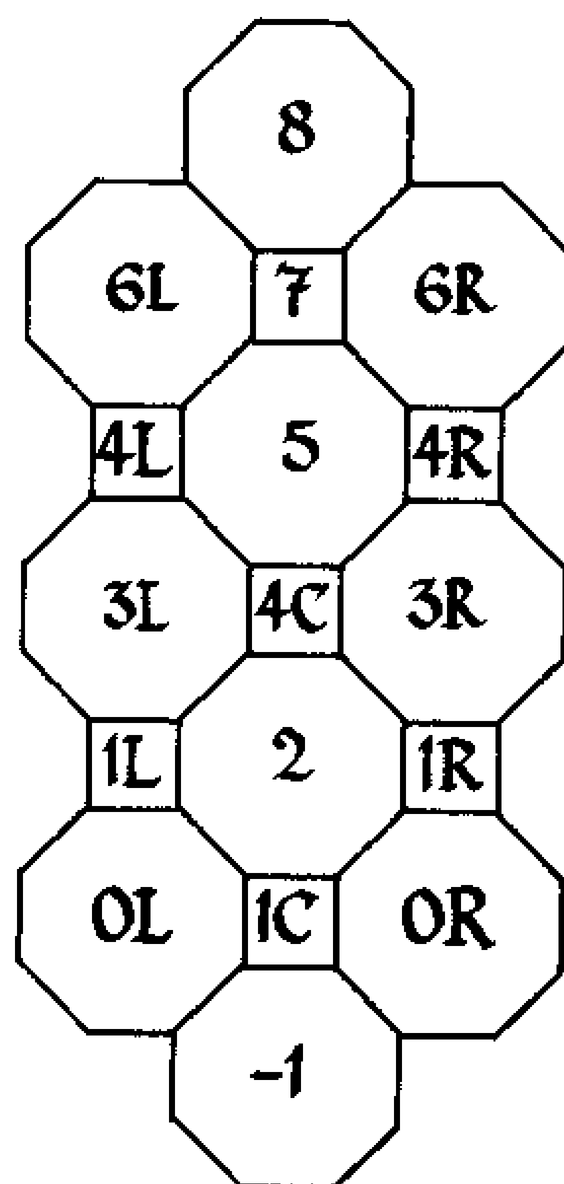


图 11. 中型棋盘.

只要把这一论证稍加推广，即可得知：在中型棋盘上从 6L，8，6R(见图 11)出发的众猎狗可以抓住从 −1，0，2，3 或 5 起步的兔子. 由于它们掌握了"对立"态势，它们肯定能够在砍去 −1，0，1 的小棋盘上(见图 1)取胜. 在 2 位的兔子可以走到图 12 的一个位置，迫使猎狗方面对它的这步退却拱手让出"对立"，但为时已晚，因为猎狗方面可以走出 3L，5，3R，即使没有"对立"也可以赢，因为编号为 −2 的位置在棋盘上是不存在的. 如果兔子现在走到 0L？情况又将怎样呢？请看本章的增补材料.

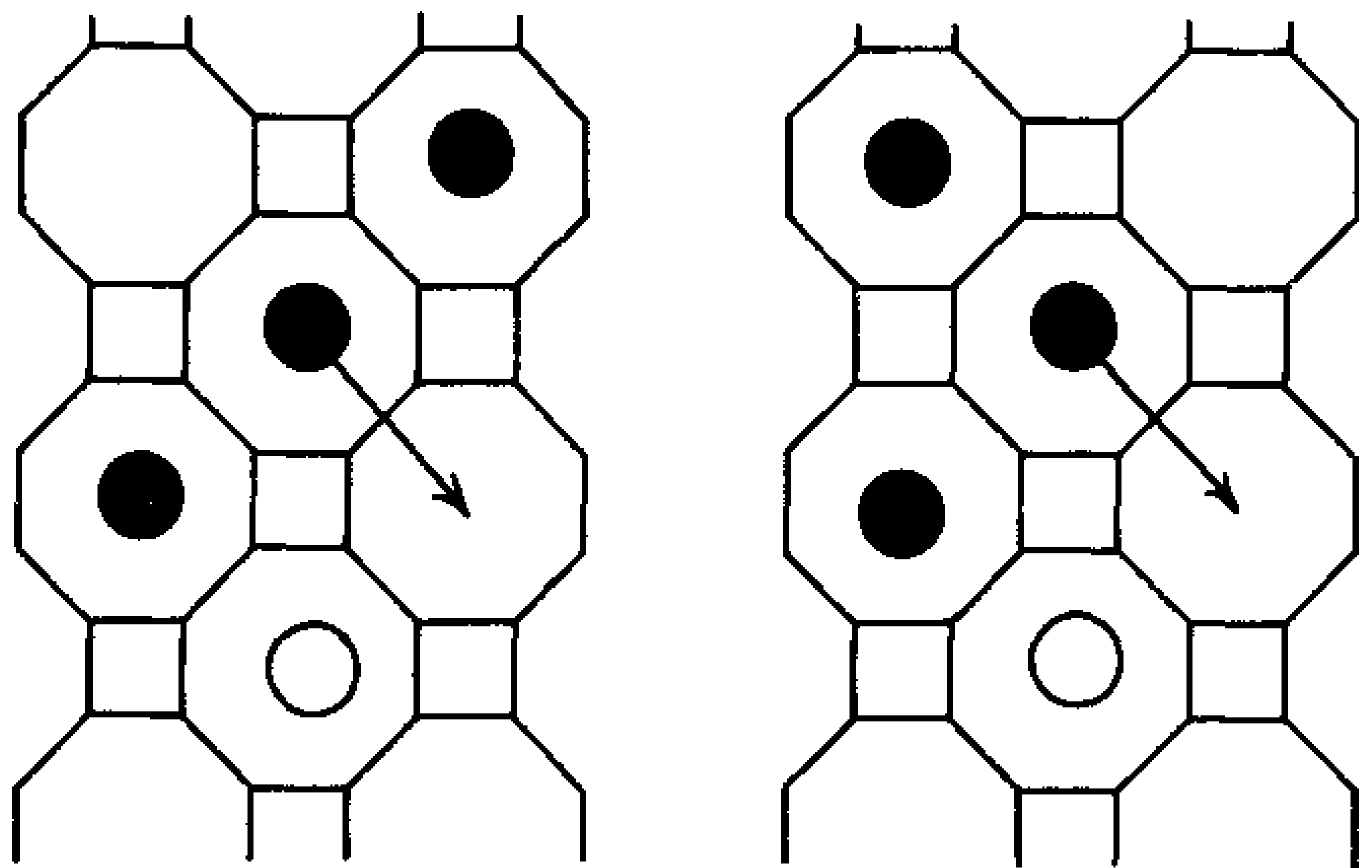


图 12. 对猎狗说，这步行动可靠吗？

有趣的是，图 12(a)的结构(3L，5，6R 处的猎狗围捕 2 位的兔子)对猎狗说是可以赢的，然而位置较高一点的话(如图 3 的大棋盘上)，6L，8，9R 的猎狗却对付不了在 5 位的兔子. 当猎狗从 8 走到 6 时，兔子后退到 3 而抢到"对立"态势，于是它就可利用棋盘上的下面一个六方格集合(4C，3L，3R，2，1L，1R)来实施它的策略.

现在很清楚，兔子策略尚能改进. 如果兔子方面没有掌握"对立"态势，它应当尝试到这像 5 那样的位置以对抗占据 6L，8，9R(所有这些位置的追迹等于 28)的猎狗. 迫使众猎狗走到这种位置的办法是它走到一个位置，其追迹大出 3 的一个较小的整倍数. 实际上，我们能够证明

> 在较大型的棋盘上(图 3)，猎狗方面能在追迹为 31 的位置上取胜，仅当兔子是在一个弱势方格上，或者双方的位置为 6，10，11 对 4C(见图 13).

第 31 定理

在本章增补材料里已简要地给出了它的证明.

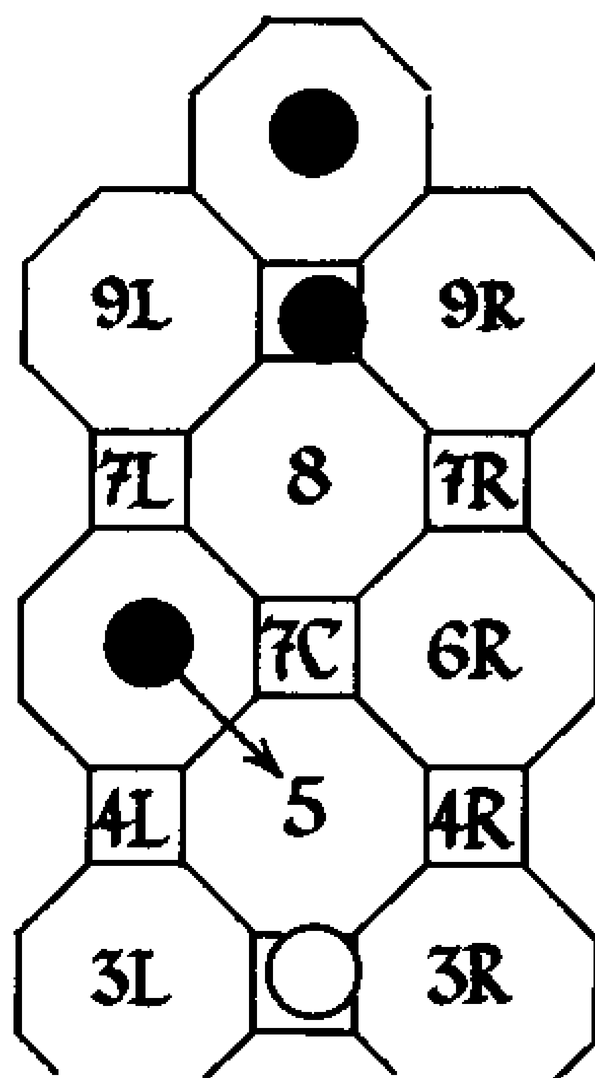


图 13. 猎狗与兔子的位置.

增 补

问题的解答

对付图 1 的那种猎狗围攻态势，兔子方面只能在下列情况取胜：兔子从 C 起步，而且让猎狗方面先走.

对于图 3 中占据 9L，11，9R 的猎狗，只要兔子能走第一步，任何位置它都能赢. 最困难的情况是它在 1C 起步，其时猎狗方面掌握着“对立”态势，兔子的取胜法是它先走到 2 位，然后利用正文中所述的 31 定理. 当然，兔子方面如能从 2 起步的话，它可以走到强势方格 4C，并取得“对立”态势.

如果猎狗方面先走，则仅当兔子在 －1 起步时它们才能赢. 它们必须小心翼翼地行走，不但要维持“对立”态势，而且还要防止兔子逃跑或者获得追迹 31. 奇妙的是，尽管它们掌握了“对立”态势，如果开始的一步是从 11 走到 10，它们还是要输的！困难在于，当兔子经由 0，1，3 走到 5 时，众猎狗必须到达 6L，10，6R. 为了对付一只决心维持追迹数至少高达 27 的兔子，走到 6L，7，6R 的防卫措施是达不到的. 而走到 6L，7R，9R 的防卫将会失败，当兔子从 5 走到 7C，迫使 7R 的猎狗占据 8 位，而兔子再次退回到 5，然后像图 12 那样获胜. 如果猎狗方面企图占据 5，9，10 而阻止兔子到达 5 位，则当兔子在 3 位时，它可通过弱格 4 而逃走. 如果兔子的玩法是通过 0，1，3 走到 5，那么猎狗怎样能够到达 6L，10，6R 呢？如果兔子在 3 位，而猎狗掌握“对立”态势，那么它们必然是从 6，8，10 走过来的. 然而，在此之前，当兔子在 1 位时，猎狗们又在哪里呢？在它们掌握着“对立”状态时，根本没有什么位置可以走到 6，8，10！

对猎狗说，这步行动可靠吗？

如果兔子在 0L，猎狗在 3L，5，3R，后者怎样走才能取胜呢？答案是 3R 的猎狗走到 2. 若兔子走到 －1，取得“对立”态势，则猎狗就从 2 走到 0R；若兔子走到 1C，则把 3L 的猎狗走到 2. 若

兔子再次走到一1，则猎狗便从 0R 走到 1C 而取胜；总之，要扣住 5 位的猎犬，直至它们已经准备就绪前去扑杀.

在小型棋盘上，一切都已经搞清楚

在这一章里，我们一般站在兔子的立场看问题. 为了取得平衡，我们从弗莱德列克・席罕的巨著《数学游戏精品大全》第 241 页与第 243 页的图 92 与图 93 中复制了两幅插图，将它们编号为本章的图 14 与图 15，这两幅附图列举了小型棋盘上猎狗可以取胜的一切位置. 图 14 给出了 24 个

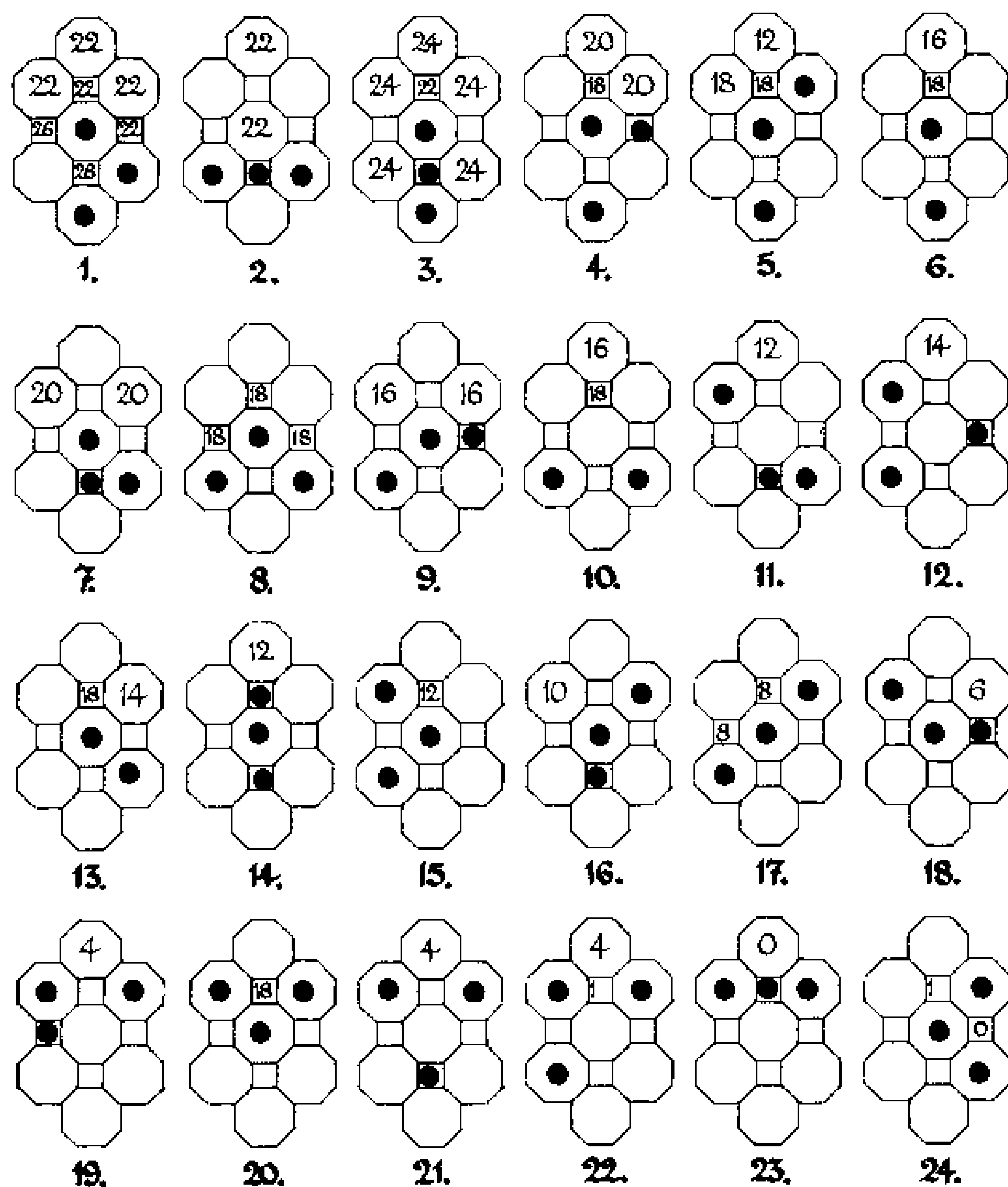


图 14. 为猎狗提供的 24 个 $\mathscr{P}$—位置，准备了一个最小取胜策略

表 1 给出了猎狗的取胜策略，其根据是图 14 中的 20 个 𝒫—位置，注释列在这里(L 与 R 是兔子的；图 14 与图 15 中，左与右是猎狗的)：

由……起步	若兔子走	猎狗方面的应着，走到：	到达	遥远度	追迹	备注
初始位置	4,1R,1C,0,−1	3L 5 2	1.	26,26,22,22,22	14,11,11,10,9	
	2	3 4 3	2.	22	12	
1.	3R	4 5 2	3.	24	14	(a)
	−1	1L 5 2	4.	20	7	(b)
1. 或 2.	0	3L 4 2	7.	20	9	
	1	3 2 3	8.	18	9	
4.	1C!	0L 5 2	5.	18	8	(c)
	0	1L 3R 2	9.	16	6	
5.	−1!	1C 5 2	6.	16	7	(d)
	0R	0 4 2	16.	10	6	
6.	0L	1C 3L 2	13.	14	6	
7.	1!	3 3 2	8.	18	9	
	−1	3L 4 0R	11.	12	6	
8.	0	1L 2 3R	9.	16	6	
	−1	3 1C 3	10.	16	6	
9.	−1!	1L 3R 0R!	12.	14	3	
	1	0L 2 3R	17.	8	6	
10.	0L	3L 1C 2	13.	14	6	
11.	0L	2 4 0R	16. 反射	10	6	
	1C	3L 2 0R	17. 反射	8	6	
12.	1C	2 3R 0R	15.	12	6	
	0L	1L 2 0R	18.	6	3	
13.	−1	4 1C 2	14.	12	6	
	1L?	3L 0L 2	被擒！	0	6	
14. 或 15.	0L	4 0R 2	16. 反射	10	6	(e)
16.	1	3R 0L 2	17.	8	6	(e)
17.	0R	1R 0L 2	18. 反射	6	3	(e)
18.	−1	1L 0 0	19.	4	0	
	1C	0 0 2	20.	2	3	
19.	1C	2 0 0	20.	2	3	
20.	−1	1C 0 0	被擒！	0	0	

表 1. 在图 14 的各局势中为猎狗方面制定一个取胜策略.

(a) 猎狗方面没有掌握“对立”态势，但目前兔子被赶到 1R，于是众猎狗走到 3R，5，2(1 位，经反射)，还是没有取得“对立”状态，不过兔子再次被迫，等它走到 0R 之后，众猎狗走到 3R，4，2(7 位，经反射).

(b) 也没有掌握“对立”态势，参看 4 位.

(c)、还是没有掌握“对立”，可参看 5 位.

(d) 即使猎狗方面现在不掌握“对立”态势，但(6 位)兔子被迫走到零位，众猎狗走到 13 位



或其反射位置.

(e) 如果目前或今后,兔子走到-1,则可照它从18位起步那样的走法:2位的猎狗走到0位(21或22位),后面的猎狗走到2位(20位).

31 定理的证明

从一个追迹为31的位置出发,猎狗方面维持"对立"态势的唯一办法只能是走到30(走到33的动作将会有不合规则的后退).如果它们走到30,则若兔子能办到的话,它将走到31;猎狗方面将要回到30,如此翻来复去,按照棋规就算兔子赢了.猎狗方面想赢,唯一办法是迫使兔子走到一个弱势方格,或者阻止它走到31.它们怎样能办到这一点呢?如果兔子位于r,猎狗方面就必须封死相邻的任何一个强势方格$r+1$.假定另外的猎狗是在x,y而$x+y\leqslant 11+10$,

$$r+(r+1)+x+y=30,$$

$2r+1\geqslant 9$,$r\geqslant 4$.如果$r\geqslant 8$,$x+y\leqslant 13$,兔子逃脱了.

若$r=7$,一只猎狗必须封死8,$x+y=15$,除非兔子逃脱,$x=6$,$y=9$.兔子到达5位,到达图12的情况.

若$r=6$,这是一个Z位,猎狗们必须封死7C,还有$x=8$以防止逃脱,从而$y=9$.兔子走到5,如果猎狗方面将追迹恢复到30,则兔子可回到6,由不断重复而获胜.

若$r=5$,这是一个T位,猎狗方面必须封锁6L,6R,而$y=13$,已在棋盘之外矣.

若$r=4$,且不是一个弱势方格,兔子在4C.一只猎狗必须封锁5位,于是$x+y=21$,从而$x=10$,$y=11$.这是一个例外的猎狗位置,兔子不能赢.如果它走到3,则处于10位的猎狗可走到8,若兔子走到4R,则从8走到6R的一只猎狗将迫使兔子后退到3R,在此之后猎狗使从11走到10C,重新获得了控制权.

参考文献及进一步阅读材料

Martin Gardner, Mathematical Games: About two new and two old mathematical board games. Sci. Amer. **209** #4 (Oct. 1963) 124—130.

Martin Gardner, "Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American", W. H. Freeman, San Francisco, 1971, Ch. 5.

Édouard Lucas, Récréations Mathématiques, Blanchard, Paris, Vol. III, 1882, 1960, 105—116.

Sydney Sackson,"A Gamut of Games",Random House,1969.

Frederick Schuh,Wonderlijke Problemen; Leerzam Tijdverdrijf Door Puzzle en Spel, W. J. Thieme & Cie, Zutphen,1943,189 −192.

Frederick Schuh,"The Master Book of Mathematical Recreations"(transl. F. Göhel,ed. T. H. O'Beirne) Dover Publications, New York, 1968,239—244.

第22章

线与方

于是我对它们说,“小熊们!
你们来看看我怎样在所有的方块上走路!”
小熊们互相咆哮:“只要这傻瓜一旦踩线,
他就是咱的口中之物了.”

——A·A·密尔尼,《在我们年幼时》

在方碑左边,精致地用大写字母镌刻着下面的句子:一切事物都在走向它们的尽头.

——弗朗古瓦·拉伯雷,《庞大格里埃》,* V,37

如果你对我们的其他游戏感到厌倦,那就不妨找出你自己的棋盘与棋子,玩一玩下面的游戏.本章所讲的游戏中,既有我们的老朋友,也有一些新玩意,但我们有意回避十分成熟的游戏,例如象棋与围棋.

吃井字,我成功,三个快乐的报童排成了一直线

——牛津版《鹅妈妈**的儿歌》,1951年,第406页

---

* 译者注:庞大格里埃(Pantagruel)是法国16世纪作家拉伯雷所作《巨人传》中的人物.

** 译者注:鹅妈妈(Mother Goose),1760年左右,英国伦敦出版的一本儿歌集传说中的作者.

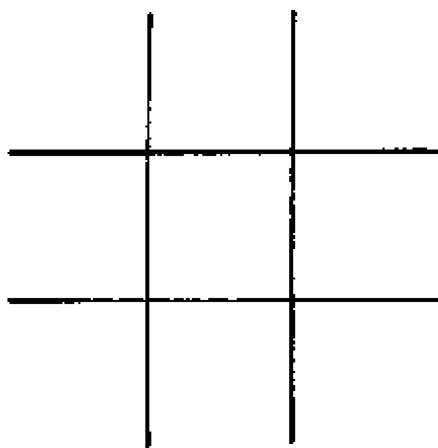


图 1. "吃井字"棋盘.

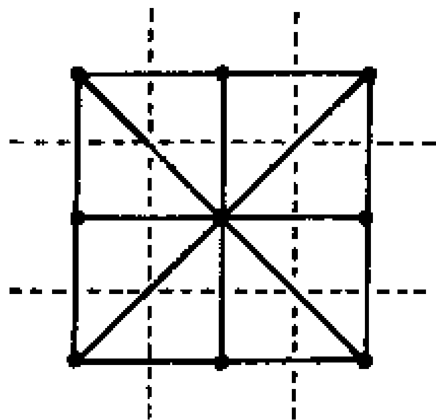


图 2. 它的八条直线.

本游戏就是非常出名的吃井字*,也叫"○与×",取决于你究竟是在大西洋的此岸或彼岸(英国或美国). 先走者在图 1 所示棋盘的九个空位上任意写上一个叉(×),其对手在别的地方写上一个圈(○),然后他们就在剩下的空位中交替地书写×或○,直到其中的一位局中人把他的三个记号联成图 2 所示的八条直线中的一条为止. 此时得胜的男孩就会乘老师听不见的时机,轻声喊出一句句子,以表达他的欣喜之情. 在美国的一些地方,这句子是:

"吃井字,三个一行排成功了",

在荷兰,类似的说法是:

"三子联一线,你用十字我用杠棒".

(引自弗雷特·席罕的名著《数学游戏精品大全》)

如果双方都不能联成一直线,那就打成了平局. 我们并不怀疑,绝大多数读者在其童年时期早就看出,如果玩得正确的话,平局总是经常出现的. 看来只有像《稳操胜券》作者那样的人,才会保留着彻底研究该游戏的足够兴趣.

但你是否对它作过完整的分析? 如已作过,那么或许你已经发现它占的地位要比原先认走的多得多. 下面我们将给出比大多数人更加简洁的分析,但我们还是要承认,我们的粗枝大叶的工作仍然超过一整页篇幅. 现在,让我们先来看一看三个不用棋盘的游戏吧.

魔数 15

在这个游戏中,两位局中人轮流取从 1 至 9 的数码,当然每次取一个数码,同一数码不准取

---

* 译者注:"吃井字"游戏流行于我国大江南北,长城内外,各地都有不同的名称. 其历史非常悠久,是一种古老的民间游戏,据说起源于周朝的井田制度. 正如下文所述,它同唯一的三阶幻方"洛书"也有着深刻的联系.

两次，如果你取得的三个数码加起来等于 15，那么你就赢了. 这个游戏的倡议人是 E·配里哥洛索·斯保格西(E. Pericoloso Sporgersi).

胖哥儿，这不是平底锅，你不能那样用烤肉叉刺穿肉片！

这句话应当归功于安妮·邓肯(Anne Duncan). 她建议作以下游戏——在九张卡片上分别书写九个英文单词：

SPIT, NOT, SO, FAT, FOP, AS, IF, IN, PAN,

两个局中人轮流拿取卡片，如果一个局中人能拿到包含指定字母的所有卡片*，那么他就赢了.

本游戏另有一种改头换西的形式，那就是李奥·穆塞(Leo Moser)的"热"游戏，它所用的九个英文单词为：

HOT, FORM, WOES, TANK, HEAR, WASP, TIED, BRIM, SHIP.

游戏的赢家一定要收集到有着一个公共字母的三个单词.

交通堵塞

约翰·A·米商(John. A. Michon)的交通堵塞游戏可在图 3 上进行. 两位局中人轮流挑选一条道路(图上的直线)，谁首先把通往一个城市的所有道路取光，他就是赢家.

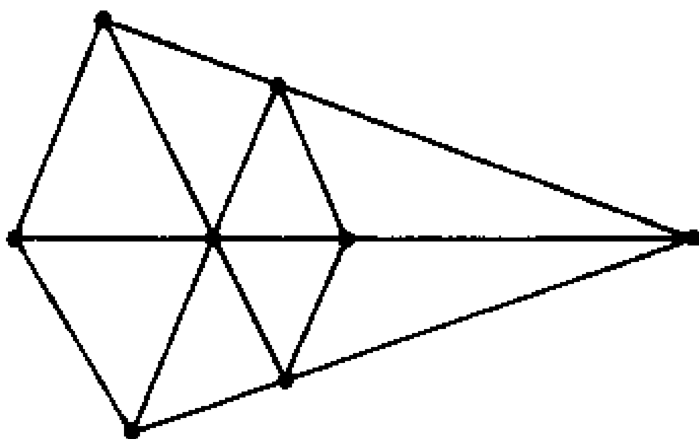
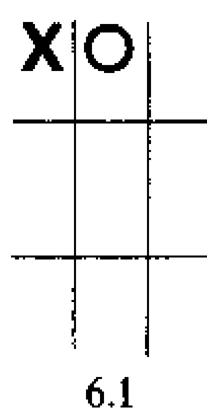
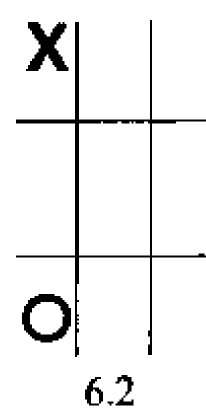


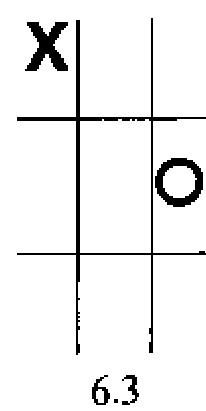
图 3. 交通堵塞游戏的棋盘.

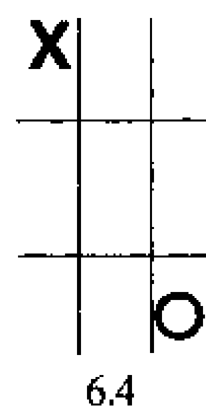
* 译者注：此游戏设计甚妙，总计 24 个字母，而 S, P, I, T, N, O, F, A 每种字母，不多不少各有 3 个.

```
     ┌2!  8   6               X          ┌1  9  4   6  7  3  ⊗
     │3!  7   4! 或 8!        X          │3  v.521
     │4!      v.512                      │4  6  7   3        ⊗
     │6!  4   2! 或 7!        X          │6  v.524
     │7!      v.513                      │         ┌1   9  4  6  ⊗
 51? │8!      v.516                      │         │4   6  ~     ⊗
     │            ┌3  7  6  4  ⊗         │7  3     │6?  4        O
     │            │4? 6        O     52? │         │8   ~        ⊗
     │      ┌2!   │6  4  ~     ⊗         │         └9   1  ~     ⊗
     │      │     │7  3  ~     ⊗         │    ┌1?  3 或 4         X
     │      │     └8  ~        ⊗         │    │3?  v. 5281
     └9?    │3?   2!           X         │8   │4!  9   1  ~       ⊗
            │4!  v.5192                  │    │6!  v. 5284
            │6!   8  2  7  3   ⊗         │    │7?  6               X
            │7?  v.5193                  │    └9?  v. 5287
            └8!  v.5196                  └9   v.527
```


6.1


6.2


6.3


6.4

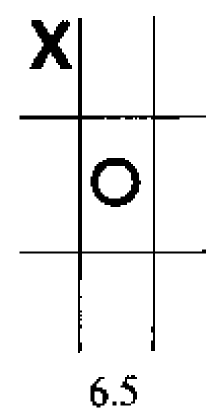
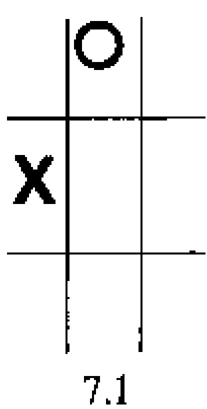
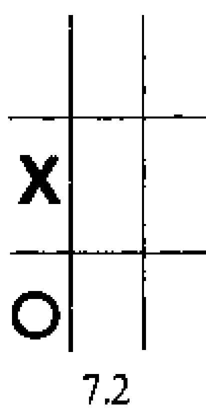
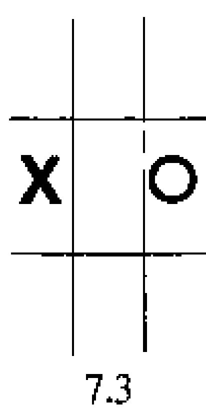
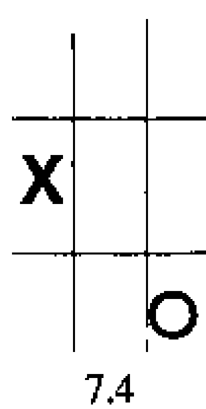

6.5

图 6. 角上开局法.


7.1


7.2


7.3


7.4

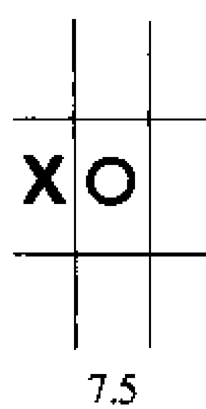

7.5

图 7. 边上开局法.

61?
- 2! 7 4! 或 5! X
- 3?
  - 2?4! 或 5! X
  - 4?7! X
  - 5!9 ⊗
  - 7?4! X
  - 8?5! 或 7! X
  - 9?5 X
- 4? 5 9 2 8 ⊗
- 5! v.516
- 7! 2 5! X
- 8? 5!! ⊗
- 9?
  - 2～ ⊗
  - 3?2! 或 4! X
  - 4～ ⊗
  - 5?2! X
  - 7?4! X
  - 8?2! 或 4! X

62?
- 1! 8 5 X
- 3
  - 1?v.6132
  - 4!9 1! 或 5! ⊗
  - 5?8 X
  - 7?v.6198
  - 8?5 X
  - 9?4 X
- 4! 5 8 X
- 5 v.524
- 7?
  - 1?v.6172
  - 3 4! 或 8! ⊗
  - 4!9 8! O
  - 5 8 1 9 ⊗
  - 8?5 X
  - 9!4 5 O
- 8! 1 4! X
- 9
  - 1 v.6192
  - 3?1! 或 5! X
  - 4?1! X
  - 5 8 1 ⊗
  - 7?1! 或 5! X
  - 8?5 X

63?
- 1?8 4 5 O
- 2!7 5 X
- 4 v.614
- 5!v.512
- 72
  - 1?8 O
  - 4581 ⊗
  - 5481 ⊗
  - 81～ ⊗
  - 9?8! O
- 8!v.612
- 9
  - 1?v.6193
  - 2?v.6293
  - 4?812! X
  - 5 7281 ⊗
  - 7?v.6139
  - 8?v.6239

64?
- 1?832! O
- 2!v.628
- 3
  - 1?v.6134
  - 2 v.6234
  - 5～ ⊗
  - 7～ ⊗
  - 819
  - 9～ ⊗
- 7?v.641
- 8!v.628
- 9 v.643

65!
- 18 v.6275
- 27 v.6185
- 3
  - 1 v.6135
  - 2?v.6235
  - 4 v.6435
  - 7?v.6195
  - 8 v.6295
  - 9 v.6395
- 4
  - 1!9283 ⊗
  - 2?8 X

71?
- 2? v.631
- 3?596! 或 8! O
- 4 v.639
- 5! v.513
- 6! v.617
- 8 v.613
- 9
  - 2
    - 3584 ⊗
    - 4?8 O
    - 5 3～ ⊗
    - 6 3!或 5! ⊗
    - 8 3!,4!或5! ⊗
  - 3? 2! X
  - 4
    - 2?6 O
    - 3562 ⊗
    - 5382 ⊗
    - 62～ ⊗
    - 85! 或 2! ⊗
  - 5? 2! X
  - 6?8
    - 23! X
    - 32! X
    - 45 X
    - 54 X
  - 8?625 X

72
- 1?
  - 3 v.7194
  - 4!95 O
  - 5 8643 ⊗
  - 6?5! X
  - 8?5 X
  - 9?v.7196
- 3? 584 O
- 4 v.629
- 5 v.527
- 6? v.627
- 8 v.643
- 9
  - 1 v.7192
  - 4?5! X
  - 5 8～ ⊗
  - 8?5 X

73
- 1 v.719
- 2 v.637
- 4 v.619
- 5 v.519

74?
- 1?
  - 2!95 O
  - 3?865 X
  - 5?6 X
  - 6?5 X
- 2! v.621
- 3? v.723
- 5 v.521
- 6? v.641
- 8 v.623
- 9? v.721

75
- 1
  - 28643 ⊗
  - 3?6! X
  - 4?6 X
  - 6 4 ⊗
- 2 6 v.6275
- 3? 196! 或 8! O
  - 284 O
- 4 v.653

(b) 下一步自会走出正确的步子来阻挠其对手联成一线.

在我们的分析中,

粗体字代表这种强制性的动作,

! 表示比其他走法要好的动作,

? 表示比其他走法要差的动作,

×表示打叉的一方能赢,

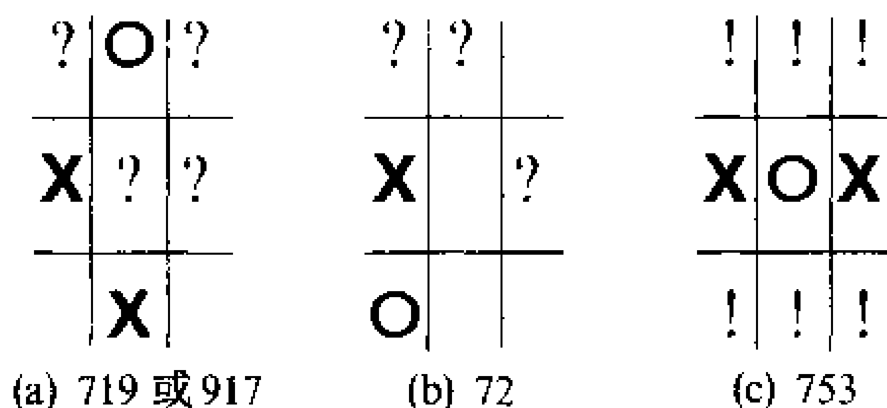
○表示打圈的一方能赢,

⊗表示平局,双方不分胜负,

～表示任意走一步,

V. 表示要参看本解析中的另外一列.

除了第一个字母要遵守上述规定之外,各种走法都按数字顺序来依次排列其先后.



(a) 719 或 917　(b) 72　(c) 753

图 8. 少为人知的几种吃井字走法.

马丁·加德纳在其著作《科学美国人丛书·数学游戏与娱乐》中说过(我们同意他的观点),许多做游戏的人有一种错误看法,认为既然他们在"吃井字"游戏中不会失败,于是也就没有什么东西值得学习了. 接着,他举了三个例子(见图 8),说明一位能手能从别人的拙劣走法中捞到最大限度的好处. 在图 8(a)中,×的最后一步选得使○方在六个机会中有四个要输(长绳原理). 对于×方 7 的开局,加德纳推荐○方回敬以 2 的走法. 这样做,可以给对手×方造成三个失败机会(见图 8(b)). 在图 8(c)中○方简直可以让×方随便怎么走,○方都不可能不赢,×方简直像是在为他而走! *

---

* 译者注:参照上页的详细表格,总而言之,753 是一种极其拙劣的走法,建议读者自己在纸上实验一下!

奥维德游戏,独脚跳,上吊

罗马作家奥维德* 在其著作《做爱的艺术》中曾经奉劝青年妇女要学会一些游戏以取悦她们的情人.其中他特别提到一种在九宫表格上做的三颗石子联成一行的游戏,现代人猜测,他所指的是一种可以走子的吃井字游戏,所用的道具是 3 颗黑色卵石与 3 颗白色卵石.这类游戏中,有好几个在古代中国,希腊,罗马,以及中世纪的英国与法国都甚流行.

在奥维德游戏的现代版中,两位局中人交替地在棋盘上布放石子,直至 6 颗石子全都放完.如果双方都未能将他的三颗石子联成一线,此时就开始走动石子.走法是将一颗石子移动到相邻的正方形格子中去,先走者只要走到中间去,他是肯定可以赢的:

$$5!\begin{cases}1\ 4\ 6\ 8\ 3,4\ \text{到}\ 9,\text{任意行走},9\ \text{到}\ 2;\text{或}\\2\ 1\ 9\ 4\ 6,1\ \text{到}\ 8,\text{任意行走},5\ \text{到}\ 3.\end{cases}$$

为此中心开局法通常是禁止的,从而使游戏经常打成平局.由于反复打圈,往往在一局游戏中出现许多变化,并且充满陷阱.

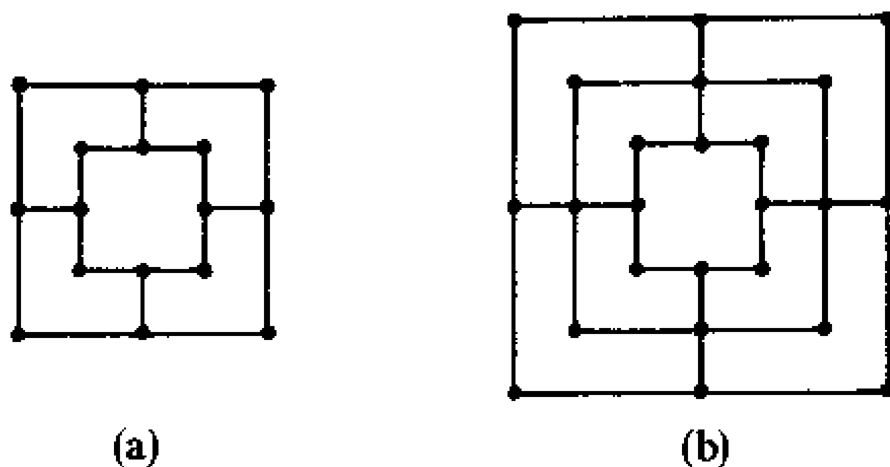


图 9. 六子与九子摩利斯的棋盘.

本游戏的一种变化形式称为**三子摩利斯**,此时,在移动小石子时,可以允许像国际象棋中的王棋一样,沿着图 2 所示的 8 条线中的任意一条线走一步.美国印地安人玩的游戏则叫做**独脚跳**,它允许每颗小石子都能像王棋那样行走,不管它们在不在 8 条线上.即使准许采用中心开局法,游戏仍然要打成平局.法国人玩的一种变化形式名字很难听,叫做"**上吊**",** 此时一颗石子可以移动到任意空格,但结果仍然是打成平局.

---

* 译者注:奥维德(Ovid)是古罗马大诗人,原名 Publius Ovidius Naso,生于公元前 43 年,死于公元 17 年.

** 译者注:在书面或口头语中,人们经常使用"悬而未决"或"挂起来"这种说法.如果加以形象化,其视觉刺激就是"上吊".

六子摩利斯

这是一种在图 9(a)的棋盘上所做的游戏,每一个局中人都有 6 颗棋子,像奥维德游戏那样,也分两段.在第一阶段,所有的棋子都被两位局中人轮流地放到棋盘上去.然后,棋子们从图上所画的 16 个结点之一,沿着棋盘上的一条直线走到它相邻的一个结点.如果某个局中人把他的三颗棋子联成了一线,他就可以拿走对方的一颗棋子.如能把对方的棋子减少到两颗,他就赢了.

九子摩利斯

同上面的游戏类似,每一个局中人手上有九颗棋子,棋盘形状是正方形或矩形,如图 9(b)所示.当一局中人用棋子做成一个**坊**(三子联成一行)时,他可以拿走对方的一颗棋子,但对方已经做成"**坊**"的棋子不准拿走.此种游戏有着多种变化形式,名称也是五花八门(寻欢作乐,酸樱桃,磨坊,磨盘等等),详见贝尔(R. C. Bell)或穆莱(H. J. R. Murray)的著作.

堆高成三子

这是一种在垂直方向上的三子联成一行游戏.开始时,每个局中人都各有一色六子.他们轮流地把一枚棋子放到桌上或者放到已有的一堆的顶上,游戏目的是要用他的棋子堆成三子高度.当所有的棋子都摆下去之后,局中人交替地动作,要把一颗属于他那种颜色的棋子从一堆顶上放到另一堆顶上,也可以把它放到桌上.任何时候,每堆高度都不准超过三子.

对这游戏来说,技巧熟练者非常容易打败初学者,游戏中有不少巧妙的花招.但瓦赛克·克伐泰尔(Vasek Chvátal)已经证明,如果你不想赢(把你的两枚棋子放成一堆)的话,你是决不会输的!因为如果你的对手已建立起 $t(\geqslant 1)$个威胁局势(每堆已有他的两子),那么他至多只能覆盖你的 $6-2t$ 枚棋子,所以至少你还剩下 $2t$ 枚没有覆盖过的棋子,足以对付他的成胁.

四子联成一行

显然先走者在 1×1 棋盘上能联成一子一行,在 2×2 棋盘能联成二子一行,我们已经看

到，他在3×3棋盘上联不成三子一行，但不难证明，在任一稍为大些的棋盘上(甚至要只加上一个方格)他就能把三子联成一行. 那么要想把四子联成一行，需要多大的棋盘呢？C·Y·李(C. Y. Lee)观察到：后走者可以在5×5棋盘上打成平局. 他的策略是，当先走者在中央的3×3方中下子时，他可按照吃井字的玩法去对付，只要你记住这一点，你就不会有多大的困难. 你在图10所示的打着斜线的格子中下子时，就会在图的边界上破坏对方把4子联成一线的机会，他若在1,3,7,9中的两个下子时，也无法把4子联成一线.

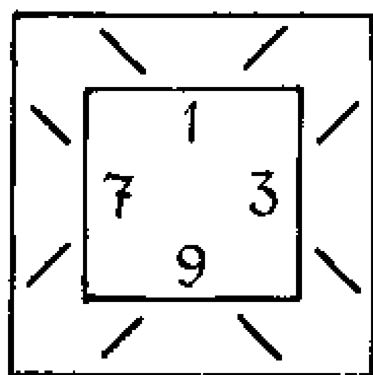


图10. 在5×5棋盘上后走者若应对有方，可将四子联一行游戏打成平局.

勒斯登伯格(Lustenberger)利用计算机证明了下列结论：在4×30棋盘上，先走者一定能够做到把四子联成一线.

当然本游戏的最有趣与最孚众望的推广是在4×4×4立方体上玩的游戏. 奥伦·帕塔许尼克(Oren Patashnik)已经作出证明，先走者在4×4×4三维**踢拖搨托*** 游戏中一定能赢. 帕塔许尼克现有的解法中包含了一部计算机辞典以应付几千种开局法. 计算机辞典得来不易，帕氏花掉几个月的时间，具有高度耐性，并通过富含技巧的人机对话才能得出这一成果. 由于涉及数字过于庞大，除了计算机外，人脑是无法得出的. 有几位持怀疑态度的计算机科学家最近检查了帕氏的辞典，现在大家都已经公认，辞典既完全，又正确，无可指摘.

五子联成一行**

在一个相当大的棋盘上试图或横或直或斜地把五子联成一线是一种极好的练习. 对数学家们来说，他们宁愿起用一个无穷大棋盘.

在这种游戏中已经定义好了几种威胁程度不一样的局势，在孩子们或好朋友之间玩此游戏时最好能喊出声音，以提高兴趣.

---

* 译者注：原文为tic—toc—tac—toe，显然为"吃井字"游戏的推广.

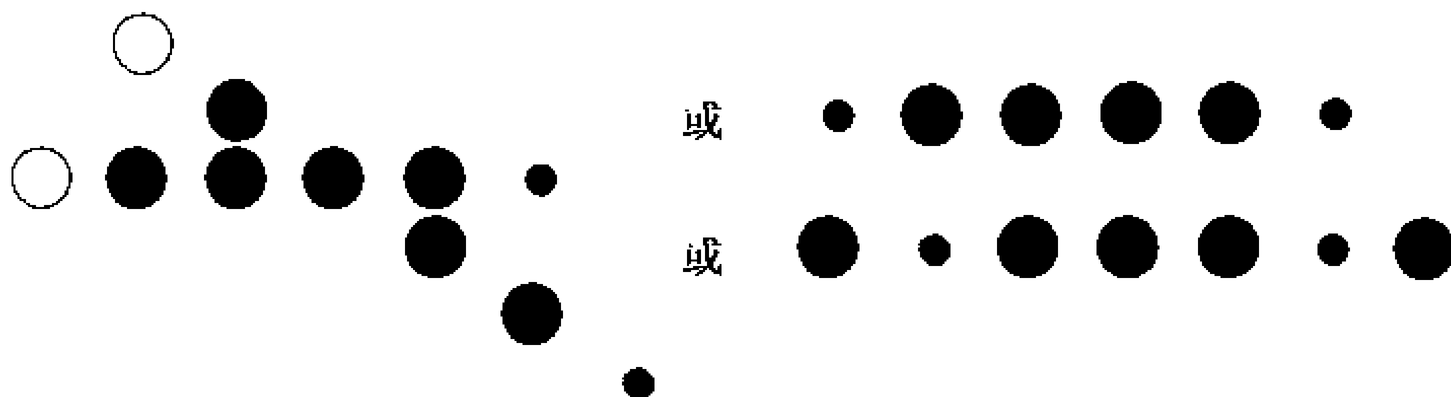
** 译者注：本书虽然名为《稳操胜券》，但并未能指出五子棋的必胜方略，所以这仍是一个悬而未决的问题.

下面让我们分别予以介绍：

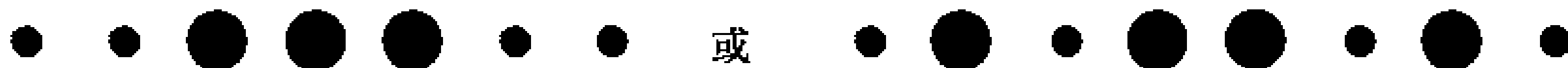
射！[*] 这是下一步马上要赢的局势，例如：



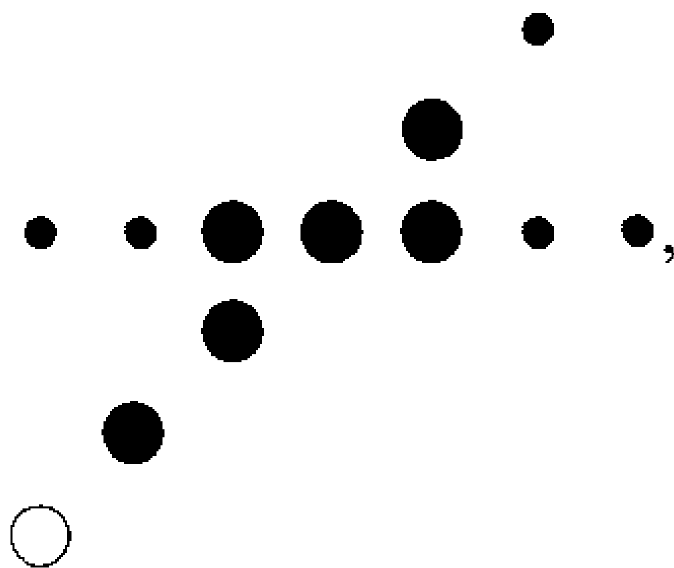
双射或多射！[**] 同时形成两个或两个以上的"射"，例如：



扑！[***] 你的下一步，可以将它做成"射"的局势，例如：



扑射[****] 同时出现"扑"与"射"双管齐下的局面，例如：



---

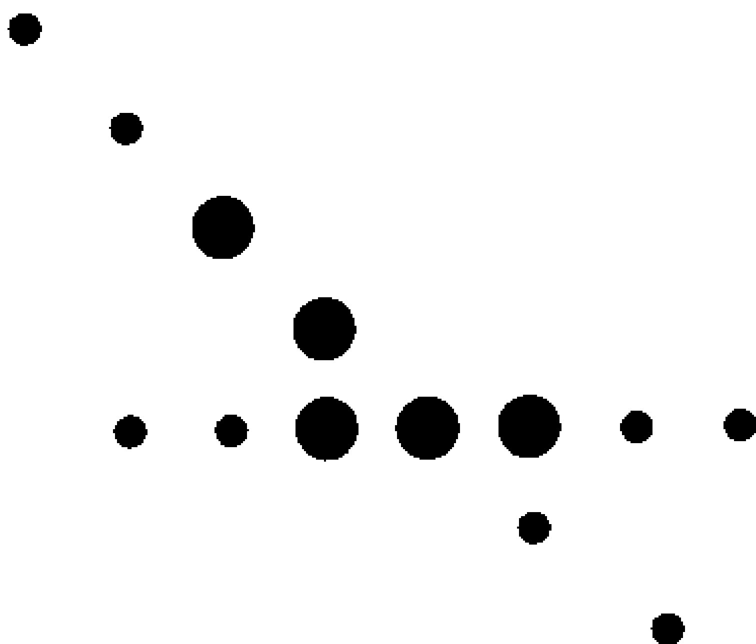
* 译者注：中国是五子棋的发祥地，分别叫做"冲四"或"嵌五"。

** 译者注：在中国，分别称为"双冲四"或"活四"，"双嵌五"，遇到此种局势时，对方已经无可救药，只好推枰认输。

*** 译者注：中国分别称为"活三"，"嵌四"。

**** 译者注：中国称为"冲四活三"。原名"死"（须照吴语发音，读作"细"）四活三，因"死"字不吉利，现在各地都已淘汰不用。

双扑或多扑！同时出现两个或两个以上的“扑”，例如：*

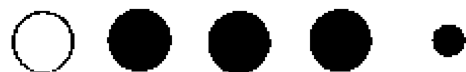


充分了解这些局势的作用，在实际对局中是非常重要的，例如：

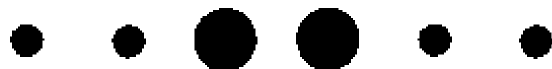
射，代表性的例子是接连四子，一头敞开，这种局势必须立即予以封锁，由此可见，双射在下一步必定能取胜.

扑，代表性的例子是三子相连，两头都敞开，这种局势要么立即将它封锁，或者设法用“射”来把它挡开，延缓其作用. 所以扑射的局势一般可以马上获胜，除非把“射”封死的是一个对方的“射”. 对付“双扑”或“多扑”的局势，你只能寄希望于制造一系列的“射”，使得其中的一个恰好能够封死“双扑”中的一个扑.

这些名称或术语可以应用于此种类型的其他游戏，例如在四子棋中，



为射，而



为扑. 同样的呼喊声也可应用于“哲人足球”游戏（见本章的后面部分）；它们同第 9 章中所说的**遥远度**概念显然有所联系.

五子棋在英国称为“猛冲”游戏，至少已有百年之久，最近却改称为“木钉”或“木栓”游戏.（美国派克兄弟公司有此种玩具出售.）

---

* 译者注：中国称为“双活三”.

五目棋*

日本有一些棋艺精湛的老手，他们总是能够在五目棋中连连获胜，这种游戏照例在 19×19 的围棋盘上进行，对先手有种种严格限制，例如不准走“双射”**，另外六子联成一行时，由于它“过了头”，也不算赢.

六子，七子，八子，九子，……联成一行

A•W•海尔斯(A. W. Hales)与 R • I • 朱厄特(R. I. Jewett)已经研究出一个巧妙的匹配战略，从而证明此种类型的许多游戏可以打成平局. 例如，下面是一个 5×5 棋盘上五子棋无法取胜的一个简捷证明. 你所要干的事情只要按照以下策略就行：倘若你的对手在图 11 所示的，有记号的格子里摆放一子，那么你只要在该记号所指示的方向上，在同一个记号的别处摆上一子就行. 你可以让她去走中心格子，也可让她先走. 如果你的棋子已经满足了上述要求，那就可以随便走一步. 最终，在每条可以取胜的纵、横斜直线上都将至少有你的一枚棋子. 从而挫败了对方把五子联成一线的企图.

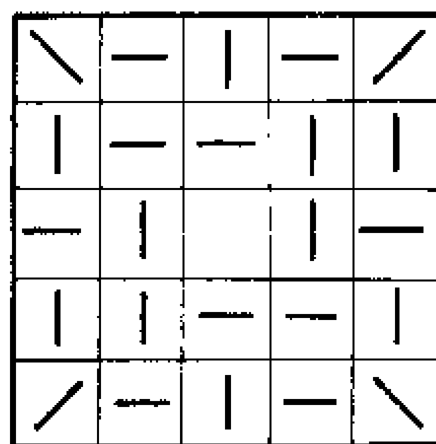


图 11. 海尔斯—朱厄特匹配战略.

按照海尔斯—朱厄特的匹配战略，九子联成一线游戏在无穷大棋盘上将是个平局. 如果你的对手在图上一条直线的尽头处摆上一子，则你在另一头摆上一子. 此结论首先由亨利 • 奥列

---

* 译者注：此词是从日文直译过来的，其实它的正确名称应该叫做“连珠”，是一种改进型的“五子棋”，近年来在我国已开始流行.

** 译者注：在日本连珠(也有人把它叫做“联珠”)中，先走者不准走双活三，详见译者在《科学画报》上所写的一篇专文.

佛·波拉克(Henry Oliver Pollak)与克劳特·埃尔乌德·香农(Claude Elwood Shannon)在1954年证出,他们利用的是下列办法.先把棋盘用一些H形七连多米诺铺满,然后,后走者在这些区域内按照通常的"吃井字"游戏的走法行事,尽力阻止在纵、横或斜线上被三子联成一线.约翰·刘易士·赛夫里奇(John Lewis Selfridge)也在8×8棋盘上给出了一个海尔斯—朱厄特式的匹配,自然8×8正方形肯定可以铺满无穷大棋盘,从而得出了同样结论.

T·G·L·捷得斯(T. G. L. Zetters)是荷兰阿姆斯特丹市某些组合数学家的化名,他们最近证明,后走者甚至能使八子联一线游戏打成平局.他们的证法利用了一种由12个单位正方形所组成的平行四边形地砖,并藉此证明七子联一线游戏也是平局.

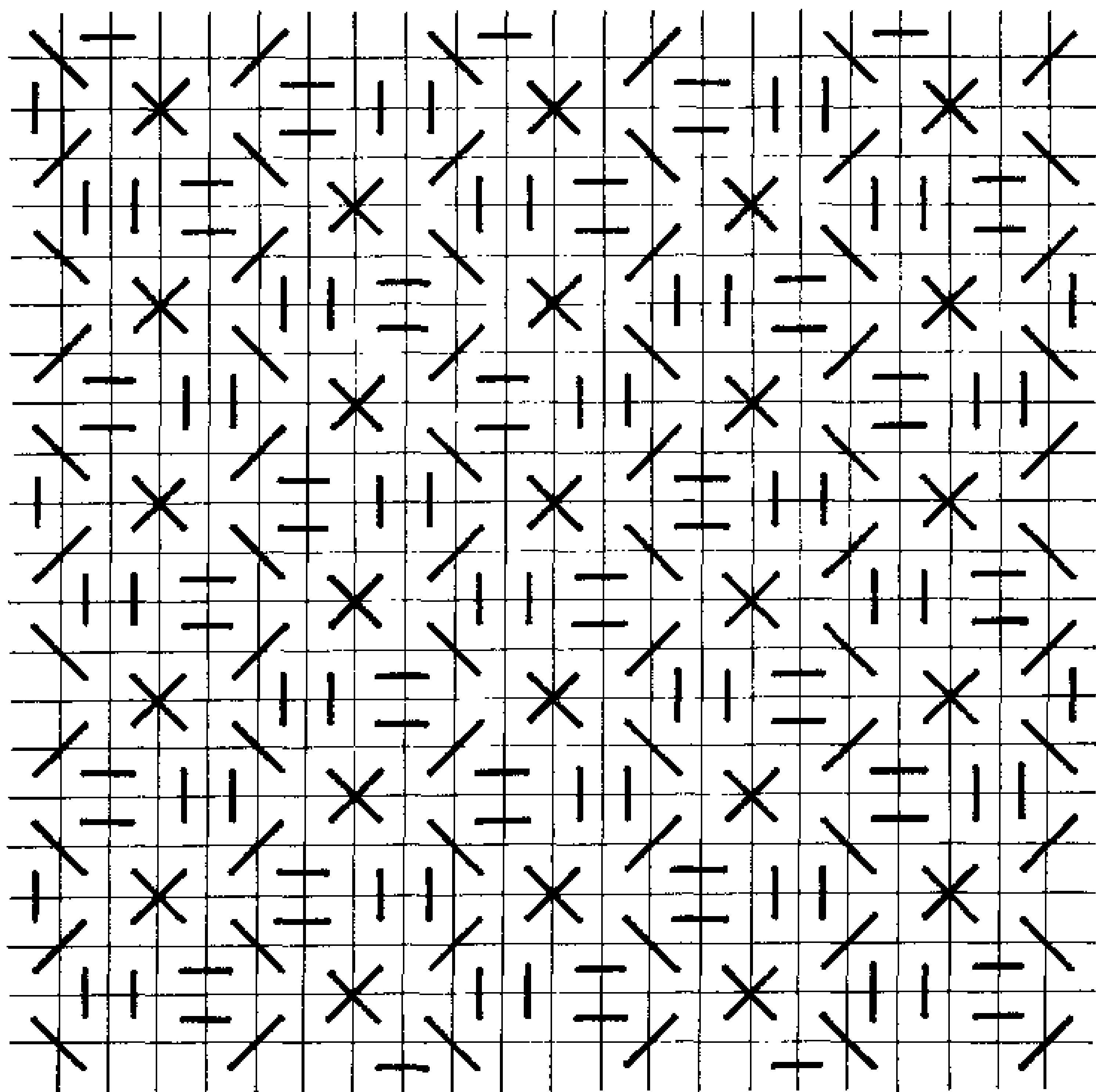


图12. 九子联一行游戏在无穷大棋盘上将打成平局.

S·W·果隆姆(S. W. Golomb)发现了一种 8×8×8 立方体上的海尔斯—朱厄特式的匹配战略. 为了使它便于解释,让我们先来讲一讲它的二维情况,即 6×6 正方形上的六子联一线. 图 13(a)很像图 11,不同的是,对手在对角线上所投的一子,你可报之以同一对角线上的其他注意一子. 注意此图有着由两条↔记号表示的镜面对称性质,所以只要考虑其中的一个象限(见图 13(b))即已足够.

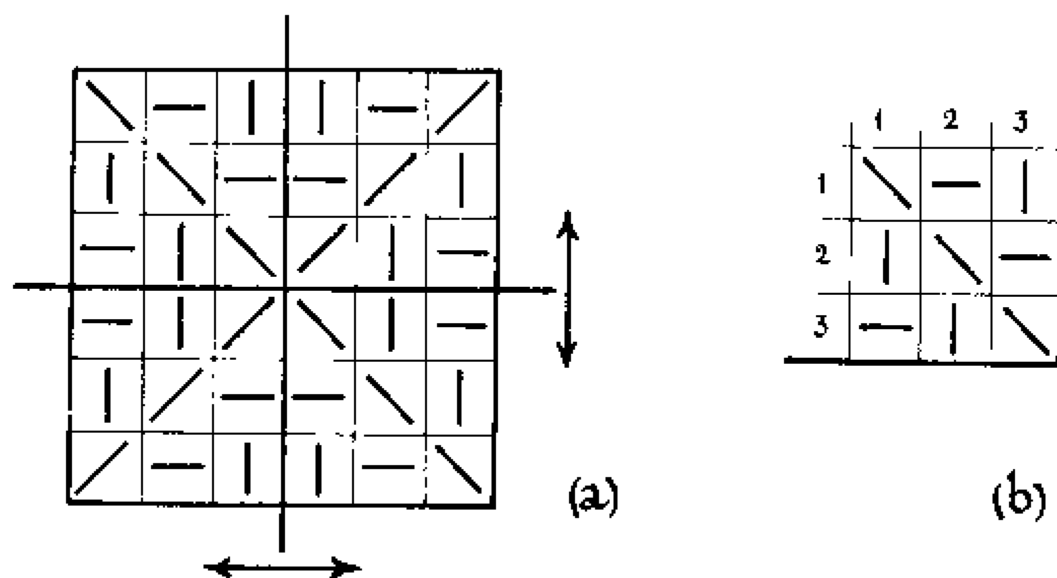


图 13. 6×6 棋盘上六子联一线游戏的一种匹配战略.

图 14 指出了按类似方式,在 8×8×8 立方体的一个卦限中的果隆姆匹配战略. 记号—,|,\ 在水平一层上,而·则是你在一条铅直线上看到的. 图上的一些箭头刺穿了各个水平层而并且给出了各对角面的方向. 8×8×8 立方体的三个中央截面(图 14 中,由粗线表示)是反射镜面,如同图 13 中 6×6 的匹配方式那样,对于对手在一条空间对角线上摆放的任意一子,你可在同一对角线的其他任意位置摆放另一子. 实际上,果隆姆让你在四条空间对角线的任一条上给了你任意六个位置,他也可以让你先走而仍能打成平局.

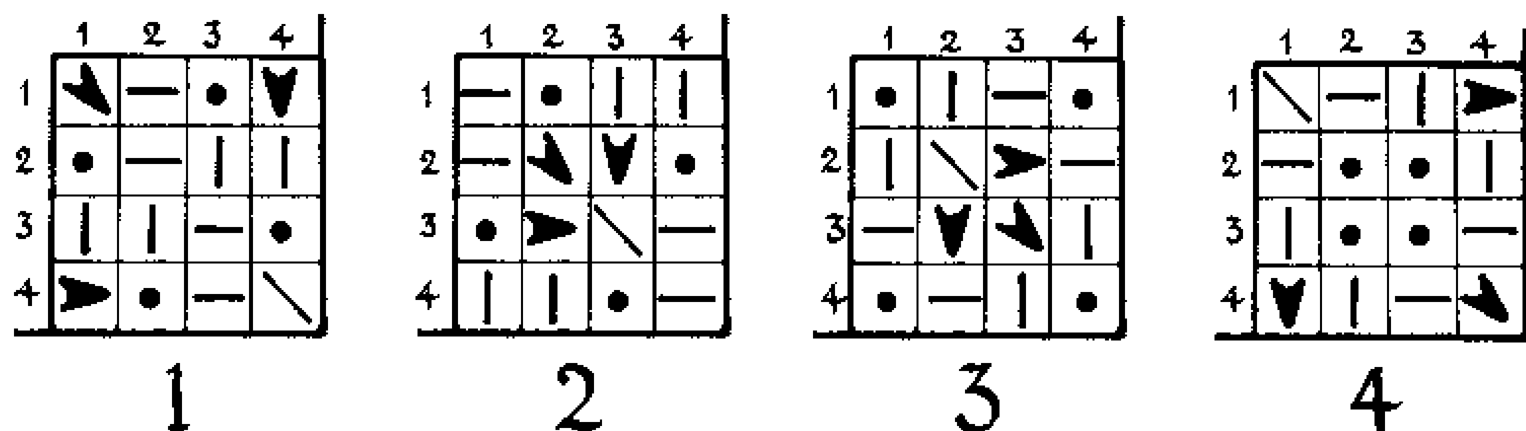


图 14. 8×8×8 立方体上八子联一线的果隆姆匹配战略.

n 维空间的 k 子联一行游戏

海尔斯与朱厄特研究了 n 维空间中

$$k\times k\times k\times\cdots\times k$$

棋盘上将 k 子联成一行的游戏. 他们证明，当 k 充分大时，即

$$k\geqslant 3^n-1(k\text{ 为奇数})\text{或}$$

$$k\geqslant 2^{n+1}-2(k\text{ 为偶数})$$

时，如果应用一种合适的匹配策略，双方将可打成平局. 反之，若 n 比 k 要大得多，则可引用下文将要述及的盗用策略论证法，可以证明先走者能赢. 他们猜测，如果小方格数至少为直线数的二倍时，游戏将是双方不分胜负的局面.

究竟有多少条直线呢？李奥・穆塞解释道，每条直线是由两个小方格之一所决定，并将直线延长到环绕于周围的

$$(k+2)\times(k+2)\times(k+2)\times\cdots\times(k+2)$$

超立方体中去，所以直线总数正好是

$$\frac{1}{2}\{(k+2)^n-k^n\}$$

条. 于是海尔斯—朱厄特的猜想是：

$$\text{当}\quad k^n\geqslant(k+2)^n-k^n,$$

$$\text{亦即}\quad 2k^n\geqslant(k+2)^n,\text{从而在 }k\geqslant 3n$$

时，游戏将不分胜负. 李奥・穆塞已经证明，若 $k>Cn\log n$（C 是某个常数），断言确实为真.

吃井字游戏中的策略盗用

对于大多数吃井字一类游戏，存在着一个盗用策略论证，它表明后走者不可能有一个获胜策略. 尽管早期的一些作家有可能了解这一点，但正式证明却是由海尔斯与朱厄特作出的. 我们假定双方都有着数量不加限制，源源供应的棋子，棋子一旦放到棋盘上去就不能移动，每个局中人的目的是要把他的棋子排成某种构形.

在此类游戏中，双方的获胜构形是相同的，该证明断言，游戏的结局必然是先定者获胜，或者是在最好的应对下打成平局. 如果后走者当真有一个获胜策略的话，那么先走者可采取下列方式加以盗用. 他在某个阶段，可以随便走一步，然后把自己装扮成后定者，不顾他的开局走法，

而当盗用策略要求的一步他已经走过时可以随便另走一步. 我们断言,如果后走者有一个获胜策略,那么先走者也肯定会有,因为在棋盘上外加一子是对他无害的! 由于双方不可能都是赢家,所以后走者的获胜策略是不可能存在的.

上述论证可应用于任何形状棋盘上的 n 子联一线问题,当然要假定此外不得再加上别的特殊规定,例如日本的五目棋. 此时获胜构形就是 n 子联成的直线,而且对双方都一视同仁.

但是,在声名狼藉的策略盗用案例中,获胜策略并不是完全相同,而是由棋盘的对称形状来互相联系(因而它们仍然是相似的). 按照年代的先后为序,有蜂窝棋、搭桥棋等.

蜂窝棋

它的棋盘像图 15 所示的六边形联成的菱形. 如果黑方的棋子能使相对的两边形成一条通路,他就赢了. 白方的获胜则是在另一双对边中寻出通路.

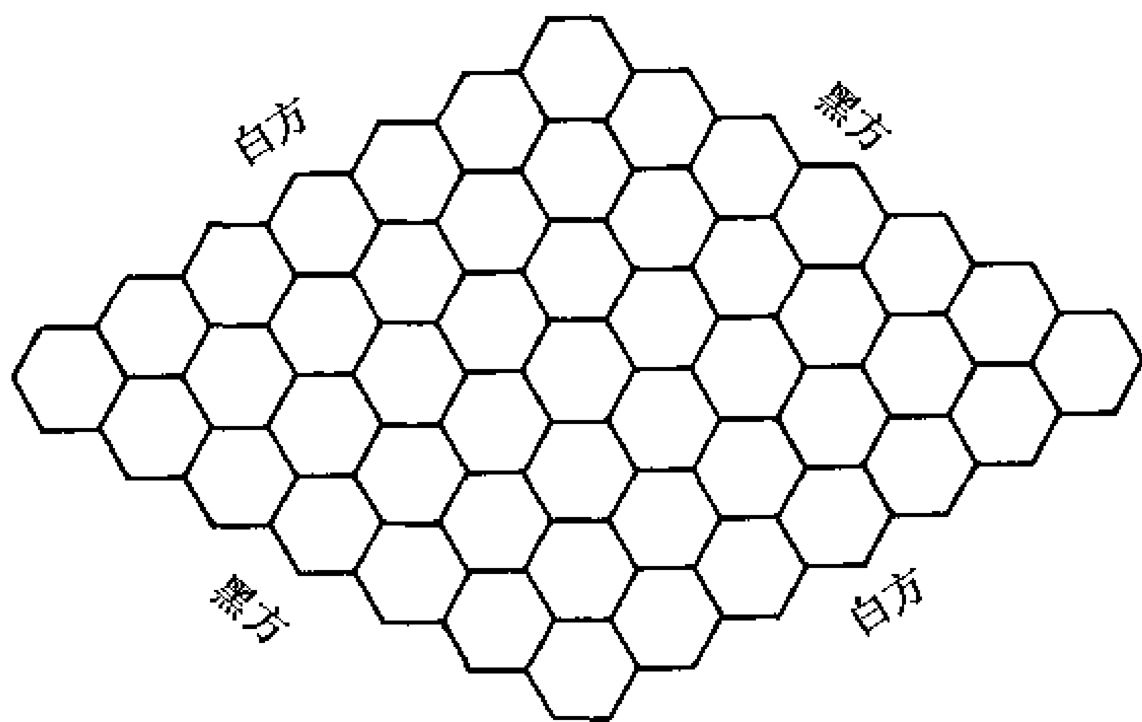


图 15. 一个 7×7 的蜂窝棋盘.

蜂窝棋的发明人是皮特·海因(Piet Hein),它的盗用策略论证则由纳什(Nash)所发现.

搭桥棋

也叫盖尔棋. 它的棋盘中含有 $n\times(n+1)$ 个黑白相间的格点. 左方的走法是要联结两个相邻的黑色格点(水平或垂直地相邻),而右方的走法则要求联结两个相邻的白色格点. 所有的联线

都不准相交. 在图 16 中,左方正好赢了. 因为他已形成了一条链,把顶上的格点与底下的格点连通起来了. 搭桥棋的发明人是戴维·盖尔(David Gale),而它的策略"盗用论证法"则由塔尔詹给出.

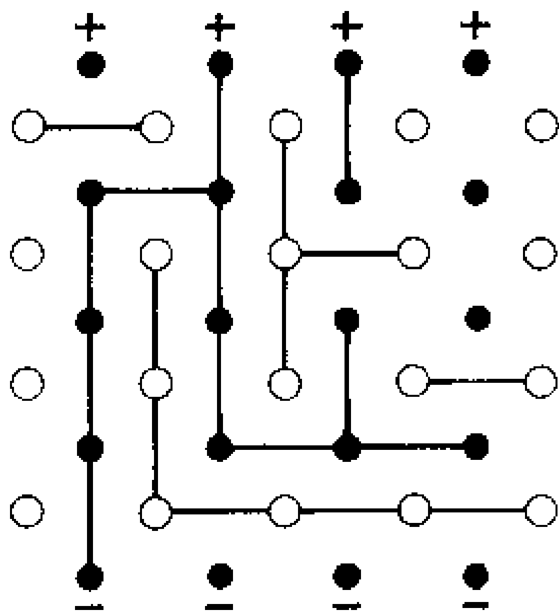


图 16. 左方在搭桥棋中形成了一条黑色链.

先走者究竟怎样去赢?

这些案例以及海尔斯与朱厄特考察过的一些例子都表明,一局已走完的游戏是不可能打成平局的,所以论证实际上证明了先走者可以获胜,但在明确得出可以操作的得胜策略方面却并未给出多大帮助. 现在已经知晓,蜂窝棋并没有明确的、可操作的获胜策略. 塔尔詹与伊文(Even)也已证明,从技术上来看,推广的蜂窝棋是非常困难的. 不过,对搭桥棋来说,奥列佛·格罗斯(Oliver Gross)已经发现一个明确的匹配策略. 而其他许多策略也可从阿尔弗莱德·雷曼(Alfred Lehman)的、有关香农开关游戏的理论推导出来.

香农开关游戏

它推广了搭桥游戏,玩的时候要在电路图上进行,图上有一些结点标明为"+",另有一些其他结点标明为"−". 每条边表示该线段尽头的两个结点之间的联结. 游戏开始时,这些边是先用铅笔画好的. 轮到两位局中人之一的短路先生走棋时,他的一步是要把其中的一边变成永久性的接通(他用墨水在铅笔勾出的线段上重描),并且企图在某个+结点与一个−结点之间形成一条链. 他的对手称为断路先生,则是永远删除一条可能的联线(擦掉或抹去一条铅笔线),并力图

使＋结点与－结点永远分开. 图 17(a)表明的一个香农游戏局势相当于我们的桥接棋. 通过识别与鉴定,可以永远假定只存在一个正结点与一个负结点,见图 17(b)所示.

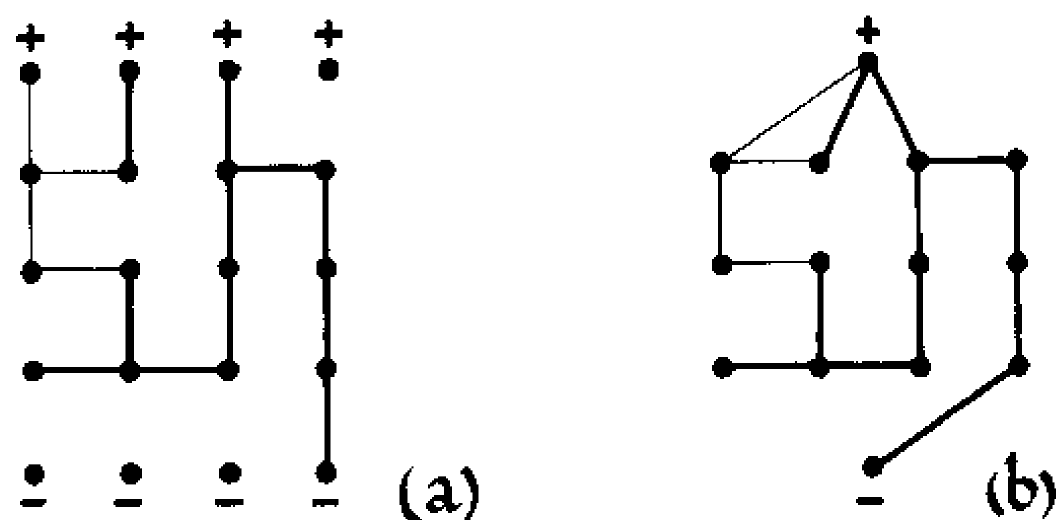


图 17. 当作香农开关游戏来玩的桥接棋.

作了这假定后，雷曼证明，当且仅当短路先生能找到两棵边不互联的树（每棵树分别含有子图中的＋、－全部结点），则他作为后走者是可以赢棋的. 证明的后一部分（“仅当”的部分）难度很大，但证明前一部分较为容易. 存在着一个策略：每当断路先生走出的一步棋把一颗树分为两部分 A 及 B 时，短路先生在另一棵树上走出一步，把 A 的一个结点同 B 的一个结点加以联接.

让我们用雷曼理论说明,把自己看作短路先生的先走者怎样在搭桥棋中取胜. 在他走出第一步(图 18(a))后,短路先生(他现在是将要走的一系列步子中的第二个了)可以看到图 18(b)中用粗线与阴影线标出的两棵各边互相分开的树(要记住所有的＋集与－集都是连通的,其中

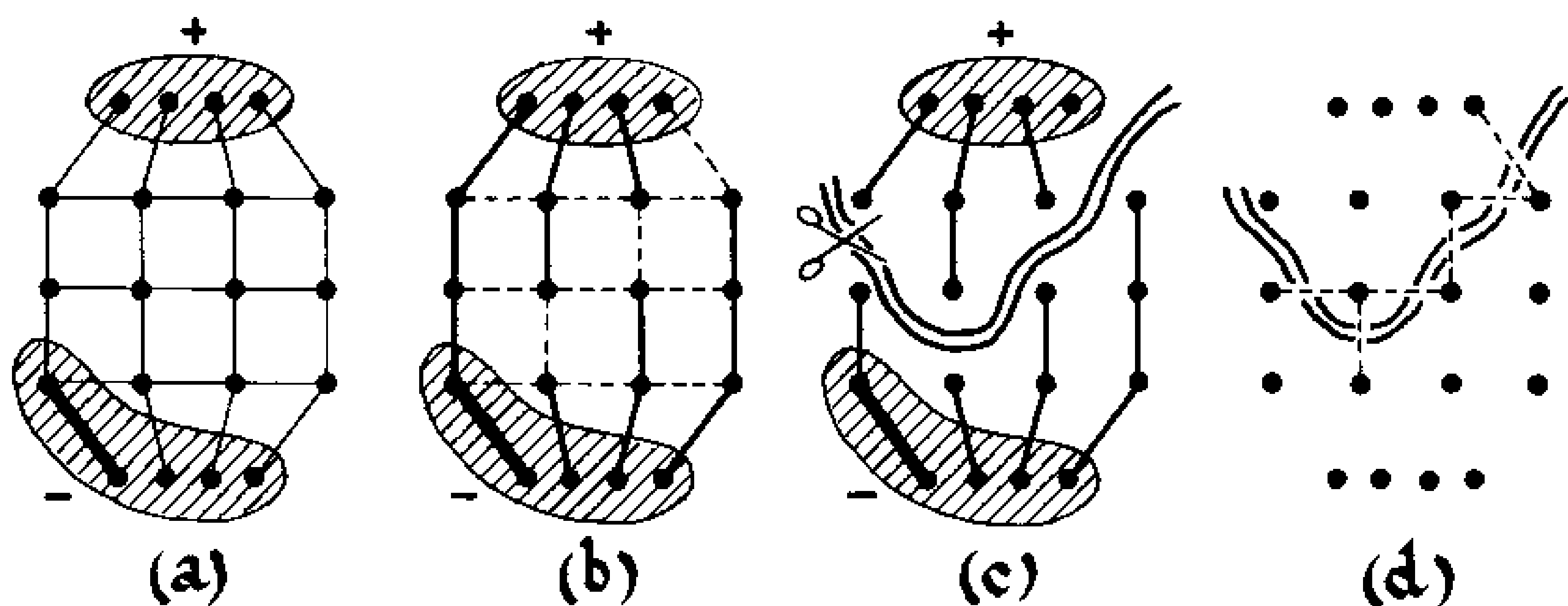


图 18. 短路先生在搭桥棋中怎样取胜.

也包括已被短路，与一接通的那个结点）. 如果现在断路先生砍断一棵树中的一根树枝，例如抹掉图 18(c)中被剪刀剪断的那一枝，那么短路先生应在六座桥梁中重新架起一座桥. 这六座桥是虚拟的，它们把被断路先生分割开来的"河"的两岸沟通起来，见图 18(d).

这游戏可加以推广，使短路先生的获胜构形可以是边的集合的某一特定族 P(在原来的游戏中，P 是由＋到－的通路的族). 雷曼把 P 取为包含每个顶点的所有树图(生成树)的族，从而证明了定理的后一部分("仅当"的部分).

如果作为后定者的短路先生在修正游戏中能赢，那么极易看出，必然存在着两棵各边互相分开的生成树. 由于多定的一步并无不利，所以双方都可以实施短路先生的策略. 如果他们这样做了，就会用互不相连的边的集合建立起两棵生成树. 反之，如果确有这样的两棵树存在，我们以前为短路先生建议的策略真的可以使他在后定情况下赢棋，即便在修正游戏中也能做到.

雷曼论证的详细证法指出，在适当意义下，修正游戏实际上可以归结为原来的游戏.

勃拉克通路游戏

这个小巧精致的游戏是拉利・勃拉克(Larry Black)在 1960 年发明的. 你们可以在打着方格的矩形棋盘上来玩它(见图 19). 每走一步，都必须使用图 19(b)中三类方格棋子中的一枚，而且必须是图上黑色通路(由作为开始标志的箭头↓出发，见图 19(a))的某个延伸. 也就是说，必

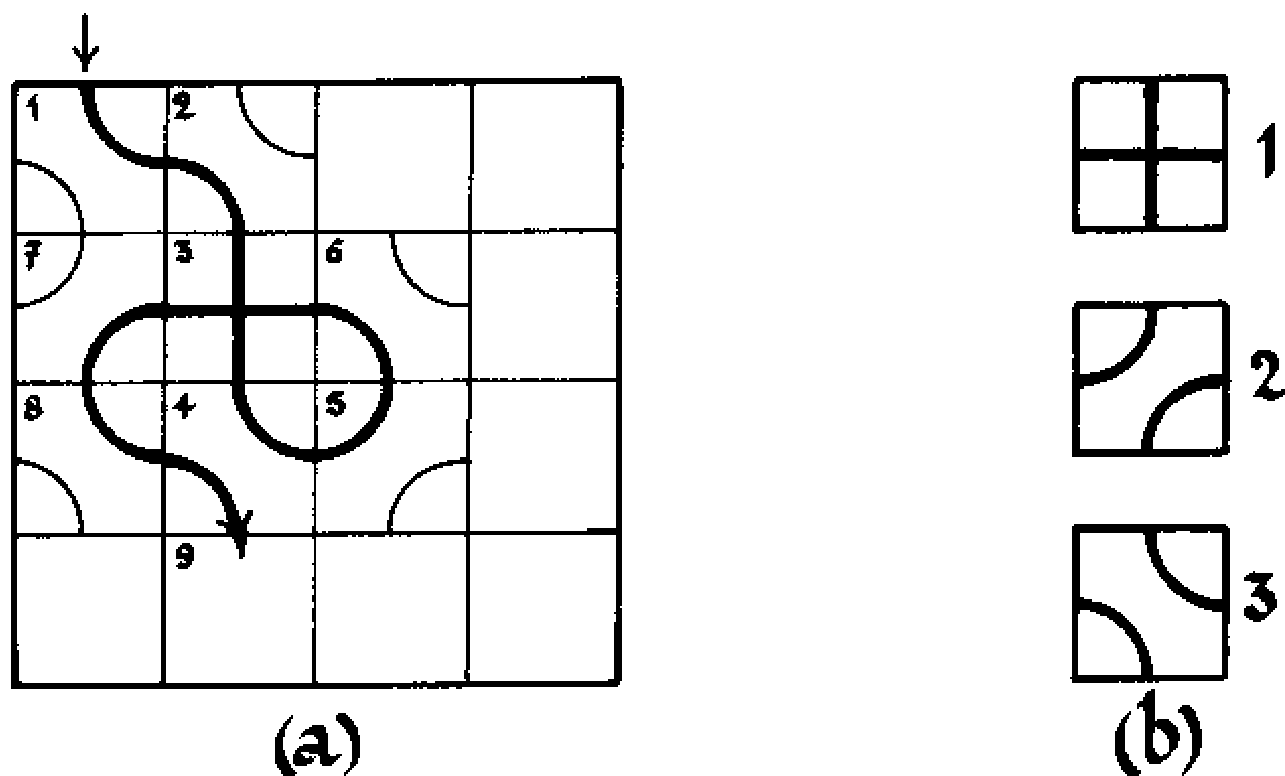


图 19. 形成一条勃拉克通路.

须在上一步通路指到的那个方格内继续下棋. 如果你走的一步棋会使黑色通道通向棋盘的边缘,那么你就输了. 在我们的"样板"游戏中,数字 1 至 8 就是前面的八步走法. 下一步必须在图上标明为 9 的那一个方格中落子. 于是你将看到,1 号模式的棋子将使你马上输棋,但 2 号棋子将使你成为赢家,而 3 号棋子将使你慢慢输去.

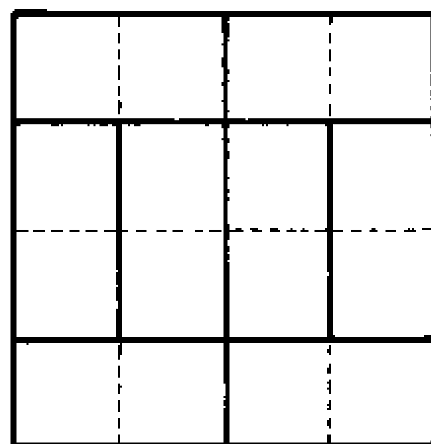


图 20. 用多米诺骨牌分割的勃拉克通路游戏之棋盘.

有一种匹配战略,足以使先走者在偶数边长的正方形棋盘上百战百胜. 他可以构作"空中楼阁",用 2×1 骨牌按照他所喜欢的任意方式将棋盘进行分割,例如像图 20 那种样子,走棋时必须使通路的末端位子一只骨牌的中央部位(它决不可能是棋盘的边界!). 但是在边长为奇数的棋盘上,后走者可以赢棋,他的办法是除了开局的那个单位正方形之外,把棋盘的剩余部分用多米诺骨牌进行分割.

刘思威得游戏

多米诺骨牌匹配战略(见图 21(b))也能使后走者在 G·W·刘思威得(G. W. Lewthwaite)发明的一种游戏中获胜,该游戏是在初始状态如图 21(a)所示的一只 5×5 方盒中交替地滑动 12 只白棋与 12 只黑棋,当一位局中人在轮到他走时,如果他的任何一只棋子都动弹不得,那他就输了. 如果允许一位局中人滑动 2 或 3,4 只棋子(要成行或成列,且其两端都是他的那一色棋子),那时又将发生什么情况呢?

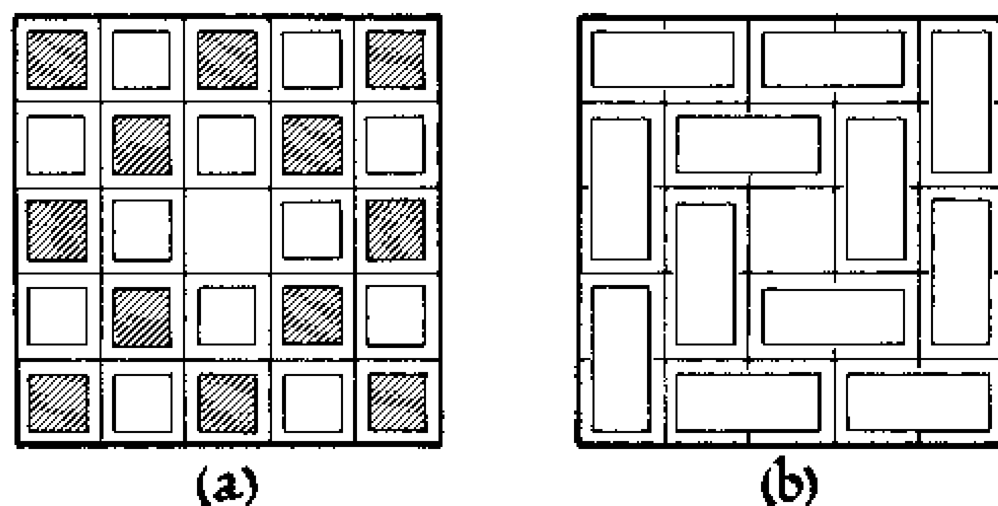


图 21. 匹配战略可使后走者获胜.

走弯路棋

这种棋也是刘思威得所发明，同样是在一只 5×5 方盒子里滑动 24 只棋子，但棋子的形状如图 22(a)所示，随便哪个局中人都能滑动它. 图 22(b)给出了开局初始状态. 赢家是至少拥有三只棋子，而且能首先形成一条始于边界而回到同一边界的连续曲线，如图 22(c)所示.

这种棋有两种走法. 一种走法是每次只能滑动一只棋子;另一种走法是每次可以滑动同行或同列的 1,2,3,4 只棋子,视为一步.

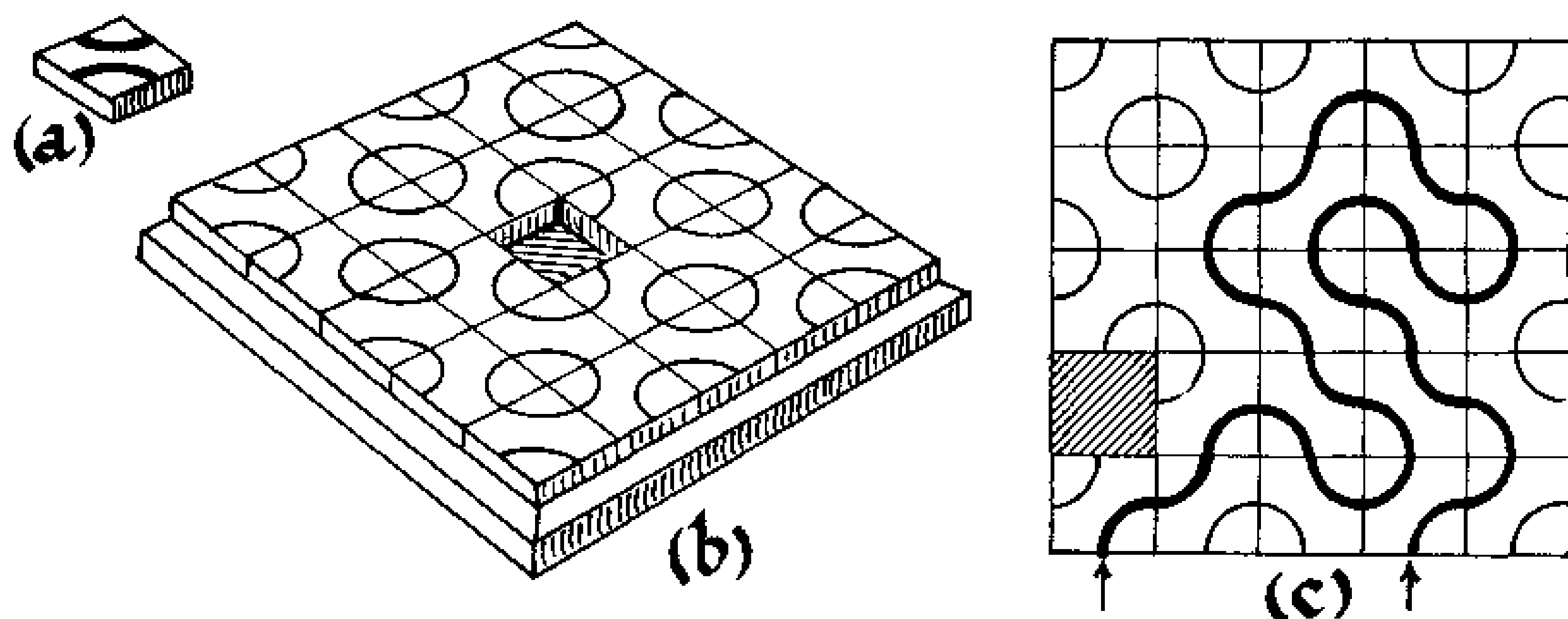


图 22. 走弯路棋.

得胜块或失利块

法兰克・哈拉里(Frank Harary)提出了一批游戏,而不是只做一个. 他建议对每一种多连骨牌 P,在无穷大棋盘上玩一玩. 在双方轮流下棋时,左方把一个单位方格染黑,而右方把一个单位方格染白. 左方的目标是要产生一个 P 的黑色拷贝,而右方则力图破坏,如果左方存在着一个获胜策略,哈拉里就把 P 称为**得胜块**,否则,就叫**失利块**.

利用图上所指出的海尔斯—朱厄特匹配法（大部分由安德烈斯・勃拉斯（Andreas Blass）所发现），可以证明图 23 所列举的十二种多连骨牌统统都是失利块. 如果 P 中含有其中之一，就要失败. 不含这十二种的任何一种的、唯一的多连骨牌是图 24 所给出的十二种. 其中的十

一种都已被证明是得胜块，按照已知策略，不出 m 步即可在 $b\times b$ 棋盘上获胜. b 与 m 的具体数据，在图上也已给出. 至于最后一种，被哈拉里称为“蛇形块”的，人们猜测它也是一个得胜块.

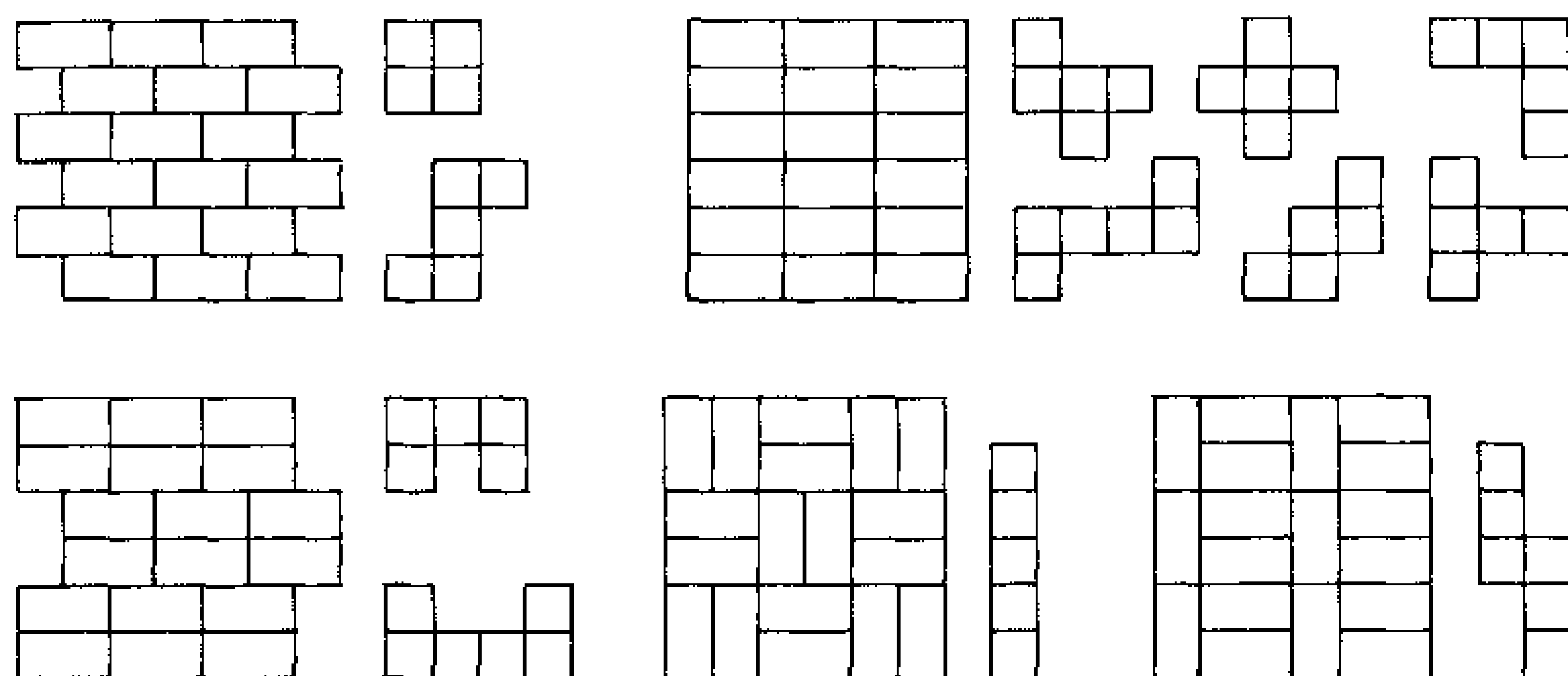


图 23. 海尔斯—朱厄特的匹配战略使十二种多米诺骨牌成为失利块.

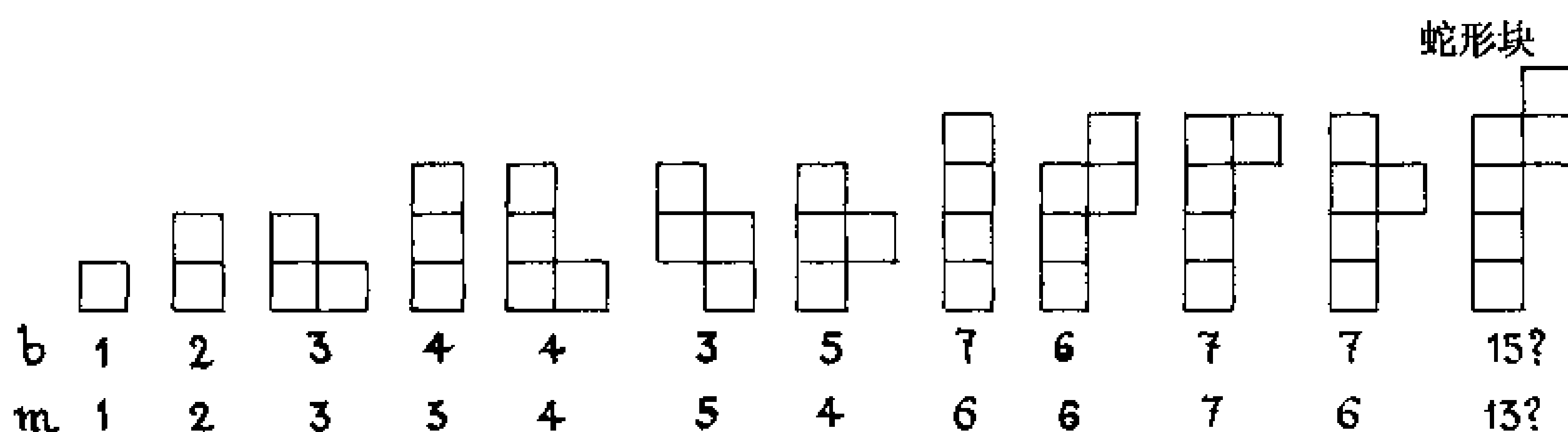


图 24. 十二种多连骨牌是得胜块,以及获胜时的棋盘大小及步数(但“蛇形块”有点靠不住).

躲闪车*

科林·服特(Colin Vout)发明了这种小巧精致的玩具,道具是两辆黑车与两辆白车,一只 3

---

* 译者注:国外超级市场上出售的一种智力玩具. Dodgem 是 Dodge them 的缩略字,指游乐场中相互躲让着行驶的电动小车.

×3 棋盘,开局初始状态见图 25(a)所示.两位局中人交替下棋,每步将他的一辆车子按所选取的三个可行方向之一(黑方只准向东,向北,向南;白方只准向北,向东,向西)行走一格,谁首先把他的两辆车子开出棋盘,他就是赢家.规定黑方的车子只能从右边出局,而白方的车子只能从上边出局.一个方格子里只能有一辆车子,如果你的车子挡住去路,使对方不能行走,那是要算你输的.

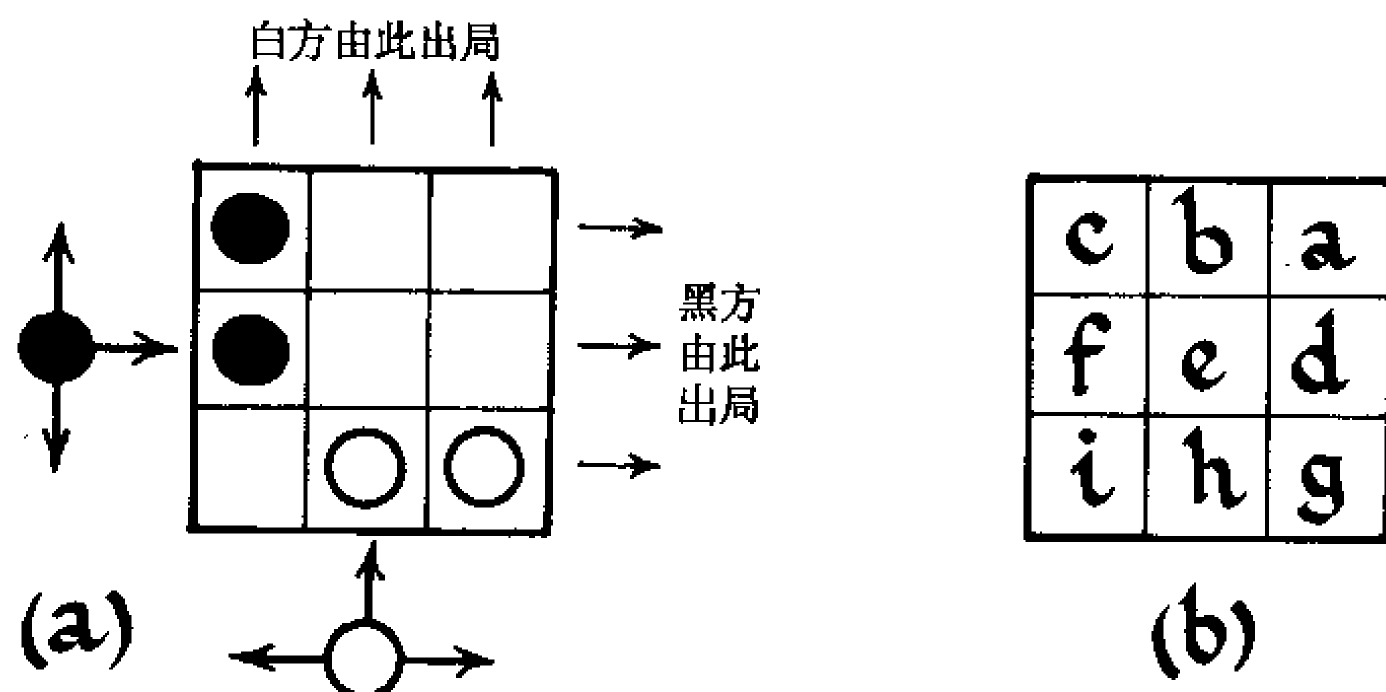


图 25. 科林·服特的躲闪车游戏.

尽管棋盘的大小同吃井字游戏一模一样,但这个游戏玩起来要有趣得多.表 1 给出了每种局势的结局,列中数字表示黑车的位置,行中数字表示白车的位置.字母成对,其意义见图 25(b).表中的空白是一个不合法的位置,因为每个方格内只准有一辆车子.

＋表示黑方(左方)可胜;

－表示白方(右方)可胜;

○表示后走者可胜;

* 表示先走者可胜.

如果没有把咱们的表格抄在手背上,你就会发现在同专家玩这个小巧游戏时对付不了他,因为他将要弄花巧,为你设下各种各样陷阱.在通常情况下,把你的车子尽早地开出局外去,并不是一种好办法,因为它有封锁对方车子去路的作用,可能是更加有用的.在很多场合,将车子开到右上角,都不失为一种良策.

当你成为行家里手之后,你可以试玩一下在 $n\times n$ 棋盘上的躲闪车游戏,此时每种颜色的车子各有 $(n-1)$ 辆,开始时放在第一行与第一列,让西南角空着.

左方的车位

右方的车位	fi	ci	cf	hi	hf	hc	ei	ef	ec	bi	bf	bc	eh	bh	be	gi	gf	gc	di	df	dc	ai	af	ac	i	f	c	gh	ge	gb	dh	de	db	ah	ae	ab	h	e	b	dg	ag	ad	g	d	a
a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-				-	-	-	-	-	-	-	-	-				-	-	-	-			*	*	
b	-	-	-	-	-	-	-	-	-				-			-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			-	-		-	-		-	-		-	-	-	*	*	*
c	-			-	-		-	-		-	-		-	-	-	-	-		-	-		-	-		-	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	*	*
ab	-	-	-	-	-	-	-	-	-				-			-	-	-	-	-	-				-	-	-	-	-		-	-					*	*		*			+	+	
ac	-			-	-		-	-		-	-		-	-	-	-	-		-	-					-	-		-	-	-	-	-	-				*	*	-	*			+	+	
bc	-			-	-		-	-					-			-	-		-	-		-	-		-	-		-	-		-	-		-	-		*	*		*	*	*	+	+	+
d	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-				-	-	*	-	-	-	-	-	*				*	*	O	*	-	*		+		+		+
e	-	-	-	-	-	-				-	-	-		-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-		*	-		*	-		*	*		+	*	*	*	+	+	+
f		-		-		-	-		-	-	-	-	-	-	-	-		*	-		*	-		*	-		O	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	*	*	*	*	*	+	+	+
ad	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-							*	-	*	*	-	*							+	*	O				+		
ae	-	-	-	-	-	-				-	-	-		-		-	-	-	-	-	-				*	-	-	*		-	*		-				+		*	+			+	+	
af		-		-		-	-		-	-		-	-	-	-	-		-	-		-				*		-	*	*	-	*	*	-				+	+	*	+			+	+	
bd	-	-	-	-	-	-	-	-	-				-			-	-	-				*	*	-	*	-	-	*	-					+	+		+	*			+		+		+
be	-	-	-	-	-	-										-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-	-	*			*			*			+			+	+	+	+	+	+
bf		-		-		-	-		-				-			-		-	-		-	-		-	*		*	*	*		*	*		*	*		+	+		+	+	+	+	+	+
cd	-			-	-		-	-		-	-		-	*	*	-	-					*	*		*	-		*	-	*				+	+	*	+	*	*		+		+		+
ce	-			-	-					-	-			*		-	-		-	-		-	-		*	-		*		+	*		+	*		+	+		+	+	+	+	+	+	+
cf				-			-			-			-	-	-	-			-			-			*			*	*	*	*	*	*	*	*	*	+	+	+	+	+	+	+	+	+
g	-	-	-	-	-	-	-	*	*	-	-	*	-	*	*				*	+	+	*	*	+	*	-	*				*	+	+	+	+	*	O	*	+			+		+	+
h	-	-	*				*	+	+	-	*	*			*	-	*	*	-	*	*	-	*	*	-	*	+		+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+
i			+		-	*		+	*		+	*	-	-	-		+	+		+	+		+	+		+	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	+	+	+	+	+	+	+	+	+
ag	-	-	-	-	-	-	-	*	-	-	-	-	*	-	*				*	+	*				-	*	-				+	+	+				*	+	*					+	
ah	-	-	-				-	-	-	-	-	-			-	-	*	-	-	*	-				-	*	*		+	*		+	*					+	+	+			+	+	
ai			-		*	-		*	-		-	-	*	-	-		+	*		+	*					+	*	+	+	*	+	+	*				+	+	+	+			+	+	
bg	-	-	-	-	-	-	-	*	-				*						*	+	*	*	+	*	-	*	-				+	+		+	+		*	+				+		+	+
bh	-	-	-				-	-	-							-	*	-	-	*	-	-	*	-	-	*	-		+			+			+			+		+	+	+	+	+	+
bi			-		*	-		*	-				*				+	*		+	*		+	*		+	*	+	+		+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+
cg	-			-	-		-	*		*	*		*	+	+				*	+		*	+		-	*					+	+	+	+	+	+	*	+	+			+		+	+
ch	-						-	-		-	*				+	-	*		-	*		-	*		-	*			+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+
ci					*			*			+		*	*	*		+			+			+			+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
de	-	-	-	-	-	-				*	*	-		*		*	-	-				+	+	*	+	*	*	+		*				+		+	+		+		+		+		+
df		-		-		-	-		-	*		*	-	*	*	*		-				+		+	+		*	+	*	*				+	+	+	+	+	+		+		+		+
ef		-		-		*				*		O		+		*		*	*		*	*		*	+		+	+		+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+
dg	-	-	-	-	*	-	*	-	*	*	*	*	O	*	+							+	+	+	*	*	*							+	+	+	+	+	+						+
dh	-	-	-				-	-	-	*	*	*			*	-	*	*				+	+	+	-	*	+		+	+					+	+		+	+		+		+		+
di			-		+	*		*	-		*	*	*	*	*		+	*					+	+		+	+	+	+	+				+	+	+	+	+	+		+		+		+
eg	-	*	*	-	-	*				+	+	*		+					+	+	+	+	+	+	*	-	*				+		+	+		+	+		+			+		+	+
eh	-	-	*							*	+	+				*	+	*	*	+	*	*	+	*	-	-	*			+			+			+			+	+	+	+	+	+	+
ei			*		+	*					+	*		+			+	+		+	+		+	+		*	+	+		+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+
fg		-		-		*	*		*	*		+	*	+	+				+		+	+		+	*		+				+	+	+	+	+	+	+	+	+			+		+	+
fh		-					-		+	-		*			+	*		+	*		+	*		+	+		+		+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+
fi						+			+			+	+	+	+			+			+			+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
gh	-	*	*				*	*	*	+	+	+			+				+	+	+	+	+	+	-	*	+					+	+		+	+		+	+			+		+	+
gi			*		+	+		+	*		+	+	+	+	+					+	+		+	+		+	+				-	+	+	+	+	+	+	+	+			+		+	+
hi			+					+	+		+	+			+		+	+		+	+		+	+		+	+		+	+		+	+		+	+		+	+	+	+	+	+	+	+

c	b	a
f	e	d
i	h	g

表 1. 躲闪车游戏中各种局势的结局与一些良好走法.

钉梢车

这是两辆车子在四分之一无穷大棋盘上玩的游戏. 双方的车子在一步中可以向北或向西行走任意距离,只要它不跳过或超越另一辆车子. 当你不能走动时,你就输了.

不难看出

> 两辆车子处在相邻方格的任一局势都是一个 $\mathscr{P}$—局势.

这是因为不论他下一步怎么走,你总是可以如影随形地尾随他的缘故. 由此也可看出

> 两辆车子位于同行或同列,或者它们分别位于格邻的行或列时,此种局势为一个 $\mathscr{N}$—局势.

因为下一步可以立即把车子开到紧挨着另一辆车子的位置. 所以在下面的分析中,我们不妨假定两辆车子位于同行或同列,或者位于相邻的行列都是非法的.

设(x_1,y_1),(x_2,y_2)为受到限制的游戏中两辆车子的位置. 于是对这些数目而言,我们好像是在玩四堆尼姆游戏,我们可以在四个数目 x_1,x_2,y_1,y_2 中任意削减其中的一个数目,只要能够保证 x_1-x_2 及 y_1-y_2 不等于 0 或±1. 由于 x 及 y 之间没有相互作用,于是我们可以把它看作两个博弈(一个在 x 上玩,另一个在 y 上玩)之和. 表 2 给出了这些游戏中每一个游戏的尼姆值——除非已在上文框出的局势. 表格中的 X 指的是受到限制游戏中的非法局势.

> 当 $f(x_1,x_2)=f(y_1,y_2)$时,局势(x_1,y_1),(x_2,y_2)为一钉梢车游戏的 $\mathscr{P}$—局势.

(由于它们的尼姆和为 0)这里 $f(x_1,x_2)$是在表 2 中给出的函数.

一旦离开表格的边缘,我们便看不出表格里有多少模式,不过,至少在前面几行(或几列)里是有算术周期的. 在前五行,(最终的)局期与跃度是 1,1,3,9,36,在粗线外是正确的. 同样的表格也可用来解决三维空间中的钉梢车问题,这时 $\mathscr{P}$—局势的条件将成为

$$f(x_1,x_2)\overset{*}{+}f(y_1,y_2)\overset{*}{+}f(z_1,z_2)=0.$$

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	X	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	X	X	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	0	X	X	X	3	1	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11	15
3	1	0	X	X	X	4	5	2	3	8	6	10	7	9	13	14	11
4	2	1	3	X	X	X	0	7	8	4	5	6	11	13	9	10	12
5	3	2	1	4	X	X	X	0	7	9	10	5	6	8	14	15	16
6	4	3	2	5	0	X	X	X	1	10	11	12	13	6	7	8	9
7	5	4	6	2	7	0	X	X	X	1	3	11	12	14	8	9	10
8	6	5	4	3	8	7	1	X	X	X	0	2	14	15	16	17	18
9	7	6	5	8	4	9	10	1	X	X	X	0	2	3	15	16	17
10	8	7	9	6	5	10	11	3	0	X	X	X	1	2	4	18	19
11	9	8	7	10	6	5	12	11	2	0	X	X	X	1	3	4	20
12	10	9	8	7	11	6	13	12	14	2	1	X	X	X	0	3	4
13	11	10	12	9	13	8	6	14	15	3	2	1	X	X	X	0	5

表 2. 钉梢车游戏的值，$f(x_1, x_2)$.

哲学家的足球赛

简称“足球”，是英语的谐音单调，已由 J·H·康威登记专利，它是一种玩起来兴味极浓的游戏，也许你只是在本书中才第一次见到. 通常它是在图 26 所示的 15×19 交叉线的棋盘上来玩，但也可利用 19×19 的围棋盘. 使用的道具是一枚黑子（**足球**）以及数量极多的白子（**卒子**），一切棋子都可供双方利用，实际上，对弈双方的符合棋规的走法是完全一样的，不过目标不同而已.

开始时，棋盘上是空的，但中心位置已经放好了黑子（即**足球**）. 然后双方开始走棋，走法有两种：

要么在任何一个空白交叉点放上一枚白子（小卒）；

或者用足球**跳过白子**，被它跳过去的白子立即拿出棋盘.

（上述两种走法只能任择其一，不准两者都走.）

在罗盘的八种标准方位北，东北，东，东南，南，西南，西，西北，都可以“跳”，规定被跳过去的小卒至少要有一枚，足球跳到的位置是所跳方向上第一个空白的交点. 被跳过去的小卒必须立

即移出棋盘.局中人可以在八个方向中的几个作连续的跳跃,视为一步动作.但由于小卒是被立即拿出棋盘的,所以同一小卒不能在一步动作中被跳过的次数多于一次,在跳的时候也不准许把小卒放置在棋盘之上.

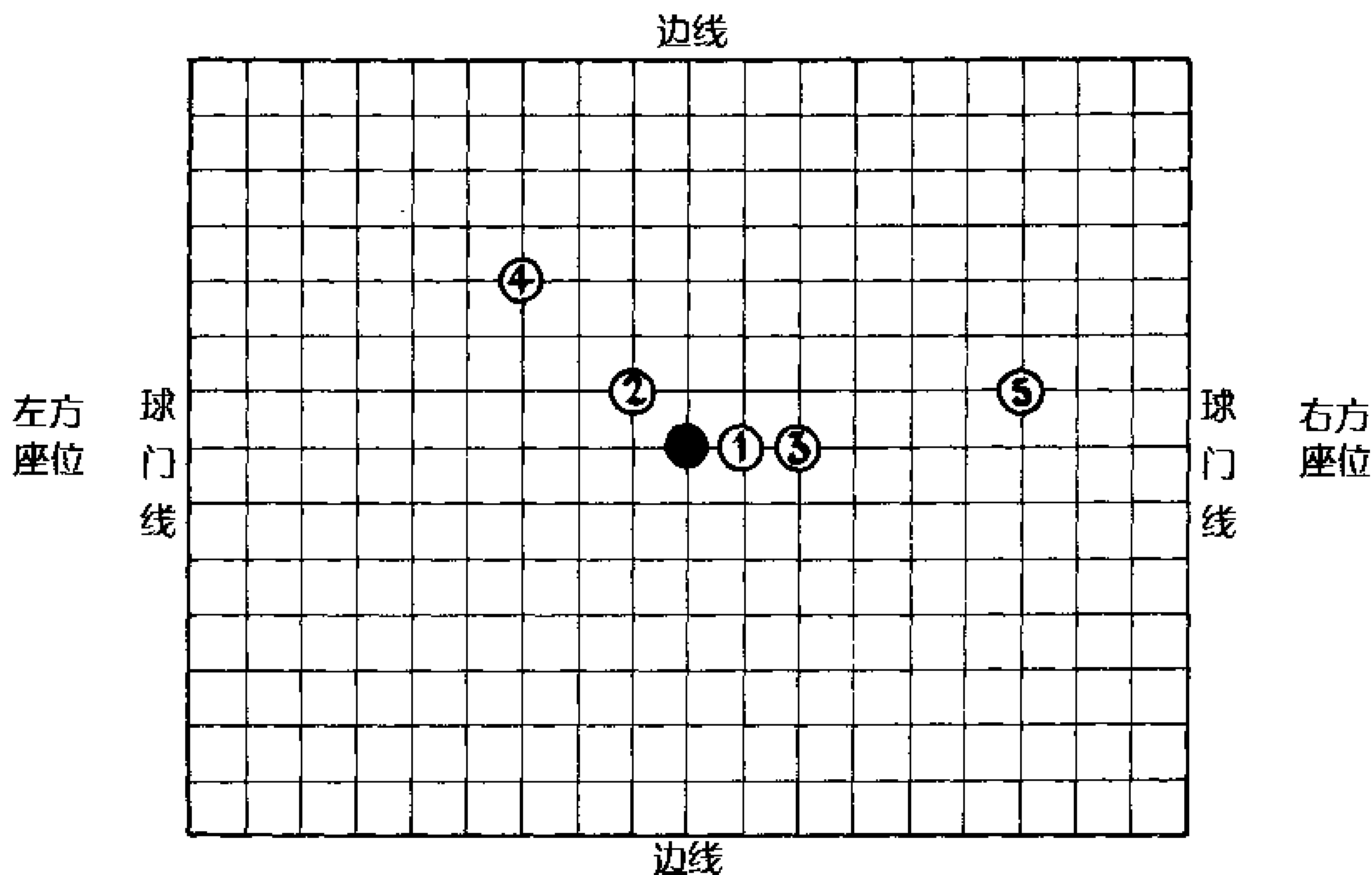


图 26. 足球棋棋盘　某一局棋的前五步.

把足球放在任意一条球门线或边线上是合法的,将足球踢出棋盘也是合法的,但这只能是它跳过球门线上的一只小卒,而且是作为一局棋的最后一步的情况.事实上,左方的目标是使其最后一步将足球停留在右方的球门线上或者跳过此线,而右方的目标为左方的球门线.不过,防守的一方也可以成功地利用己方的球门线,在一步动作中使足球停在此线上或者踢出棋盘.

在标准的开局法中,双方走的步子如下:

左 1,右 2,左 3,右 4,左 5

(见图 26),企图建立起一条通向对方球门线的进攻之链.现在右方对左方的威胁感到惊讶,怕他跳过 1,3,并在其后建立起进攻链,再跳过 5.于是他决定采取两步小跳,跳过 2 与 4.

在紧随其后的几步

左 7,右 8,左 9

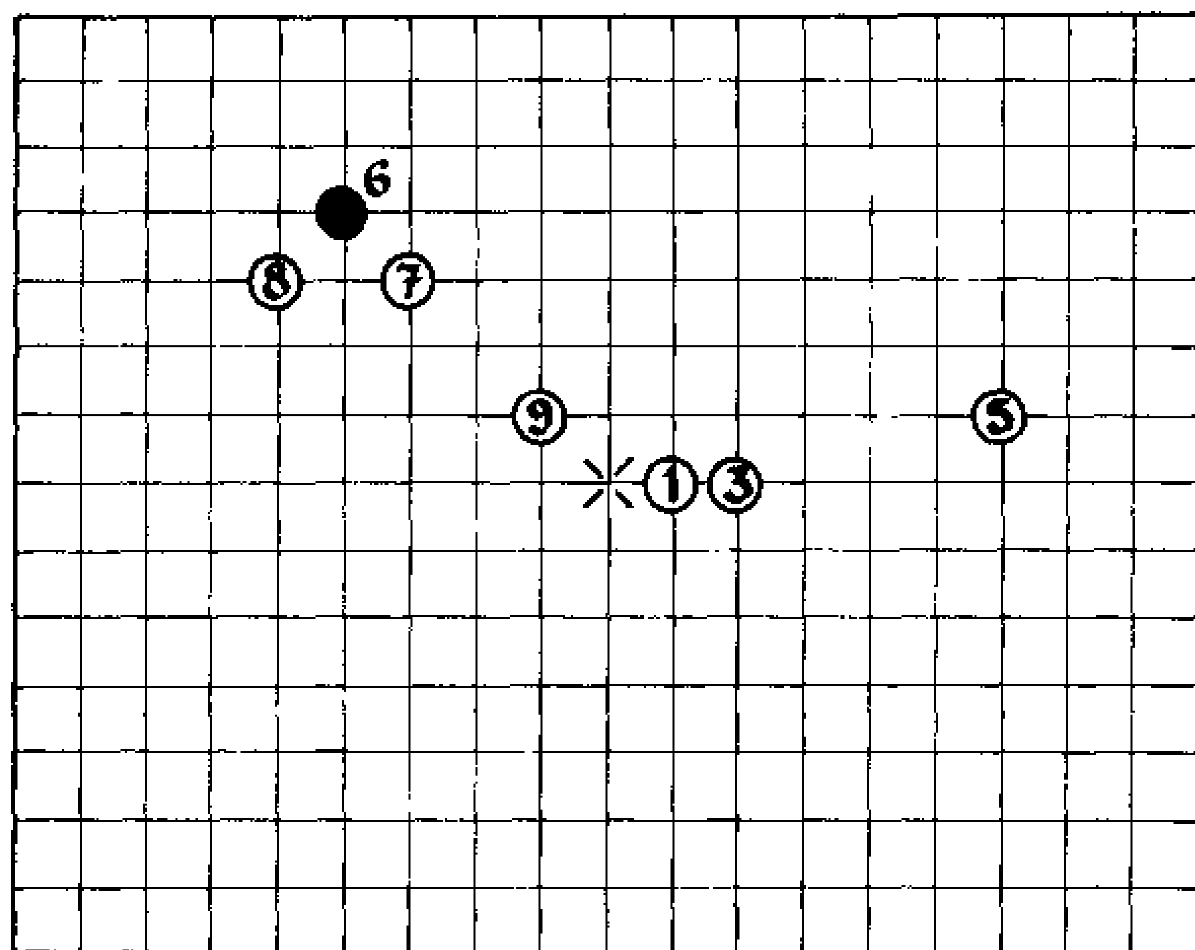


图 27. 其后的四步.

中,左方企图重新建立起进攻链,对此,右方则在准备一条通向边线的跳跃路径. 在图 27 中,如果轮到左方走棋的话,则他可以一举跳过 7 与 9,再跳过 1,3 两子.(对他来说,最后一步不跳会更好一些,正如在国际象棋中一样,潜在的威胁总是要比实际执行更具威力.)然而,这步应轮到右方走棋,于是他跳过 8,而以下的几步有如图 28 所示。

这几步是相当微妙的,左方走出 11 要比重建 8 好得多,对于后者,右方对付起来非常轻松,他只要在图 27 中足球所在位置放上一只小卒就行了.(在跳过这两子后,左方将发现,要把他长链中的残子重新联系起来是非常困难的.)右方在 12 位放子更加奥妙了! 由于失败的直接威胁,将使左方跳越 11 与 7,到达一个俯瞰位置. 12 也为这一跳以后准备下一条归路,并为 14 位的下子预作了准备,通过迂回的三连跳 11,12,14,将使右方迫近左方的球门线,并且除去了一些对方可以利用的小卒. 12 这步甚至还有一些更多的秘密:如左方放上 13,则右方可以跳过 11 与 7,于是左方企图重建其旧链的一切企图都将帮助右方建立起 13 与 12 的联系.

几乎所有的这些走法都已成为本棋的标准走法了,但从此以后,专家们的走法就大有差别. 本游戏有许多奥妙战术(解除,抑制对方的威胁,劫掠性的 U 转弯,等等),我们在此只能作些大略提示而已.

除非真正有必要,你一般不要随便就跳. 即使要跳,跳的范围也不要太远,超过真正需要的

程度. 如果在对方可能跳到的三处之一有一枚小卒，但相距并非马步，你就可能利用它来返回. 即使对方跳了，你也不必过分害怕(他有可能并不跳). 应当记住，与足球相距"马步"的位置几乎总是无用的. 此类棋子称为**小鸡小鸭**(由两个英语单词"无足轻重"与"败坏均势"拼凑演变而成). 一个有威胁力的进攻链如能用几种方式来利用跳跃将更为有用. 切勿忘记，你放下的小卒可能会被对方利用——有可能是在一个破坏性很大的 U 形转弯中.

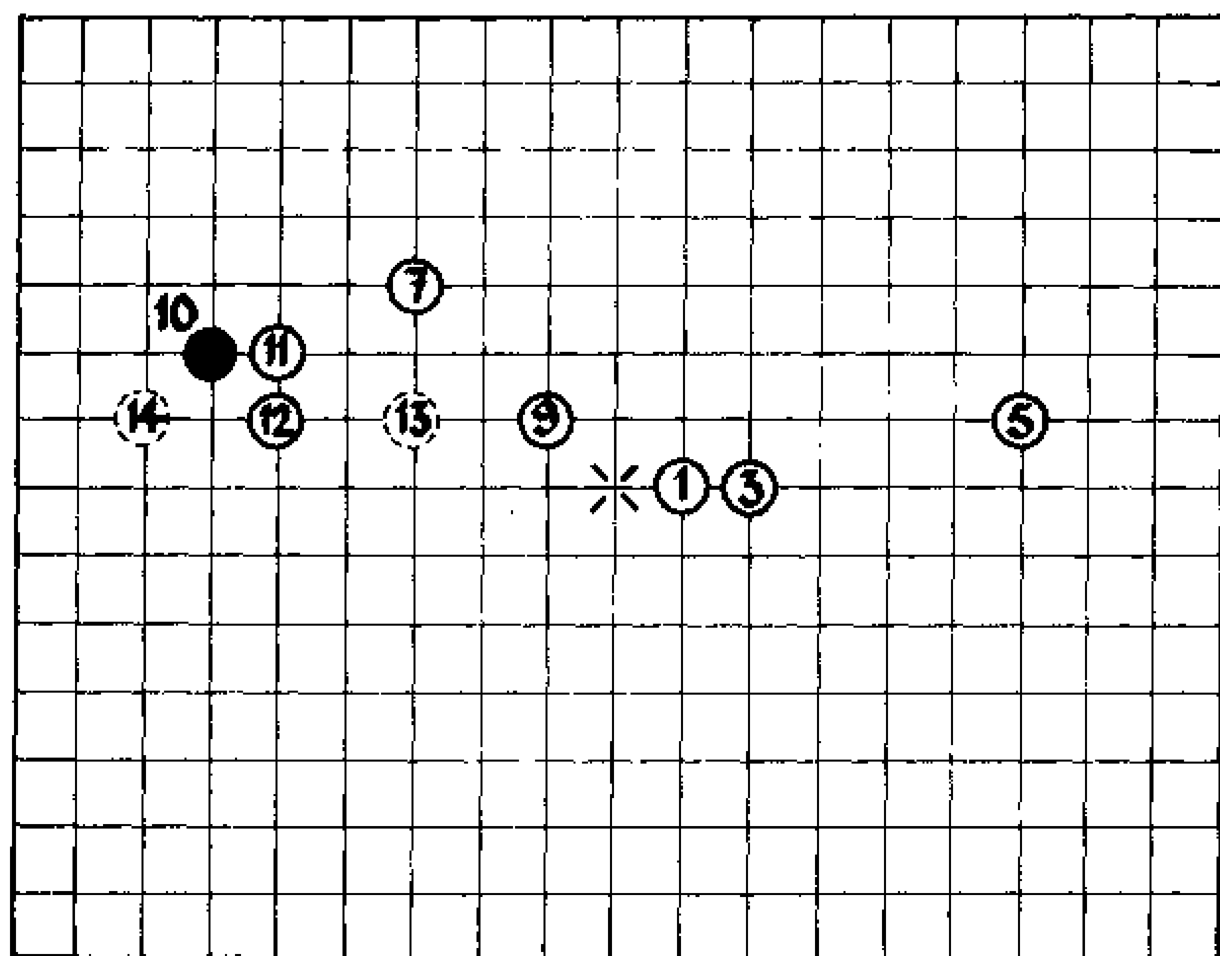


图 28. 本游戏的继续进行.

本游戏还有一个令人愉快的特点，专家同初出茅庐的新手对下时，如果足球靠近专家的球门线时，那么专家仍然不可掉以轻心，要专心思考，从而获得快感.

本游戏很像围棋与国际象棋而不像本书中绝大多数其他游戏，它不属于那种人们可以作出完全彻底解析的棋种.

增 补

参考文献及进一步阅读材料

William N. Anderson, Maximum matching and the game of Slither, J. Combinatorial Theory Ser. B, **17**(1974) 234--239.

Charles Babbage, Passages from the Life of a Philosopher, Longman, Green, Longman, Roberts and Green, London, 1864; reprinted Augustus M. Kelley, New York, 1969, pp. 467—471.

J. P. V. D. Balsdon, Life and Leisure in Ancient Rome, McGraw-Hill, New York. 1969, pp. 156 ff.

A. G. Bell, Kalah on Atlas, in D. Michie(ed.) "Machine Intelligence, 3", Oliver & Boyd, London, 1968, 181—193.

A. G. Bell, "Games Playing with Computers", George Allen & Unwin. London, 1972, pp. 27—33.

Robert Charles Bell. "Board and Table Games from Many Civilizations", Oxford University Press, London, 1960, 1969.

Richard A. Brualdi, Networks and the Shannon Switching Game, Delta, **4**(1974)1 -23.

Gottfried Bruckner, Verallgemeinerung eines Satzes über arithmetische Progressionen, Math. Nachr. **56**(1973) 179—188; M. R. **49**#10562.

L. Csmiraz, On a combinatorial game with an application to Go-Moku, Discrete Math. **29**(1980) 19—23.

D. W. Davies, A theory of Chess and Noughts and Crosses, Sci. News, **16**(1950)40—64.

H. E. Dudeney, "The Canterbury Puzzles and other Curious Problems", Thomas Nelson and Sons, London, 1907; Dover, New York, 1958.

H. E. Dudeney, "536 Puzzles and Curious Problems", ed. Martin Gardner, Chas. Scribner's

Sons, New York, 1967.

J. Edmonds, Lehman's Switching Game and a theorem of Tutte and Nash-Williams, J. Res. Nat. Bur. Standards, **69B**(1965)73—77.

P. Erdös and J. L. Selfridge, On a combinatorial game, J. Combinatorial Theory Ser, B, **14**(1973) 298—301.

Ronald J. Evans, A winning opening in Reverse Hex, J. Recreational Math. **7**(1974)189—192.

Ronald J. Evans, Some variants of Hex, J. Recreational Math. **8**(1975—76)129—122.

Edward Falkener, "Games Ancient and Oriental and How to Play Them", Longmans Green, London, 1892; Dover, New York, 1961.

G. E. Felton and R. H. Macmillan, Noughts and Crosses, Eureka. **11**(1949)5—9.

William Funkenbusch and Edwin Eagle, Hyperspacial Tit-Tat-Toe or Tit-Tat-Toe in four dimensions, Nat. Math. Mag. **19**#3(Dec. 1944)119—122.

David Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem, Amer. Math. Monthly, **86** (1979)818—827.

Martin Gardner, "The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions", Simon & Schuster, New York, 1959.

Martin Gardner, Mathematical Games, Scientific Amer., each issue, but especially **196**#3(Mar. 1957)160—166; **209**#4(Oct. 1963)124—130; **209**#5(Nov. 1967)144—154; **216**#2(Feb. 1967)116—120; **225**#2(Aug. 1971)102—105; **232**#6(June 1975)106—111; **233**#6(Dec. 1975)116—119; **240**#4(Apr. 1979)18—28.

Martin Gardner, "Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American", W. H. Freeman, San Francisco, 1971; 39—47.

Martin Gardner, Mathematical Carnival, W. H. Freeman, San Francisco 1975, chap. 16.

Richard K. Guy and J. L. Selfridge, Problem S. 10, Amer. Math. Monthly, **86**(1979)306; solution T. G. L. Zetters **87**(1980)575—576.

A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963)222—229; **M. R. 26**#1265.

Professor Hoffman(Angelo Lewis), "The Book of Table Games", Geo. Routledge & Sons, London, 1894. pp. 599—603.

Isidor, Bishop of Saville, "Origines", Book 18, Chap. 64.

Edward Lasker, "Go and Go-Moku", Alfred A. Knopf, New York, 1934; 2nd revised edition, Dover, New York, 1960.

Alfred Lehman, A solution of the Shannon switching game, SIAM J. **12**(1964)687 725.

E. Lucas, "Récréations Mathématiques", Gauthier-Villars, 1882—1894, Blanchard, Paris, 1960.

Carlyle Lustenberger, M. S. thesis, Pennsylvania State University, 1967.

Leo Moser, Solution to problem E773 [1947, 281], Amer. Math. Monthly. **55**(1948)99.

Geoffrey Mott-Smith, "Mathematical Puzzles", Dover. New York, 1954; ch. 13 Board Games.

H. J. R. Murray, "A History of Board Games other than Chess", Oxford University Press, 1952; Hacker Art Books, New York, 1978; chap. 3, Games of alignment and configuration.

T. H. O'Beirne, New boards for old games, New Scientist, **269**(62:01:11).

T. H. O'Beirne, "Puzzles and Paradoxes", Oxford University Press, 1965.

Ovid, "Ars Amatoria", ii, 208, iii, 358.

Jerome L. Paul, The q-regularity of lattice point paths in R^n, Bull. Amer. Math. Soc. **81**(1975) 492; Addendum, ibid. 1136.

Jerome L. Paul, Tic-Tac-Toe in n dimensions, Math. Mag. **51**(1978)45—49.

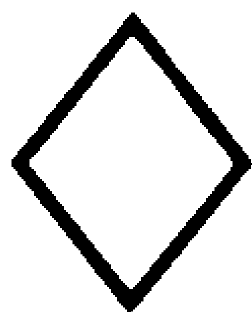
Jerome L. Paul, Partitioning the lattice points in R^n, J. Combin. Theory Ser. A, **26**(1979)238—248.

Harry D. Ruderman, The games of Tick-Tack-Toe, Math. Teacher, **44**(1951)344—346.

Sidney Sackson, "A Gamut of Games", Random House, New York, 1969.

John Scarne. Scarne's Encyclopedia of Games. Harper and Row. New York. 1973.

Fred. Schuh, "The Master Book of Mathematical Recreations", trans. F. Göbel, ed. T. H. O'Beirne, Dover, New York, 1968; ch. 3, The game of Noughts Crosses.



自我消遣的精品!

小小星星眨眼睛,
疑是何等小精灵!
高悬空中观尘世,
犹如钻石亮晶晶!
——珍妮·泰勒,《星星》

我们全都神情沮丧,方块才是王牌;
小猫小兔都跑到圣·保罗那里去了,
娃娃们被蚊子叮咬啼哭,月亮在大发脾气,
造出来的房子嘛,连墙壁都没有.
——童谣

如果你一直在紧紧追随这本《稳操胜券》,一丝不苟地读到现在,那么你或者会发觉,想找个人来同你做游戏是很困难的,所以你需要自我消遣.这里有一些我们偏爱的自娱精品.

第 23 章要讲经典的独粒钻石游戏,处理这一题材的新、旧方法兼而有之.

一批趣题、消遣时光的玩意儿以及宴会中表演的魔术将在第 24 章中叙述.

最后,任何一种自动装置都会乐意去玩大名鼎鼎的**生命**游戏(见第 25 章).

第23章

清除木栓*

作为娱乐与教育弱智者的用具，我们只能在这里大略地提到：盛豆子的口袋，木栓棋盘，以及形形色色的各种棋盘.

——阿尔勃脱，《系统医学》，1899，第八卷，246 页

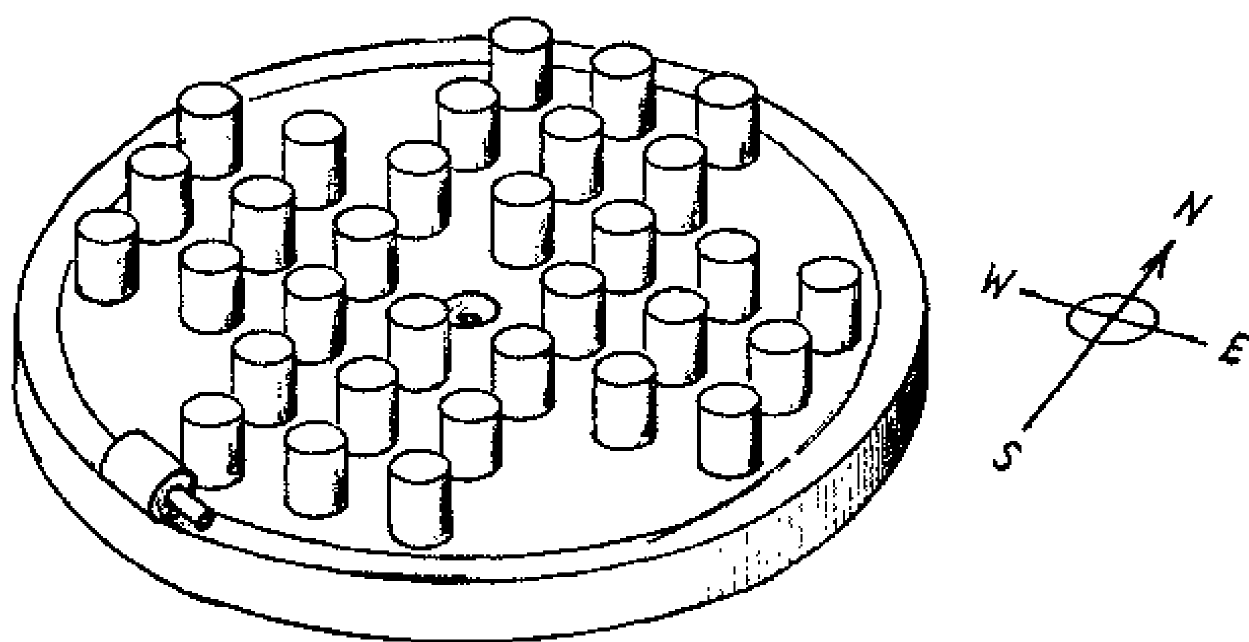


图 1. 英国式独粒钻石棋盘.

图 1 是通常在它上面玩单人木栓游戏* 的英国式棋盘. 如果改用弹子，重新布满棋盘时要略为容易些，但在分析研究时，木栓就要稳定得多了.

游戏的玩法如图 2 所示（当然是没有对手的单人游戏啰）. 如图 2(a)，在同行或同

* 译者注：我国名为“独粒钻石”游戏，在前几年曾大为流行.

列中有两只相邻的木栓紧挨着一个空位，则我们就可以把木栓 p 跳过 r，放进 s，被跳过的木栓 r 就得马上拿出棋盘(图 2(c)). 我们看到，跳法同西洋跳棋* 没有什么两样，但不允许沿着对角线跳，只能在东、南、西、北方向跳跃.

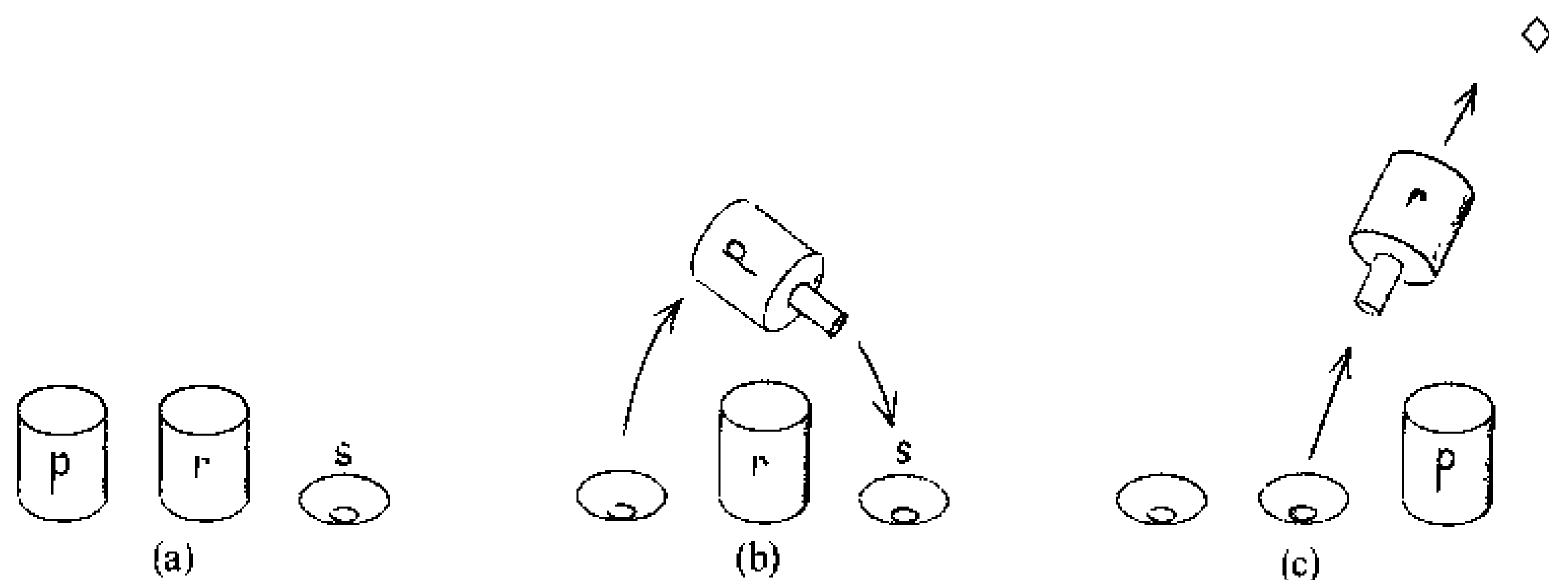


图 2. 独粒钻石游戏中的一步跳跃.

只留下一个中心木栓

本游戏的典型玩法是：开始时如图 1，除中心以外，每个洞孔中都有一个木栓，要求通过一系列跳跃动作，使中心留下一个木栓，其他木栓统统拿出局外，见图 3.

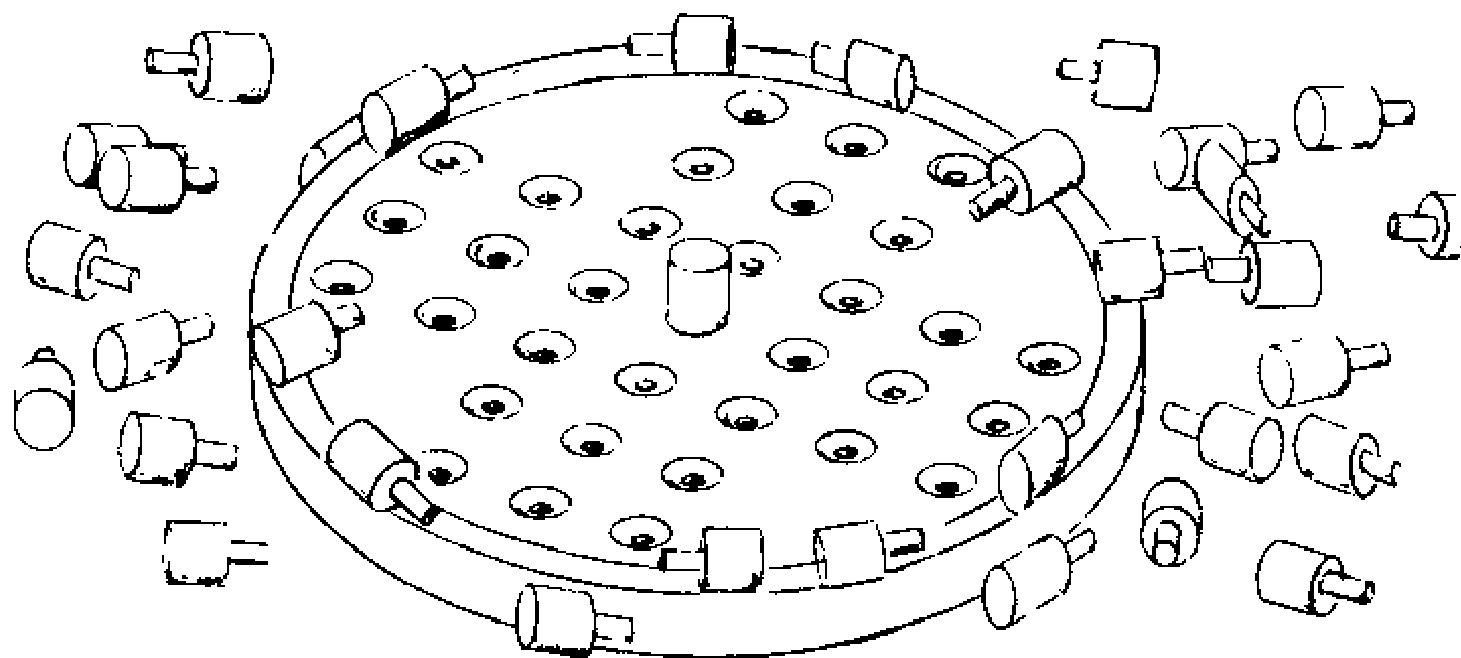


图 3. 成功了！

---

* 译者注：实际上是同一样东西，仅仅叫法不同而已. 英国人叫它 Draughts，而美国人叫它 Checkers.

像许多单人纸牌戏（有“耐心”的游戏）一样，确切地说，这种游戏毋宁是一种游戏而不是一个趣题，因为人们总是感到自己在和一个看不见的对手进行交锋．通常对趣题不太感兴趣的人会回忆起他们生命史中的一些艰辛时刻，其时他们不得不同这个看不见的对手进行殊死搏斗：这些人中的大多数能够很轻松自在地解决一些单人纸牌游戏问题，可以心甘情愿地像孩童一样地接受别人的指点．想要单枪匹马地独立找到窍门委实不容易，因而这种孤立木栓游戏（目前在世界各地，它以高智商玩具的商标到处有售）能获得这样大的名气实在来之不易．在长途旅行或百无聊赖的时刻，用这种游戏来消磨时间实在是再好也没有了．这就使我们不免相信那些古老书本上的说法——这种游戏的发明人是一位法国贵族，他在监牢的石头地板上首先摆弄着它．

如果你以前从未玩过它，那就请你把这本书放在一边，跑出去买一只棋盘，自己尝试着去解决只留一个中心木栓的问题，而你们中间的其他人可以留下来，有着充分的时间来耐心阅读本章．一星期之后等新手回来再说——或许会研究出一种特别巧妙的解法，让大家留下深刻印象的！

杜登尼，布荷特与贝斯莱

由于你已经知道怎样去解决问题，你自然希望尽快地解出它，所以让我们同意把一个木栓的连跳几下看作**一步**．图4指出了这样的一步——五个打上阴影记号的木栓在这一步中都将移出局外．

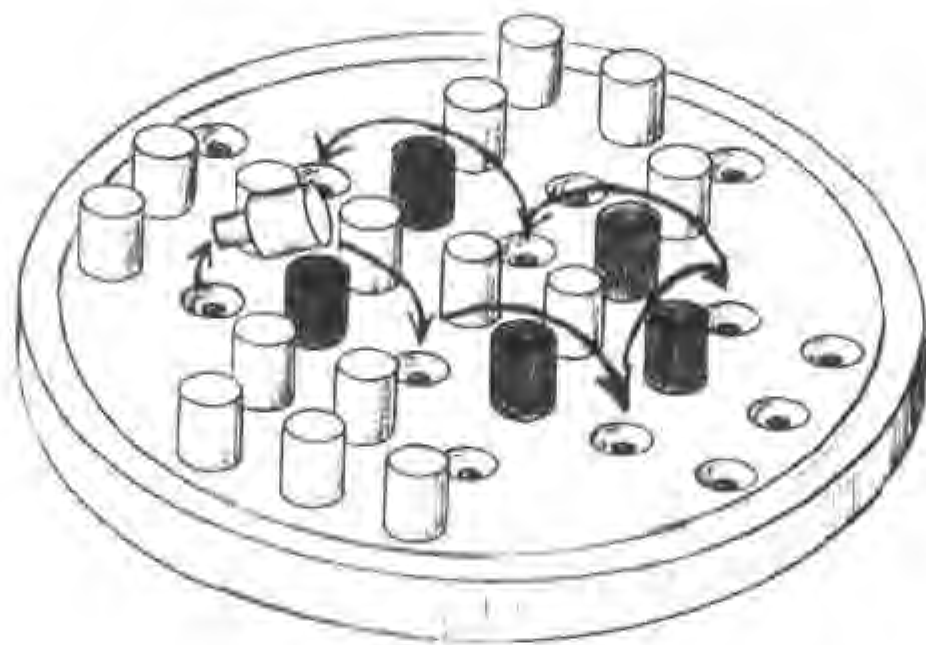


图 4. 连跳五下的一步．

像许多单人纸牌戏（有"耐心"的游戏）一样，确切地说，这种游戏毋宁是一种游戏而不是一个趣题，因为人们总是感到自己在和一个看不见的对手进行交锋．通常对趣题不太感兴趣的人会回忆起他们生命史中的一些艰辛时刻，其时他们不得不同这个看不见的对手进行殊死搏斗：这些人中的大多数能够很轻松自在地解决一些单人纸牌游戏问题，可以心甘情愿地像孩童一样地接受别人的指点．想要单枪匹马地独立找到窍门委实不容易，因而这种孤立木栓游戏（目前在世界各地，它以高智商玩具的商标到处有售）能获得这样大的名气实在来之不易．在长途旅行或百无聊赖的时刻，用这种游戏来消磨时间实在是再好也没有了，这就使我们不免相信那些古老书本上的说法——这种游戏的发明人是一位法国贵族，他在监牢的石头地板上首先摆弄着它．

如果你以前从未玩过它，那就请你把这本书放在一边，跑出去买一只棋盘，自己尝试着去解决只留一个中心木栓的问题，而你们中间的其他人可以留下来，有着充分的时间来耐心阅读本章．一星期之后等新手回来再说——或许会研究出一种特别巧妙的解法，让大家留下深刻印象的！

杜登尼、布荷特与贝斯莱

由于你已经知道怎样去解决问题，你自然希望尽快地解出它，所以让我们同意把一个木栓的连跳几下看作**一步**．图4指出了这样的一步——五个打上阴影记号的木栓在这一步中都将移出局外．

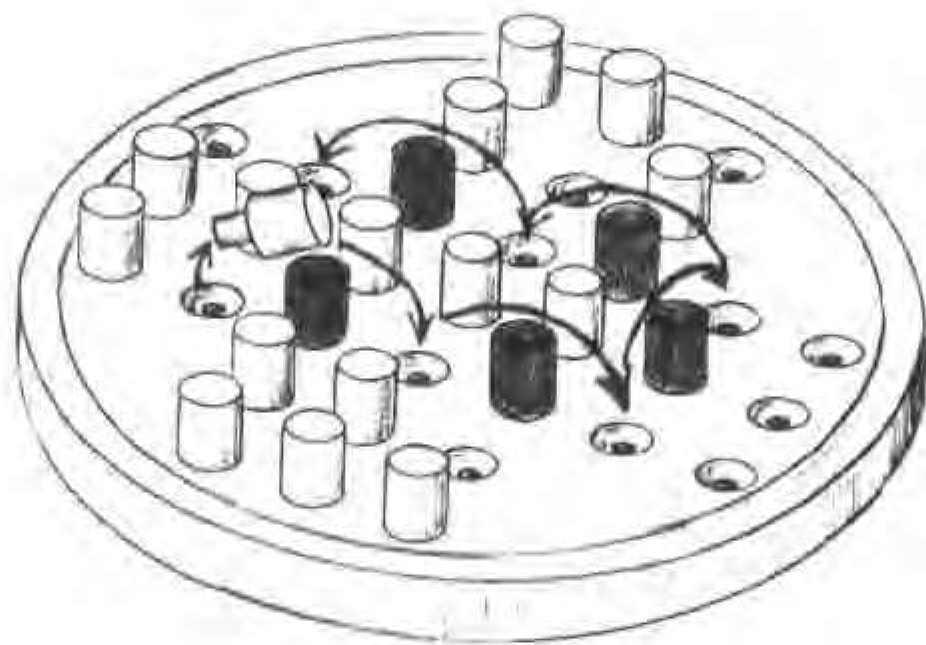


图4. 连跳五下的一步．

		a	b	c		
	y	d	e	f	z	
g	h	i	j	k	l	m
n	o	p	x	P	O	N
M	L	K	J	I	H	G
	Z	F	E	D	Y	
		C	B	A		

图 5. 各个位置的记法.

为了简洁而紧凑地叙述解法，我们对棋盘上的各个位置采用图 5 的记法，并用记号 St 表示从 S 跳到 t 的动作，如不需要指明它的方向时，还可进一步简记为 S. 图 4 的一步五跳为 $LJHljh$，在不易混淆时可简记为 L_5（但现在不能这样做，因为 L_5 的意思也可以是 $LhijHl$，还有其他解释）. 采用此种记法之后，只留下一根中心木栓的杜登尼 19 步巧妙解法便是

$$eJO_2\ fmh_2ap\ FMH_2AP\ c_2g_2C_2G_2\ p_6o,$$

它可以由图 6 表出.

杜登尼认为 19 步跳法已经是登峰造极，不能再改进了. 但四年以后，欧内斯特·布荷特(Ernest Bergholt)在《皇后》杂志上刊出了他的 18 步解法*，不幸的是，这一解法不像杜登尼方法那样对称：

$$elcPDGJm_2igL_5CpA_2M_2a_3d_5o.$$

这里，记法 L_5 的意思比较含糊，它所指的五步跳法就是图 4 中标出的那一种. 另外，d_5 也很含糊，但不论作怎样解释，都将导致同一结果.

---

* 译者注：上海的一位女工詹苹苹在 1980 年代中期完全独立地得出了不亚于布荷特的 18 步解法. 作为天使杯智力玩具赛评委及上海市数学会的代表，译者曾参加过她的成果鉴定会. 詹女士并因此获得了一辆自行车的奖励. 现在看来，这样的奖励未免太菲薄了.

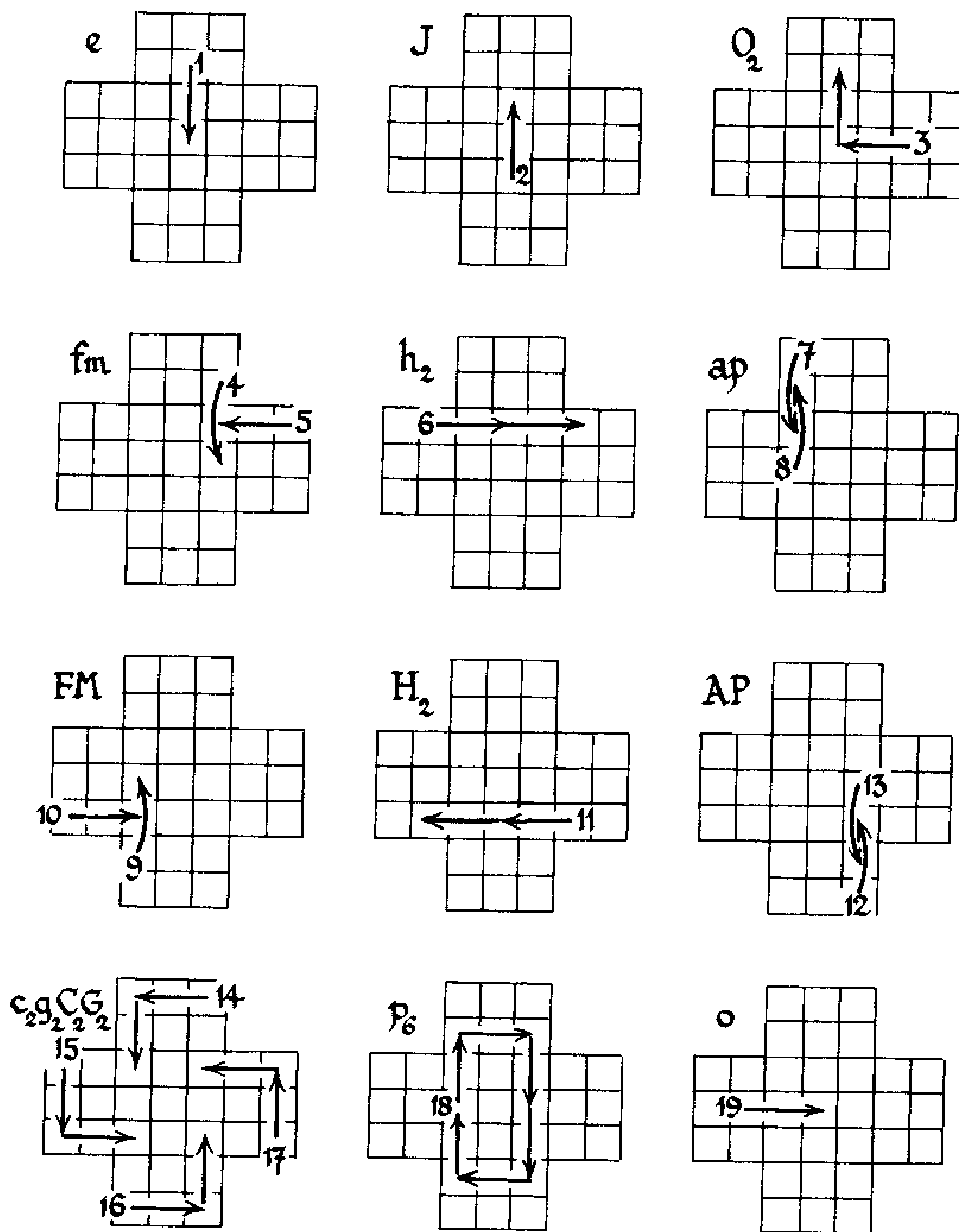


图 6. 只留下一个中心木栓的杜登尼 19 步解法.

五十二年之后，直到 1964 年，真相才开始露头. 其时，约翰 · 贝斯莱(John Beasley)利用本章所讲的方法，证明了少于 18 步的解法是不存在的. 承他慨然允诺，我们将在本章增补材料中首次披露他的证明. 它是高度浓缩的，企图追随他的读者必须首先好好地阅读本章.

包与清洗剂

在你实际使用它们以前，最好能了解一整套跳跃动作所能达到的效果. 我们现在就来卖给你几只立竿见影的**软件包**吧，如果某只软件包能够清除某一区域内的所有木栓，我们就把它称为一个**清洗剂**.

图 7 是手头迟早有用的三木栓清除剂，这是我们最孚众望的**软件**包. 如果三只木栓(头、尾及身体)紧挨在同一直线上，而在“头”的一侧有另一个外加的本栓，而在另一侧有个空位(见附图)，则应用此清除剂，即可把它们全部除去. 其办法是：使外加的一只木栓(图上的 1)跳过“头”，然后把“尾”(图上的 2)越过“身体”，跳到“头”的位置；再将 3 跳过“头”，到达原来的位置. 由于在“头”的两侧，木栓与空位对软件包都是必要的，但它们最后又恢复到其原有状态，所以我们将把它们叫做**触媒**.

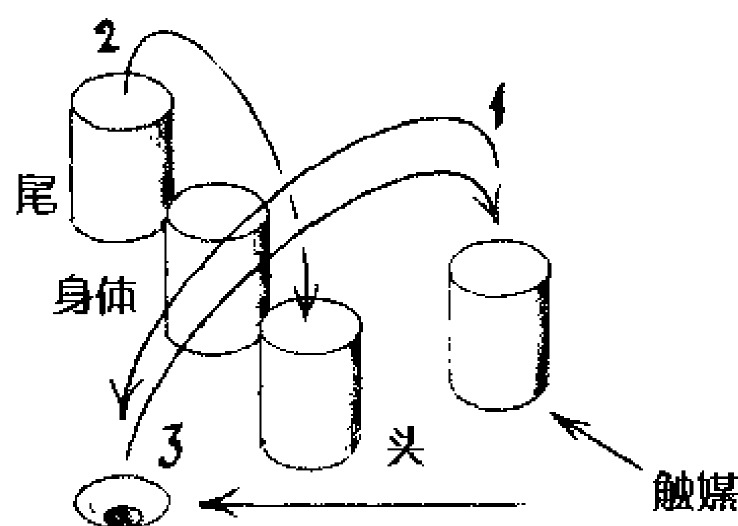


图 7. 清除三只木栓.

在图 8(a)至 8(h)中，●代表要清除的木栓，○代表要填满的空位，××表示触媒位置，其中一个必须充填，另一个必须是空位. 在绝大多数清除剂中具有穿越同一位置(可以是一个木栓或一个空位)的、相反方向上的触媒动作，而余下的动作将形成一或二个**软件包**以便把木栓传递到那个位置. 对三木栓清除剂来说(见图 8(a))，一个木栓已经到位，而另一个木栓则由“跳一跳”(我们将称之为二木栓软件包，见图 8(b))动作来传递. 伴随着六本栓清除剂的，通常是一个二木栓软件包以传递第一只木栓，另外还得有一个四木栓软件包(见图 8(d))以传递第二只木栓.

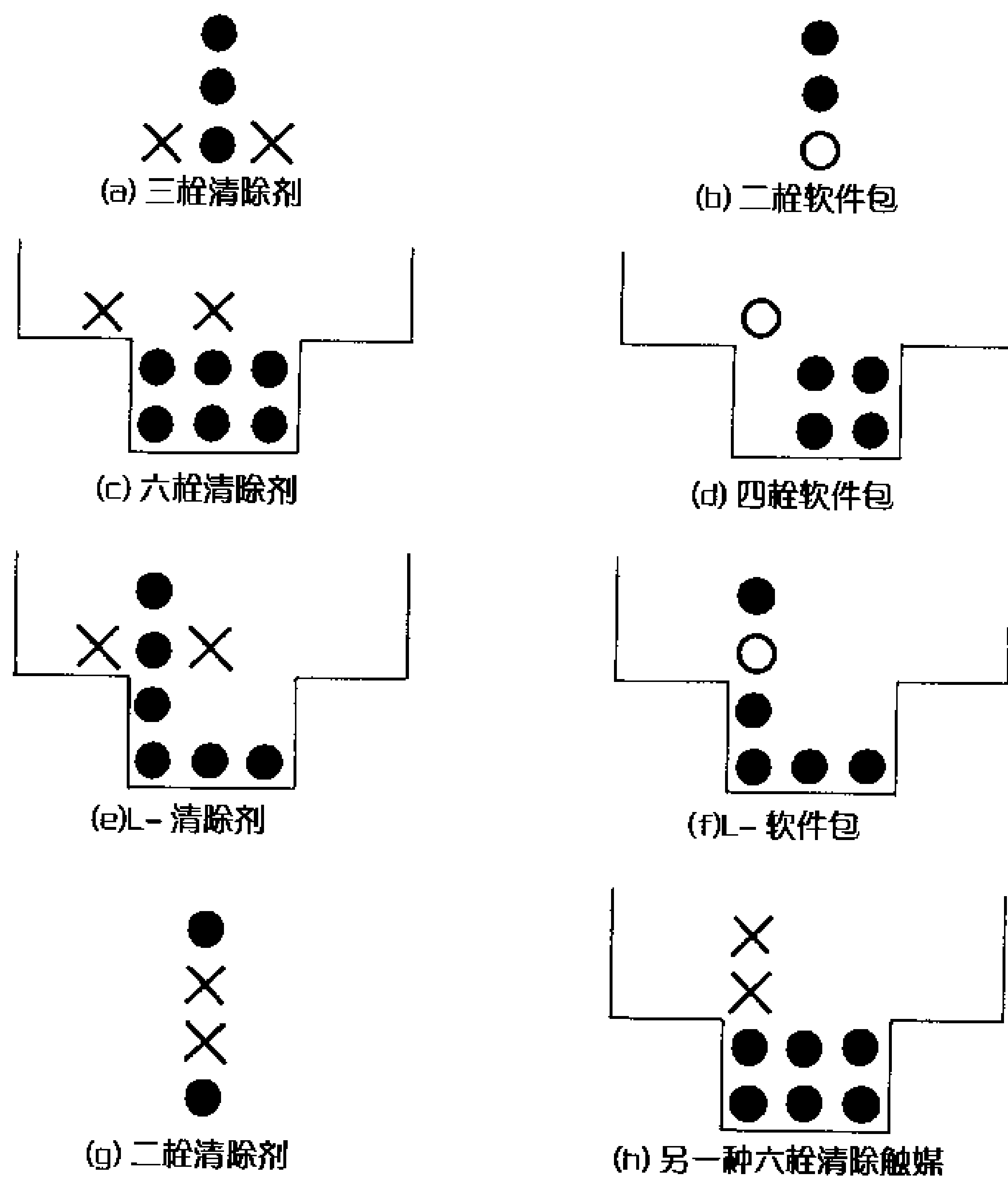


图 8. 一批软件包.

L-清除剂(见图 8(e))及 L-软件包(见图 8(f))确实很有用. L-清除剂的第一栓业已到位，而 L-软件包则提供了第二个. L-软件包的前两步动作形成了一个二栓清除剂(见图 8(g))，它也可用于其他场合. 二栓清除剂的触媒是以非正统方式复原的，图 8(h)中另一种六栓清除剂的触媒亦与之类似.

软件包提供了包医百病的万应灵药

买咱们软件包的人可以洋洋得意地解决一大批问题. 在图 9 中我们就能看出解决中心木栓难题的一种解法,它含有两个三栓清除剂(1 与 2),随后便是三个六栓清除剂(3,4,5)与一个 L-清除剂,只剩下最后一步的跳跃尚待作出. 你可自行验证,每一个清除剂都已备齐了所需的触媒.

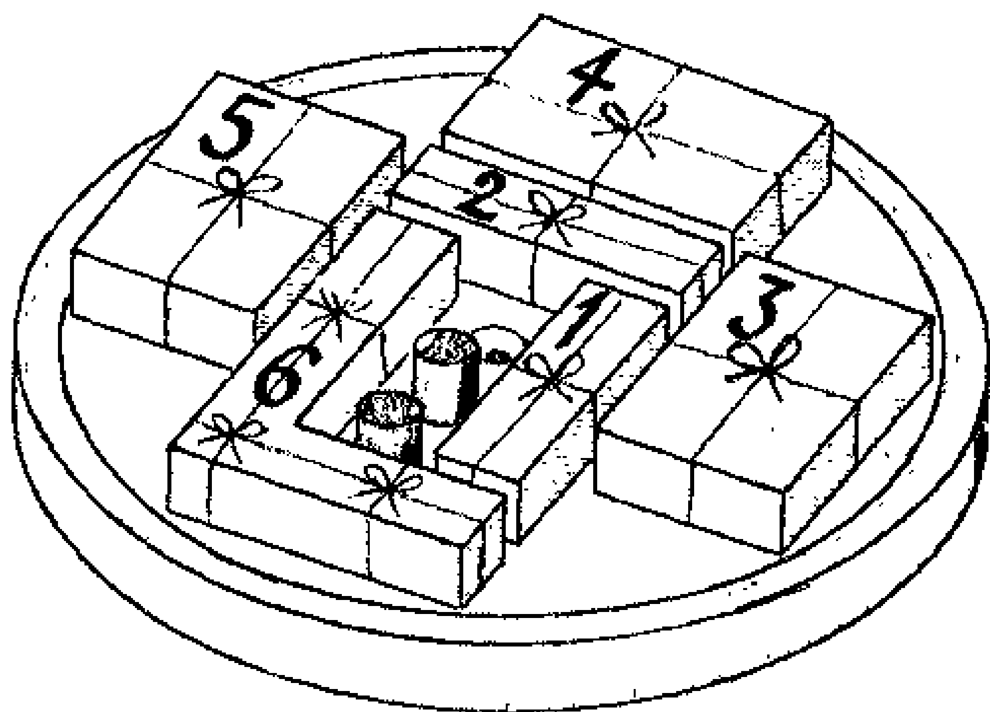


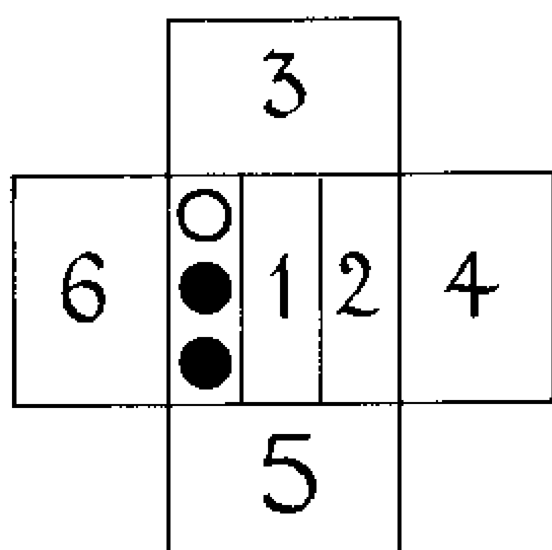
图 9. 中心木栓问题的无痛包扎.

除了中心木栓问题之外,我们可以考虑其他单栓逆转问题:由一空位开始,而以最后在同一地点有一木栓结束. 图 9 与图 10 表明,绝大多数此类问题可用蒙受苦难的炼狱涤罪法* 加以解决,但在图 10(e)中我们从标着箭头(1)的四栓软件包开始,而著名问题(b)则需要更复杂的办法.

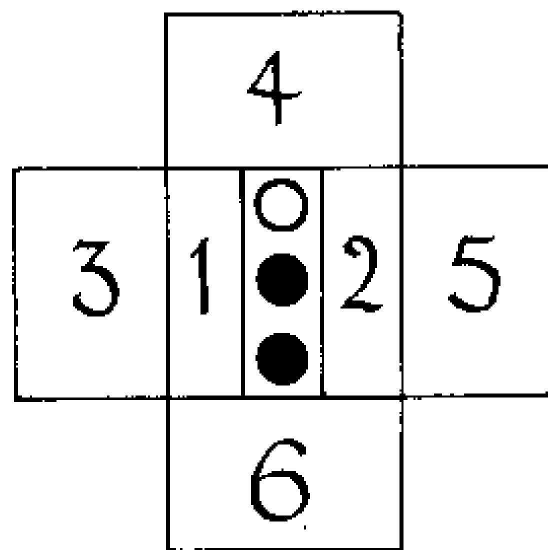
为了弄清楚我们的记法,下面打算较详细地来讲讲(b)的解法. 对第一步跳跃来说,我们别无其他选择,只能从图上打着 1 的地方开始跳起. 从打着 2 记号的第二次跳跃,将能清除出一个空位,它便我们形成了 L-软件包,后者由弯曲箭头(3)来标明. 现在我们对 L-清除剂(4)就有了一个触媒. 而紧随其后的便是从标有 5 的位置的一步单跳. 在此之后的返家途中,我们将有清除剂 6,7,8,而紧随其后的则是来自位置 9 的一个单跳. 如果读者们把这些动作真正地实验一下,她就会发现我们业已建立起一个从标记着 10_5 位置开始的一个引人注目的五步跳法.

---

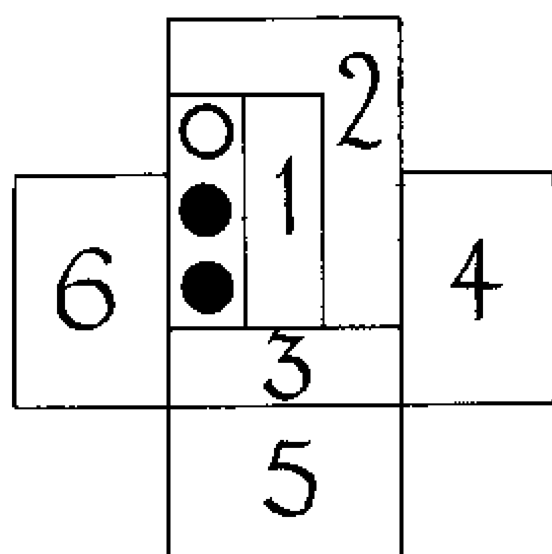
* 译者注:指毫无理论指导,全靠暗中摸索的"苦"法子,像游戏发明人在法国巴士底狱中消磨时间那样.



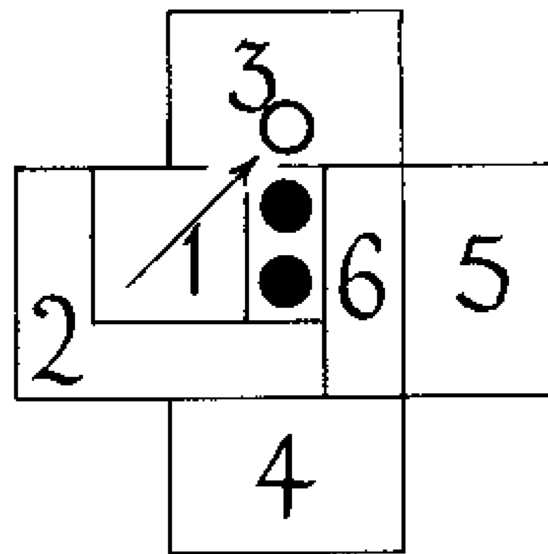
(i)



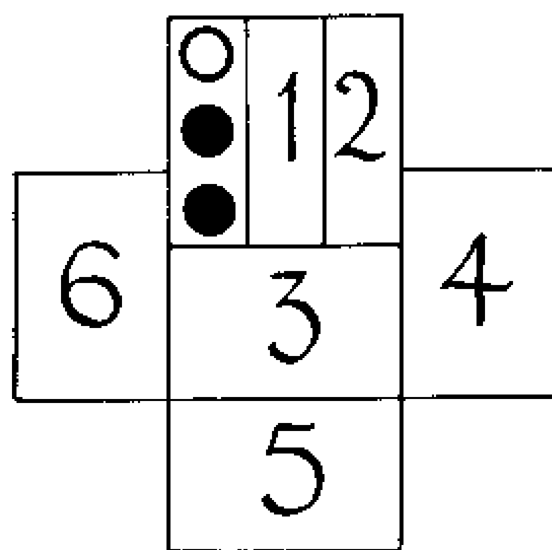
(j)



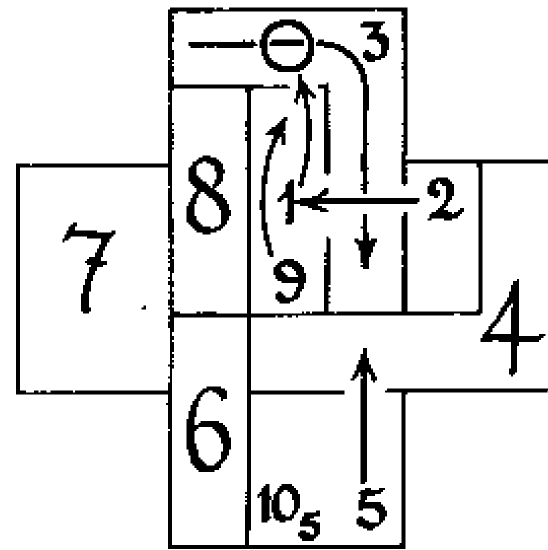
(d)



(e)



(a)



(b)

图 10. 另外六个一栓逆转问题.

读者们也许愿意在某些两栓逆转问题上露一手——从棋盘上的两个空位开始，而以这些位置上安插上两个木栓告终.

两的法则与三的法则

以下是另一种类型的问题(图 11). 开始时，棋盘上有一个空位，我们宣布某一只特定的木栓是**最后一只**(棋盘上仅存之木栓). 图中，开始时的空位在位置 d，而我们希望开始时在 b 处的木栓是最后一只. 试问，它最后将落在何处?

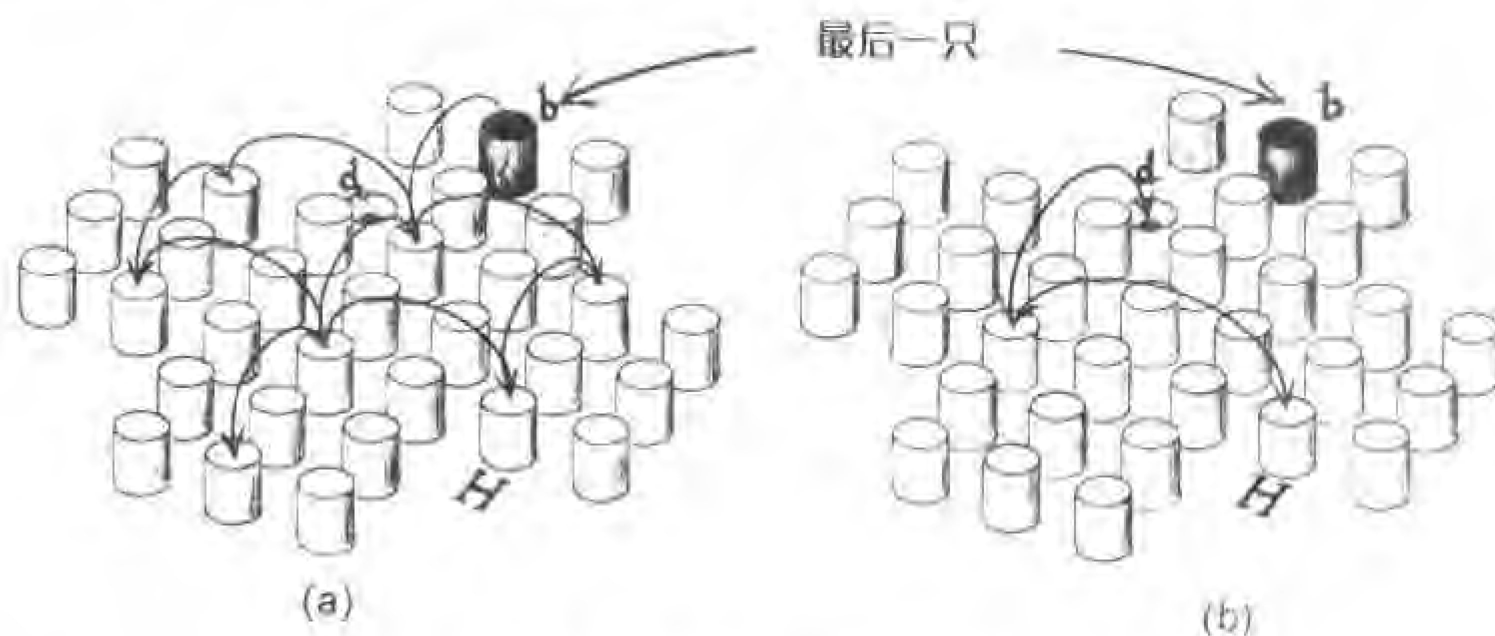


图 11. 求出最后一只落在何处.

存在着一个很明显的**两的法则**——不论什么方向，木栓只能跳跃偶数个位置，如图 11(a)的箭头所示. 但是，还存在着一个有趣得多的**三的法则**. 作为其后果之一，如果我们从英国式棋盘上的一个空位开始，而以该位置上有一个木栓结束，则从初始的空位到最后一只的位置，可以按"三"的步子来行动，如图 11(b)所示.

两的法则同三的法则结合起来，可以导出令人惊讶的结果. 试看一看它们所指出唯一的结束位置 H(见图 11(a)与(b)). 既然我们已经知道 H 是两的法则与三的法则同时允许的唯一位置，问题似乎变得容易了一些. 图 12 指明了一个包装得很干净利落的解；我们是怎样发现它的呢?

我们所要做的是设计好三跳动作 9_3，它将使最后一只到位，而我们的第二个跳跃将为此清出一个空位. 但在我们作了这步第二跳跃之后，绝大多数木栓都已自然地捆扎打包. 唯一明显的例外是开始时正好在最后一只木栓右边的木栓，而清除它的最好办法看来是把它用在动作 8_2 之中以提供最后的一跳.

读者们也许愿意在某些两栓逆转问题上露一手——从棋盘上的两个空位开始，而以这些位置上安插上两个木栓告终.

两的法则与三的法则

以下是另一种类型的问题(图11). 开始时，棋盘上有一个空位，我们宣布某一只特定的木栓是**最后一只**(棋盘上仅存之木栓). 图中，开始时的空位在位置 d，而我们希望开始时在 b 处的木栓是最后一只. 试问：它最后将落在何处?

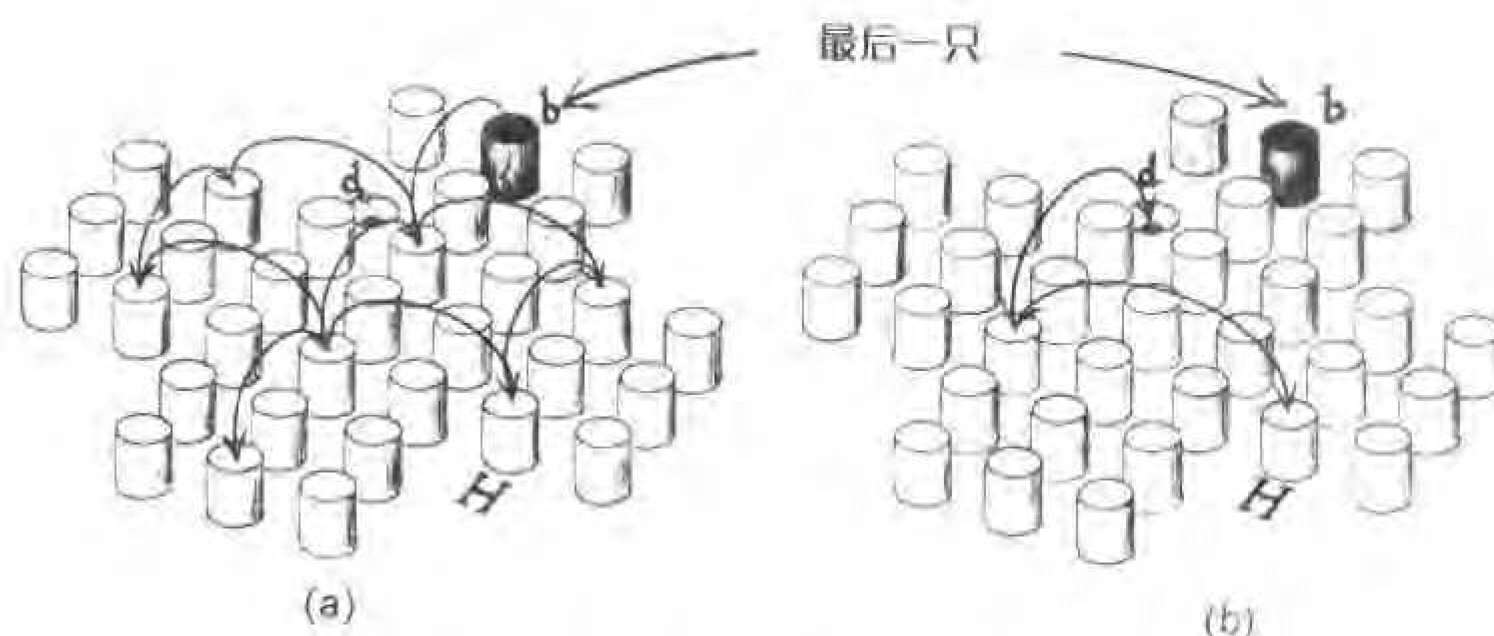


图 11. 求出最后一只落在何处.

存在着一个很明显的**两的法则**——不论什么方向，木栓只能跳跃偶数个位置，如图11(a)的箭头所示. 但是，还存在着一个有趣得多的**三的法则**. 作为其后果之一，如果我们从英国式棋盘上的一个空位开始，而以该位置上有一个木栓结束，则从初始的空位到最后一只的位置，可以按"三"的步子来行动，如图11(b)所示.

两的法则同三的法则结合起来，可以导出令人惊讶的结果. 试看一看它们所指出唯一的结束位置 H(见图11(a)与(b)). 既然我们已经知道 H 是两的法则与三的法则同时允许的唯一位置，问题似乎变得容易了一些. 图12指明了一个包装得很干净利落的解；我们是怎样发现它的呢?

我们所要做的是设计好三跳动作 9_3，它将使最后一只到位，而我们的第二个跳跃将为此清出一个空位. 但在我们作了这步第二跳跃之后，绝大多数木栓都已自然地捆扎打包. 唯一明显的例外是开始时正好在最后一只木栓右边的木栓，而清除它的最好办法看来是把它用在动作 8_2 之中以提供最后的一跳.

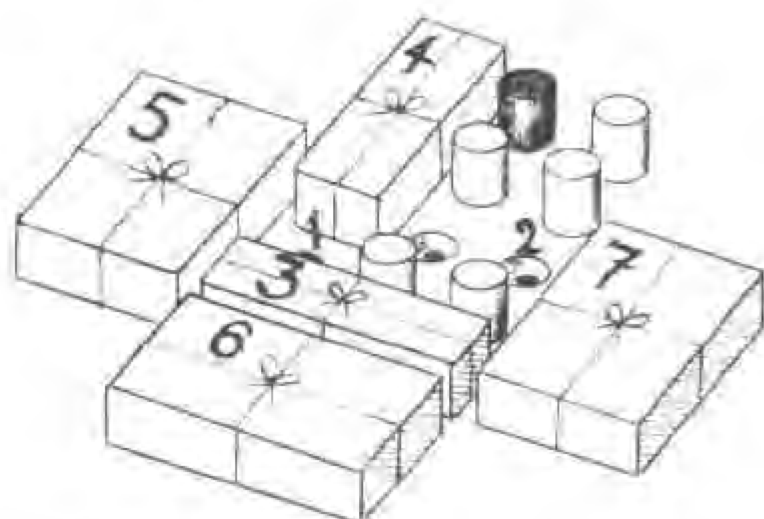


图 12(a)．最先两步动作之后的局势．



图 12(b)．最后两步动作之前的局势．

对于其他问题，我们将向心平气和的读者推荐一种类似的办法．为你的解法设计好最后的几步动作，而让前面的一些动作为它们清扫道路，剩下的一些木栓要留在整洁的软件包里．必须记住，最后清除剂中所需的触媒必须在你设计好的最后几只木栓中．

这里有一个已为你设计好的最后一个木栓问题．假定最初的空洞是在位置 B 处，而最后留下来的木栓是开始时在 I 的那一只，你有没有办法使它最后留下来？

有一些木栓比别的木栓更为"等同"

我们怎样来解释**三的法则**？最好的办法是引入这种单人游戏的"乘法"概念．在图 13(a)中，两只相邻的木栓 s 与 t 显然能被 r 处的一只木栓彻底取代，于是我们就记为

$$st=r.$$

但图 13(b)表明，我们也可以记作

$$st=u.$$

但欧几里得教导我们，等于同量的量必须相等，所以我们必须认为 $r=u$.

> 在任意一条直线上，距离为"三"的位置应当视为相等．

让我们看看代数的其他法则会告诉我们什么．在把图 13(b)与图 13(c)结合起来考虑时，我们有

$$st=u, tu=s,$$
$$st^2u=us,$$

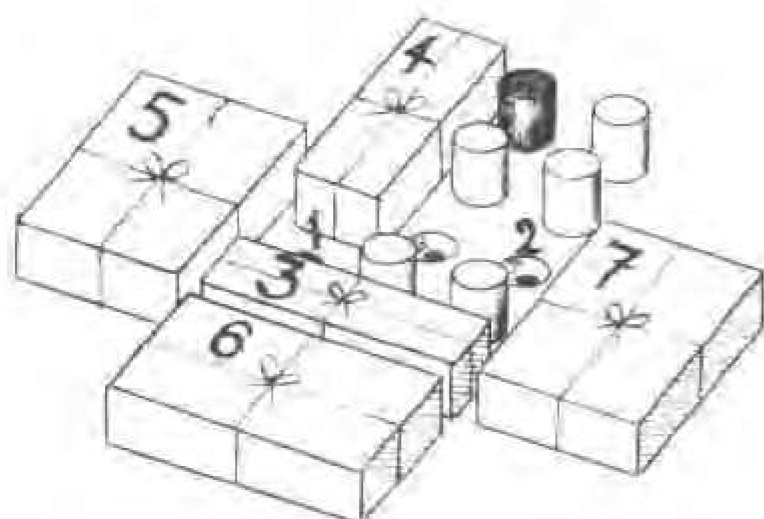


图 12(a)．最先两步动作之后的局势．



图 12(b)．最后两步动作之前的局势．

对于其他问题，我们将向心平气和的读者推荐一种类似的办法．为你的解法设计好最后的几步动作，而让前面的一些动作为它们清扫道路，剩下的一些木栓要留在整洁的软件包里．必须记住，最后清除剂中所需的触媒必须在你设计好的最后几只木栓中．

这里有一个已为你设计好的最后一个木栓问题．假定最初的空洞是在位置 B 处，而最后留下来的木栓是开始时在 J 的那一只，你有没有办法使它最后留下来？

有一些木栓比别的木栓更为"等同"

我们怎样来解释**三的法则**？最好的办法是引入这种单人游戏的"乘法"概念．在图 13(a)中，两只相邻的木栓 s 与 t 显然能被 r 处的一只木栓彻底取代，于是我们就记为

$$st=r.$$

但图 13(b)表明，我们也可以记作

$$st=u.$$

但欧几里得教导我们，等于同量的量必须相等，所以我们必须认为 $r=u$.

> 在任意一条直线上，距离为"三"的位置应当视为相等．

让我们看看代数的其他法则会告诉我们什么．在把图 13(b)与图 13(c)结合起来考虑时，我们有

$$st=u, tu=s,$$

$$st^2u=us,$$

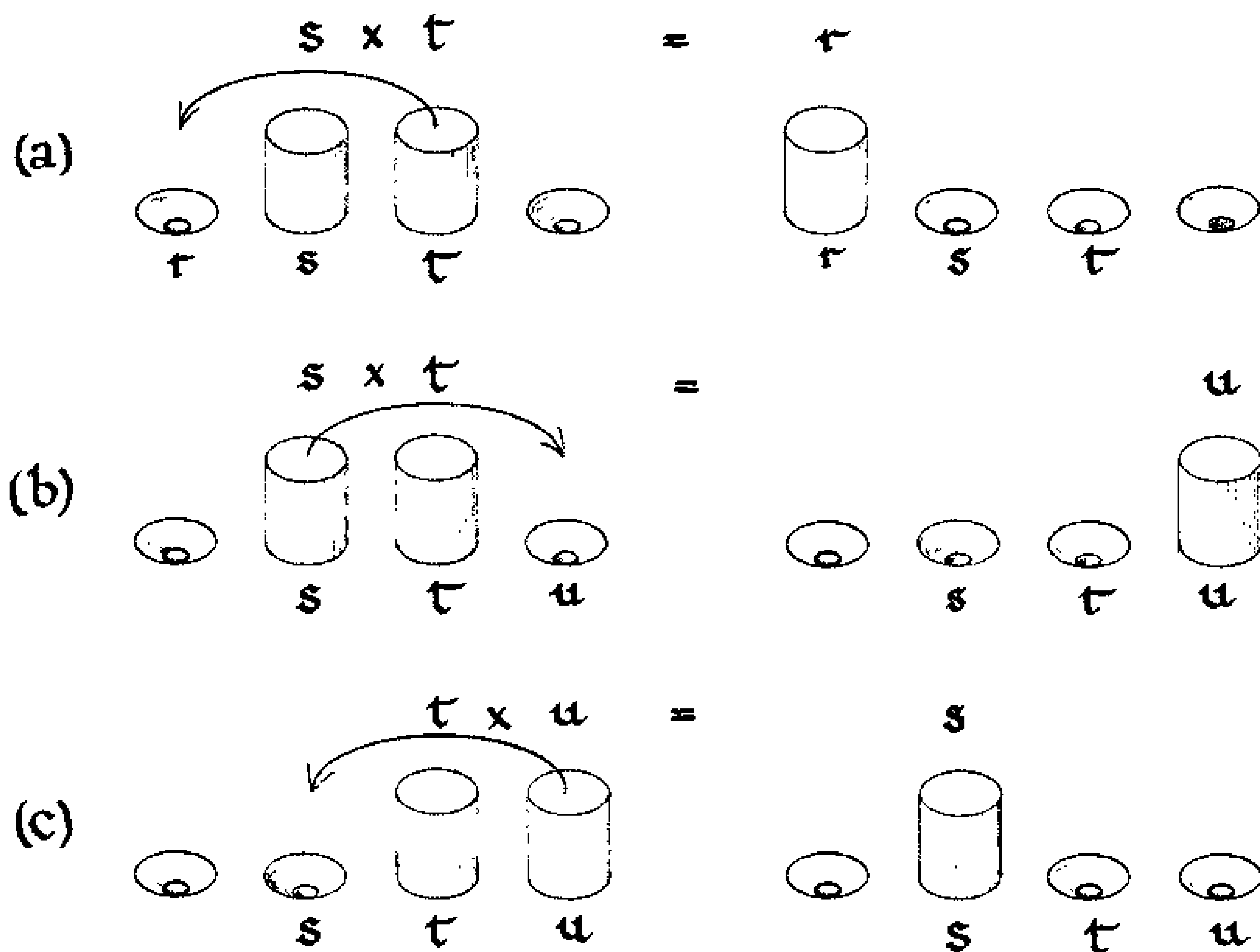


图 13. 木栓的相乘.

消去后即得

$$t^2=1,$$

它好像是在告诉我们

在同一地点的两个木栓互相抵销.

不妨回顾一下，触媒的作用正是如此——由清除剂的其他动作，它们把两个木栓输送到同一地点而予以清除. 实际上，我们的代数可以推出：

能够加以清除的任一木栓集合是互相抵销的.

例如，在图 13(c)中，$tu=s$，从而

$$stu=ss=1.$$

在一直线上的三个相邻木栓是抵销的.	（三栓清除剂）

由于 $r=u$，

$$ru=uu=1.$$

距离等于“三”的两木栓互相抵销.	（二栓清除剂）

但在代数中，还有一些较为不明显的等式：例如，由于 $s^2=1=rst$，我们得出

$$s=rt.$$

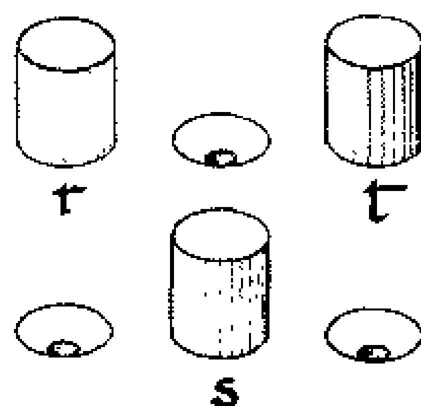


图 14. $s=rt$.

黎斯的 16 种独粒钻石局势分类

现在我们已经说得很多，下面就可以看看，我们的代数怎样把独粒钻石棋盘大大压缩. 由于相距为 3 的位置在代数上是等价的，所以棋盘上的任一位置都将等价于棋盘中心九个位置之一（见图 15），例如 $a=p$. 现在我们可以利用上节中所得的一些规则，把这九个位置中的任一个用角上的四个位置 i,k,I,K 表达出来：

$$j=ik \quad P=Ik$$

$$p=iK \quad J=IK$$

$$x=jJ=ikIK.$$

由于相等的木栓相互抵销，

> 任一独粒钻石局势在代数上等价于 i、k、I、K 的十六种组合之一.

16 个黎斯分类

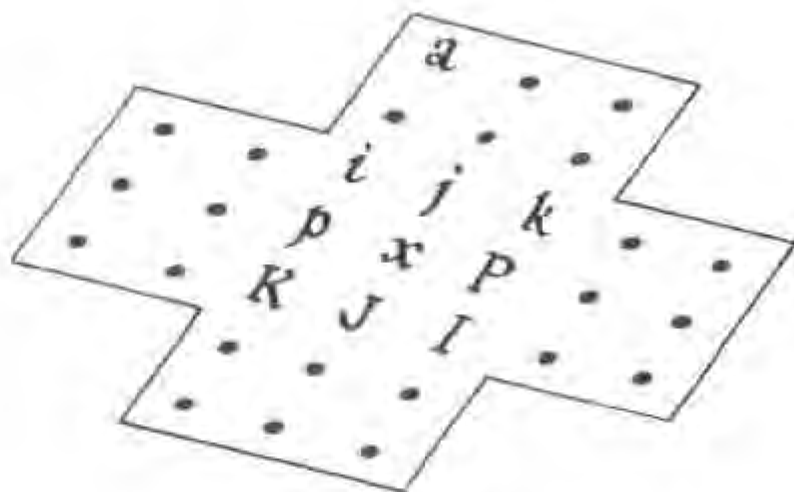


图 15. 剥剩后的要素.

图 16(a)的局势是在一列南斯拉夫火车上发现的,没人特别留意.当然,在那里不会有蒙上薄膜的包裹,注上什么字母——那是我们的慧眼洞察出来的,因为我们认为有这种可能性,可以把整个局势简化到一根木栓.试问:它究竟是哪一根呢?

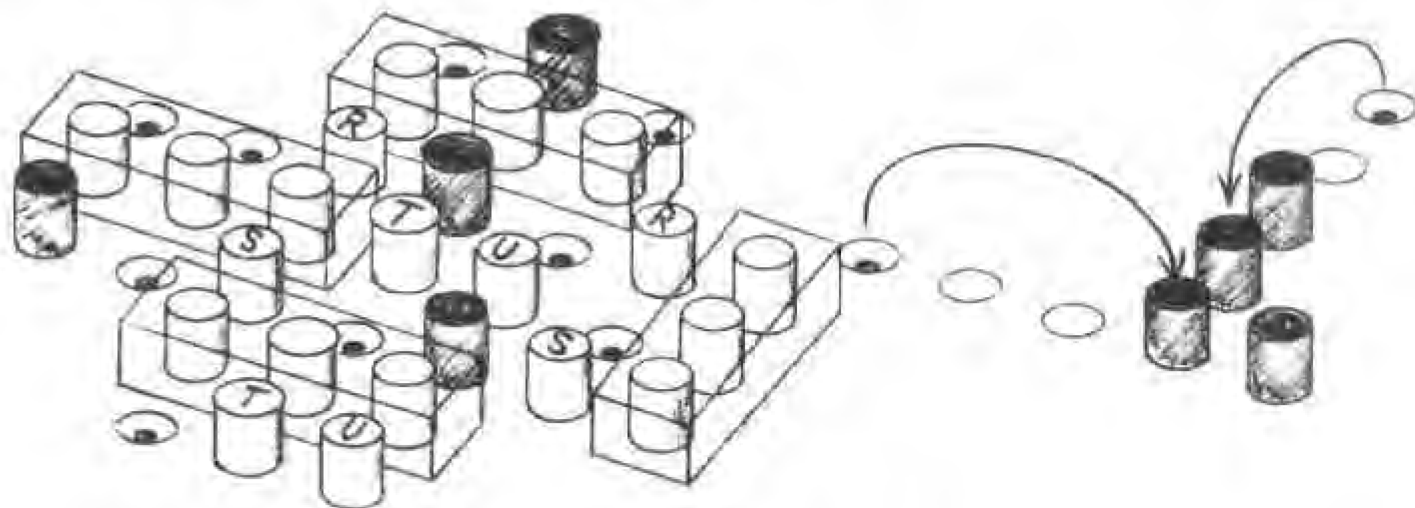


图 16(a). 分割后发现了什么?　　**图 16(b).** 可以化约到如此大小.

我们的法则使我们得以勾销由三根木栓所构成的四只包裹,以及四对木栓 RR、SS、TT、UU,于是整个局势在代数上相当于图上四个打着阴影记号的木栓.然后我们移动三个空位中的两个,像图 16(b)那样消除另一个三栓软件包,使局势相当于在 I 处的一个单一木栓.据此可知,

> 任一独粒钻石局势在代数上等价于 i，k，I，K 的十六种组合之一。

16 个黎斯分类

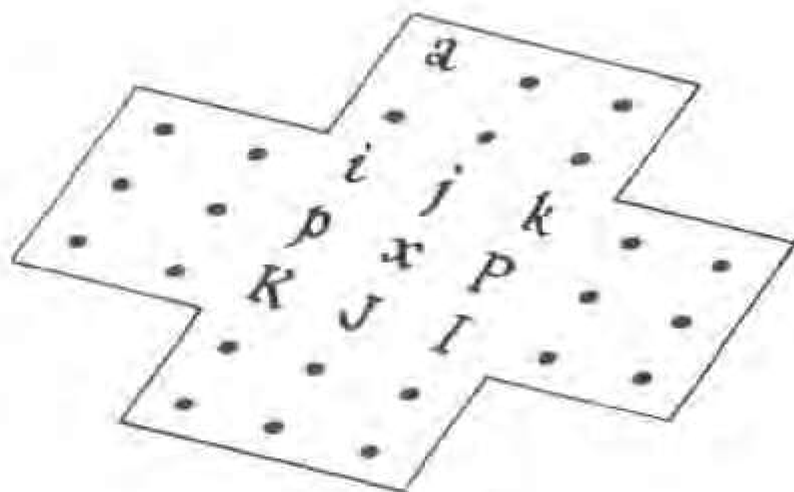


图 15. 剥剩后的要素.

图 16(a)的局势是在一列南斯拉夫火车上发现的，没人特别留意. 当然，在那里不会有蒙上薄膜的包裹，注上什么字母——那是我们的慧眼洞察出来的，因为我们认为有这种可能性，可以把整个局势简化到一根木栓. 试问：它究竟是哪一根呢？

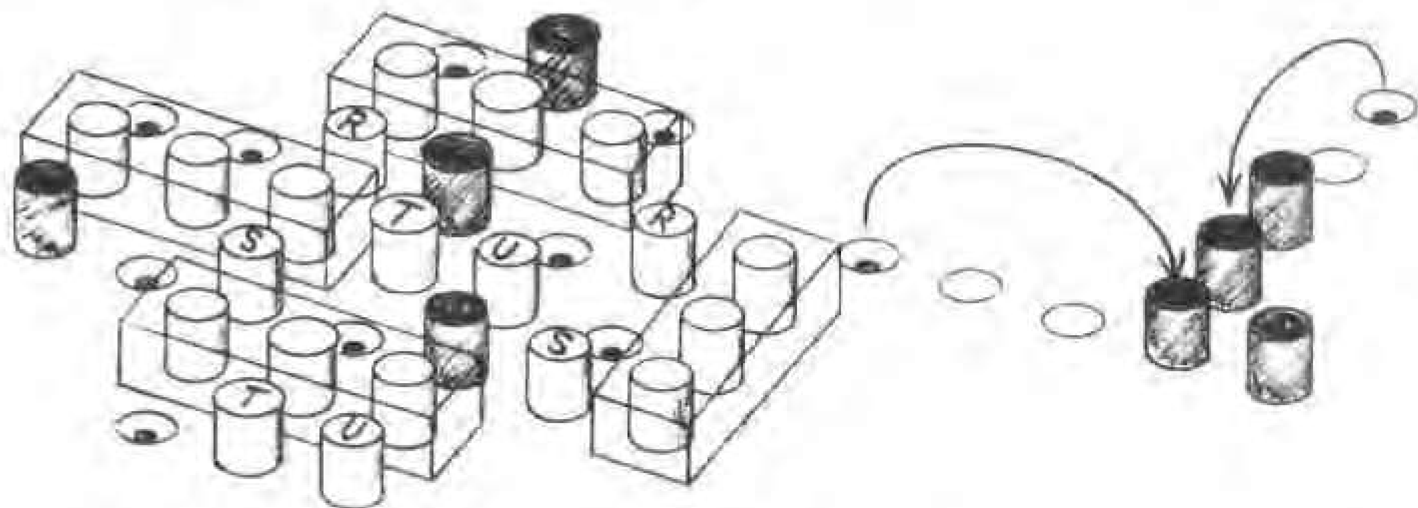


图 16(a). 分割后发现了什么？　　**图 16(b).** 可以化约到如此大小.

我们的法则使我们得以勾销由三根木栓所构成的四只包裹，以及四对木栓 RR，SS，TT，UU，于是整个局势在代数上相当于图上四个打着阴影记号的木栓. 然后我们移动三个空位中的两个，像图 16(b)那样消除另一个三栓软件包，使局势相当于在 I 处的一个单一木栓. 据此可知，

三的法则告诉我们，最后剩下的必然是在 I，L 或 f*. 你看，究竟哪一个是解呢?

我们怎么知道黎斯的 16 个分类的确是不同的? 咱们的代数法则会不会蕴涵着某种可能性，譬如说，$i=kK$ 呢? 不，那是不会的! 考虑图 17(i)上所显示的数±1. 当这些数中的三个

$$r,s,t$$

位于相邻的一直线上时，我们确有

$$rs=t,$$

由此我们能看到我们所有的代数规则对这些数都满足. 但在此系统中我们有着

$$i=-1, k=K=+1,$$

所以我们不能证明 $i=kK$! 事实上图 17(i,k,I,K)表明，木栓 i,k,I,K 的全部 16 个组合在代数上都是不一样的：例如，若 i 包含在组合里头时，图 17(i)的值为−1. 在独粒钻石游戏中任意行走一步，或者运用任意一条代数法则决不会改变以下四个附图中任何一个图的值.

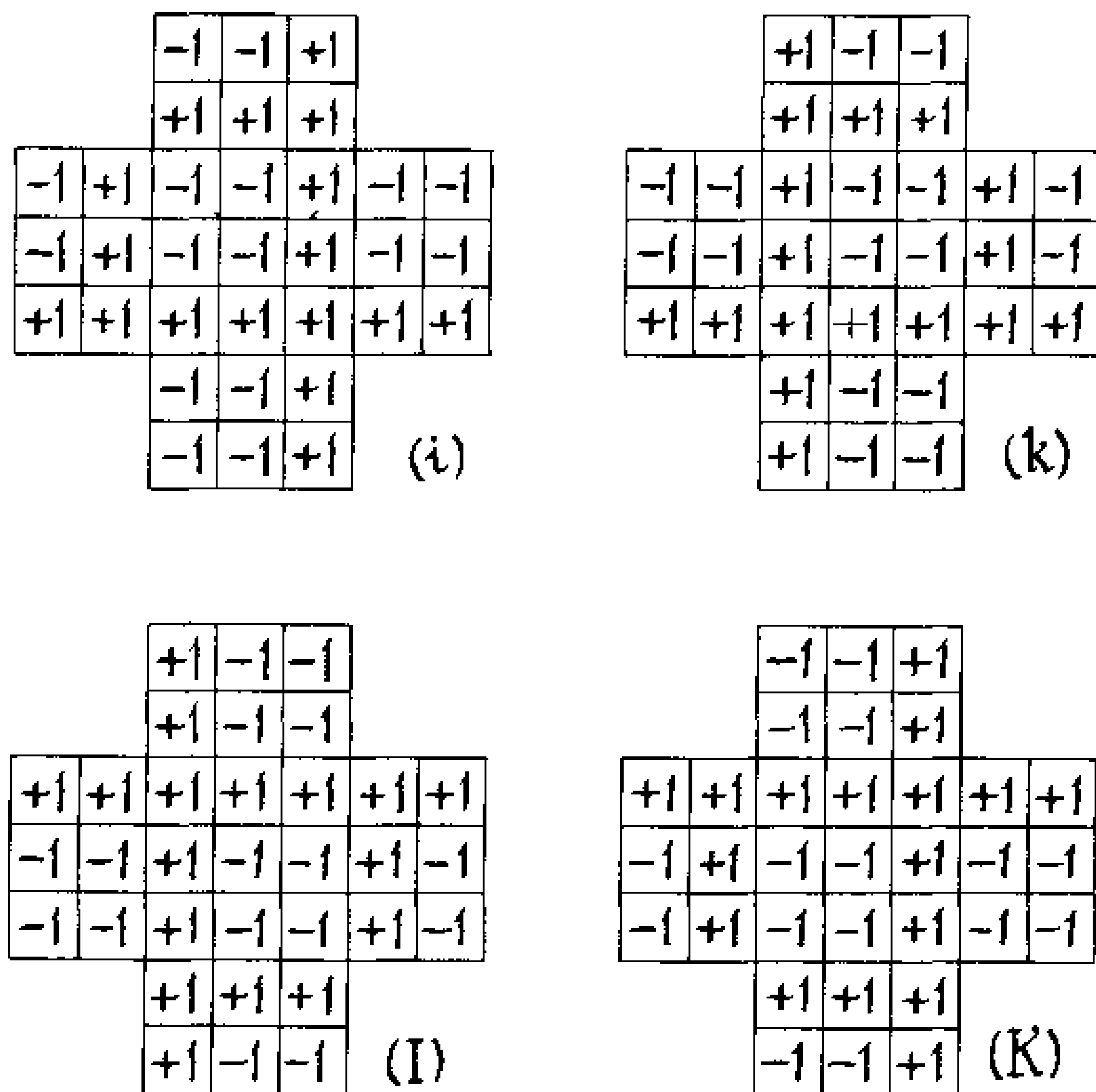


图 17. 代数的"答案".

* 译者注：图上的阴影看不清楚，请读者参看本章的图 5，以确认 I，L，f.

用代数语言来说的话，我们所讲的**三的法则**的第一件事可以重新叙述如下：只有一个空位的局势在代数上等价于**只有**那个位置是填满的局势的**互补**，更一般地有，

> 英国式棋盘上的任一局势在代数上等价于一个互补局势，后者的空位是前者的木栓，而其木栓则取代了前者的空位.

因为我们的代数法则使我们能求出任一直线上三个相邻位置的互补局势，而整个棋盘可以进行这样的三栓打包.

大陆式棋盘

但是，在**大陆式**棋盘上，上述性质不能成立. 所谓大陆式棋盘，要在图 5 的棋盘上另外再添加四个额外的洞孔 y,z,Y,Z. 在这种棋盘上，逆转问题是不可能的. 究竟什么样的问题在此种棋盘上得以实现，即开始时有一个洞孔，而最后插上一个木栓？请参看本章增补材料.

向后玩与向前玩

> "独粒钻石游戏令我深感兴趣，我把它倒过来玩，同通常的游戏规则不一样(跳进一个空位，而把被跳过的木栓移出棋盘)，我认为把已经破坏的构形恢复重建会更好一点，于是我把被跳过去的空位重新填满."
>
> ——莱布尼兹

那位著名的哲学家直率地认为，倒过来玩独粒钻石棋同向前去玩它是不一样的，但他错了，两者实际上是同一游戏. 让我们来仔细看看，这倒底是怎么一回事. 当他从图 18(a)到 18(c)作出向后跳跃动作时，莱布尼兹认为他是在把木栓 t 跳进空洞 r 里，而把他跳过的洞孔 s 重新填满，但图 18(b)表明，我们也可以认为他是在把 r 处的洞孔跳过洞孔 s 而到达 t 处的木栓，而把他跳过的洞孔从棋盘上除去. (当然，拿走洞孔意味着他放进木栓！)

> 正向与反向独粒钻石棋，实际上完全一样，仅仅是交换了"空"与"满"的概念.

时间反演＝反物质？

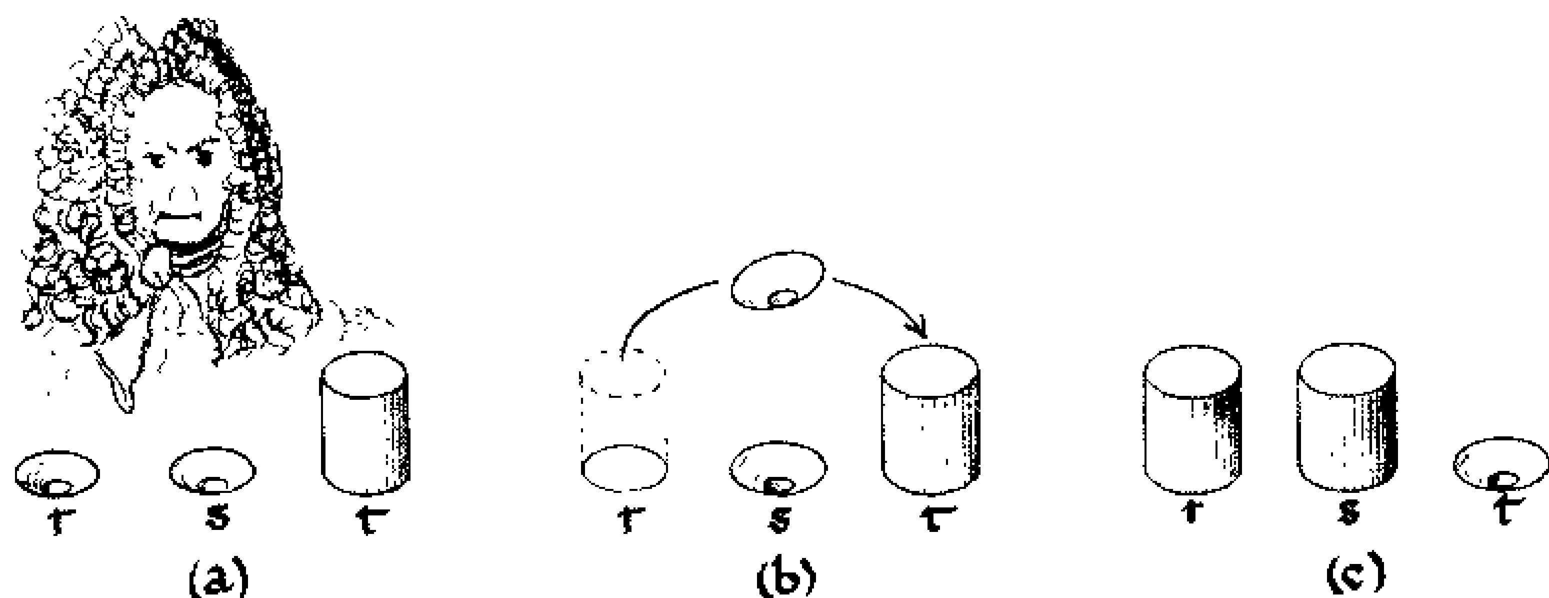


图 18. 莱布尼兹的哲学.

此事实既有趣又有用. 一个颇为令人惊讶的结局出现在贝斯莱的 16 步 i-逆转问题的解法之中:

$$apc_2F_2gdM_2IAP\downarrow f\downarrow C_3Gm\cdots$$

在 16 步动作中,走了 14 步之后,盘面上看上去还是满满的(见图 19(a)),但只要再走两步,就可以把盘面清得只剩下一根木栓了.(你能找到它们吗?)

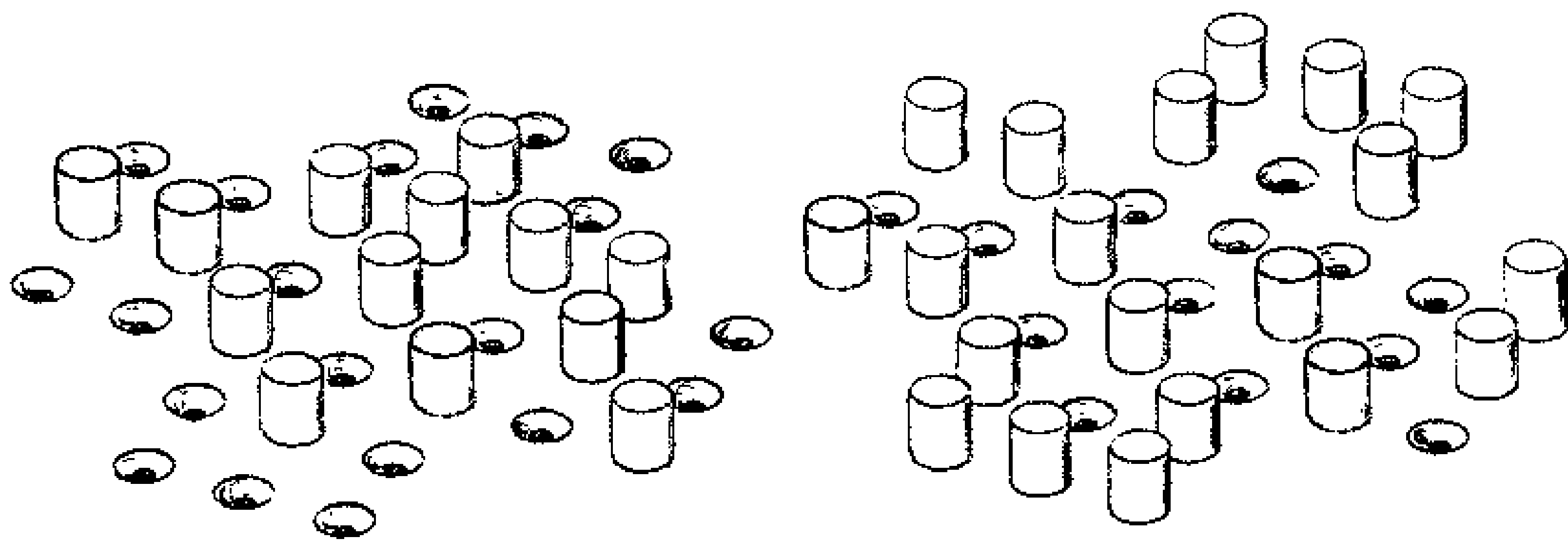


图 19. 请再走两步! ……怎样回头走?

你怎样才能找到导致这一局势的跳法? 时间反演的戏法将使它变得简易一些. 不是把图 19(a)的局势清除得只剩下一个 i 处的空位,而是试图把它的互补局势(见图 19(b))加以简化,使之只剩下一个在 i 处的木栓. 如果你一直是在勤勤恳恳地做你的家庭作业,不断地操练的话,你将会发现,要想办到这一点并不太难. 通过时间反演技巧,你也一定能够解决不少神奇的独粒钻石游戏中最后一只木栓的结局问题而使你的朋友们大为惊奇.

宝塔函数

如果我们允许你逆着时间箭头行走(像莱布尼兹那样),又能像通常一样顺着向前行走,那么黎斯的代数理论(许多人都知道这一理论)统统能够适用. 当然这有助于你收回你的笨拙走法,但也有可能把你还未曾实施的走法“取消”了! 如果两个局势分别属于不同的黎斯分类, 那

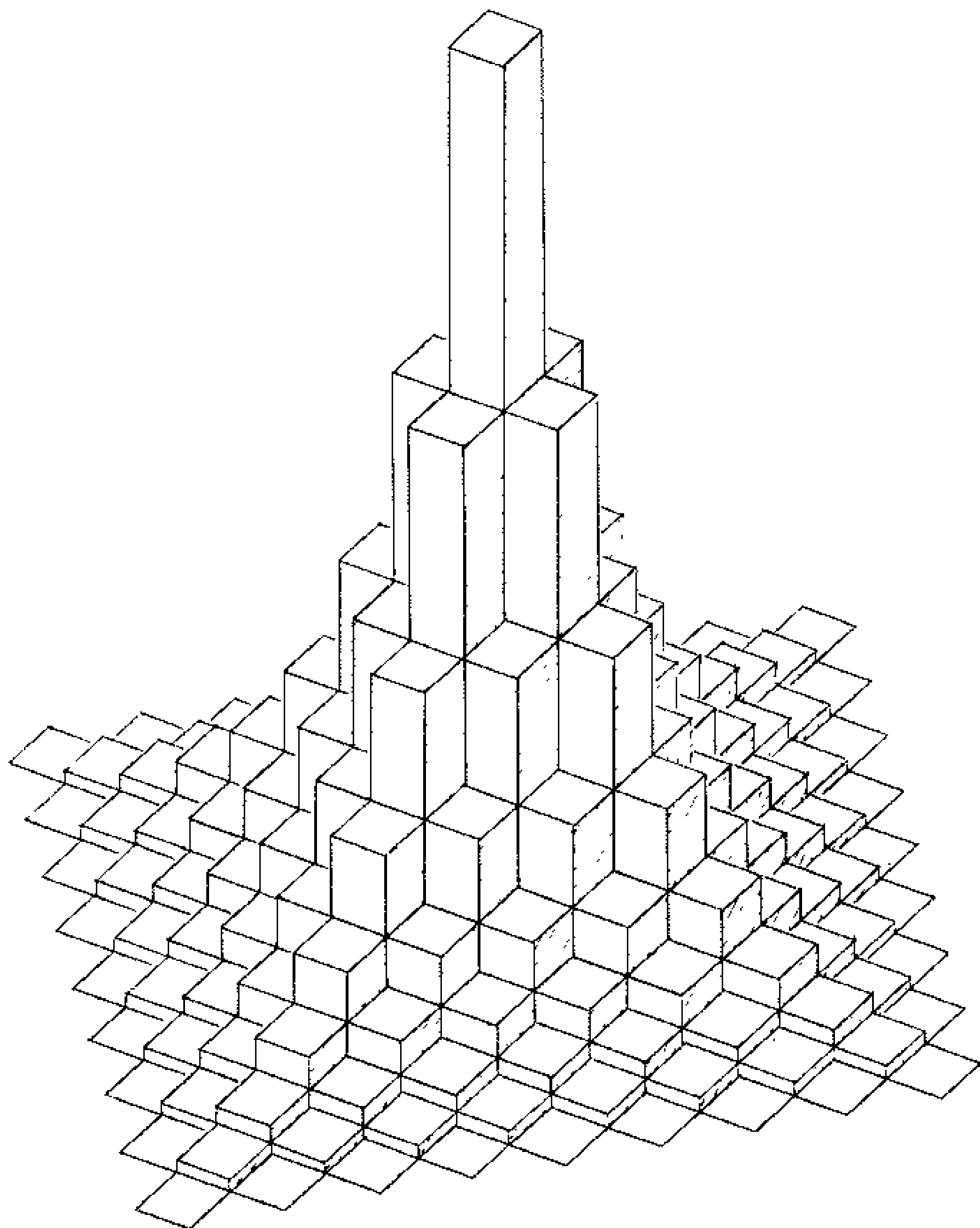


图 20. 黄金宝塔.

么我们不能通过正常走法，或者莱布尼兹的倒走法，或者这两者的任何混合物，从其中的一个局势走到另一个局势.

不幸的是，这当然意味着黎斯学说决不能告诉你是不是走了笨拙的一步. 这是因为黎斯分类是不会改变的. 你需要某种**宝塔函数**之类的东西（知道它的人寥寥无几），当你走出一步时它是会改变的（尽管它限制得很严），西我们马上就要告诉你这种函数. 迈克・波特曼（Mikc Boardman）是帮助我们发展这种理论的许多学者之一.

你的朋友们现在将从商店里把独粒钻石棋买回来了，为什么不把一些无害的问题提交给他们呢？由于这些是逆转问题，即使他们勤勉地学到最后一节，你的朋友们也未必能够证明它们的不可能性.

这两个问题已在图 21(a)与 21(b)中给出，其中的圆圈表示原来只有这些地方是空的，西最后又只有这些地方需要填满. 图 21(c)与(d)给出两个宝塔函数，以证明问题是不可能的. 一般地说，若 pag 是任一宝塔函数，X 是任一独粒钻石局势，我们将用

$$\text{pag } X$$

来表示一些数目之和，其中的 pag 是针对 X 中所有的木栓西取的. 如果 X 可以继续分为较小一

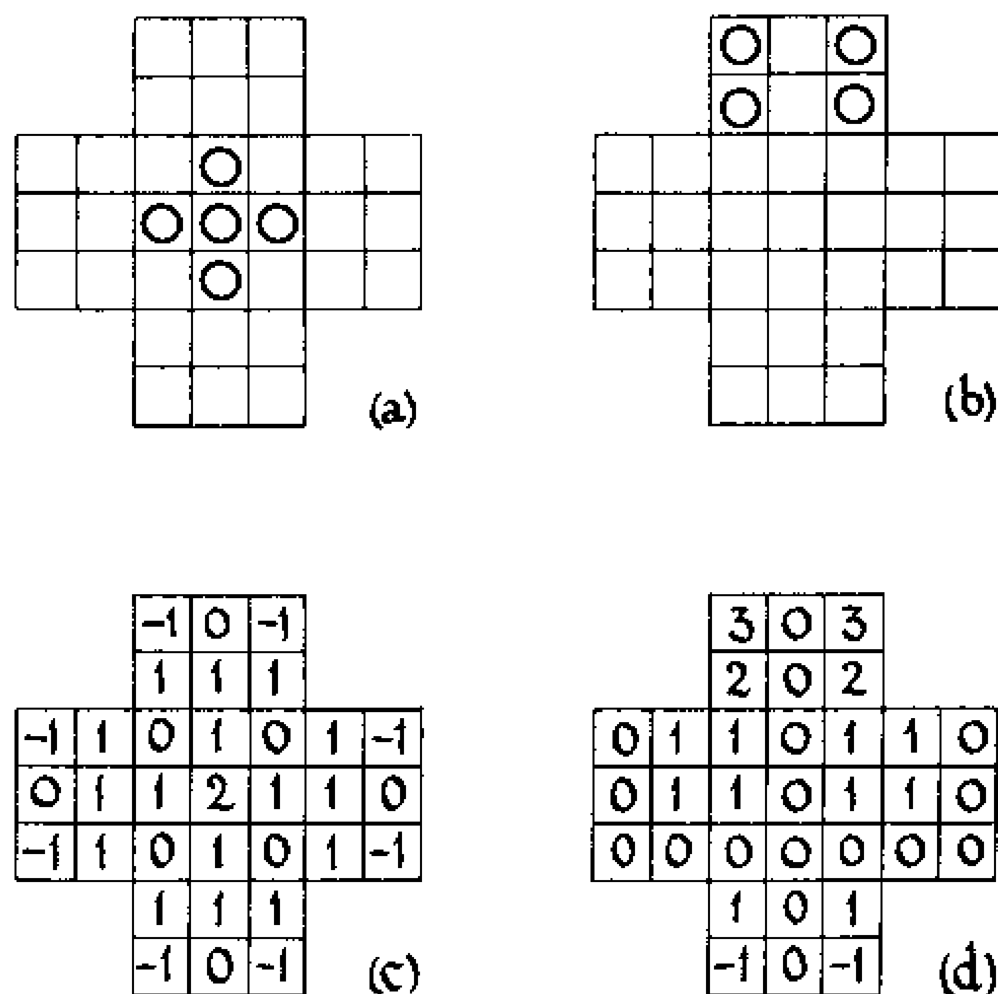


图 21. 两个不可能的逆问题.

些的局势 Y 与 Z,则通过我们的代数记号表达时将有

$$X=YZ \text{ 以及 } \mathrm{pag}\ X=\mathrm{pag}\ Y+\mathrm{pag}\ Z.$$

由此可见,宝塔函数的性态很像普通的对数函数.

定义宝塔函数的主要性质是:**任何一种走法都不能使值增大**. 为了校验这一条件你必须确信

宝塔函数条件

$$\mathrm{pag}\ r+\mathrm{pag}\ s\geqslant \mathrm{pag}\ t$$

对一切从 r 越过 s 跳到 t 的所有可以想得到的独粒钻石跳法全都得到满足.

现在,请对图 21(c)与 21(d)检验这一条件!

你在进行核查之后,就会看到上面两个问题的不可能性. 这是由于原始图形为 21(a)的宝塔函数(见图 21(c))4,是决不能增加到 6 的(最后局势的宝塔函数);与此相似,8 也决不能增加到 10(图 21(b)及(c)).

在图 22 中我们给出了一些你会觉得有用的宝塔函数;最好你能逐个检验一下宝塔函数条件. 在空位处的值为 0,你可以作出图上所指的任意对换. 图 22(c),(d),(h)及(v)显然是宝塔函

图 22. 某些有用的宝塔函数.

数，因为它们正好指明了一个木栓所能到达的一切地点. 图 22(c)的 12 个位置叫做**角隅**，而 22(d)的 5 个位置叫做**渡渡鸟***，因为你们最容易犯的一个错误就是当你最后要有一个木栓留下时，你们会听任其他的渡渡鸟灭绝. 图 22(a)与 22(b)中一些额外的一1 将使用 22(a)与(b)比(h)与(v)更加有用得多.

一将功成万骨枯

开始时有一些独粒钻石的棋子位于一条直线的一侧，在此直线的另一侧则是无限广阔的沙漠不毛之地，其中没有棋子，全是空位(见图 23). 如果我们想把一名侦察兵送到沙漠中去，使他跨出 0,1,2,3,4,5 步，试问，我们需要多少枚棋子才能做到这一点？

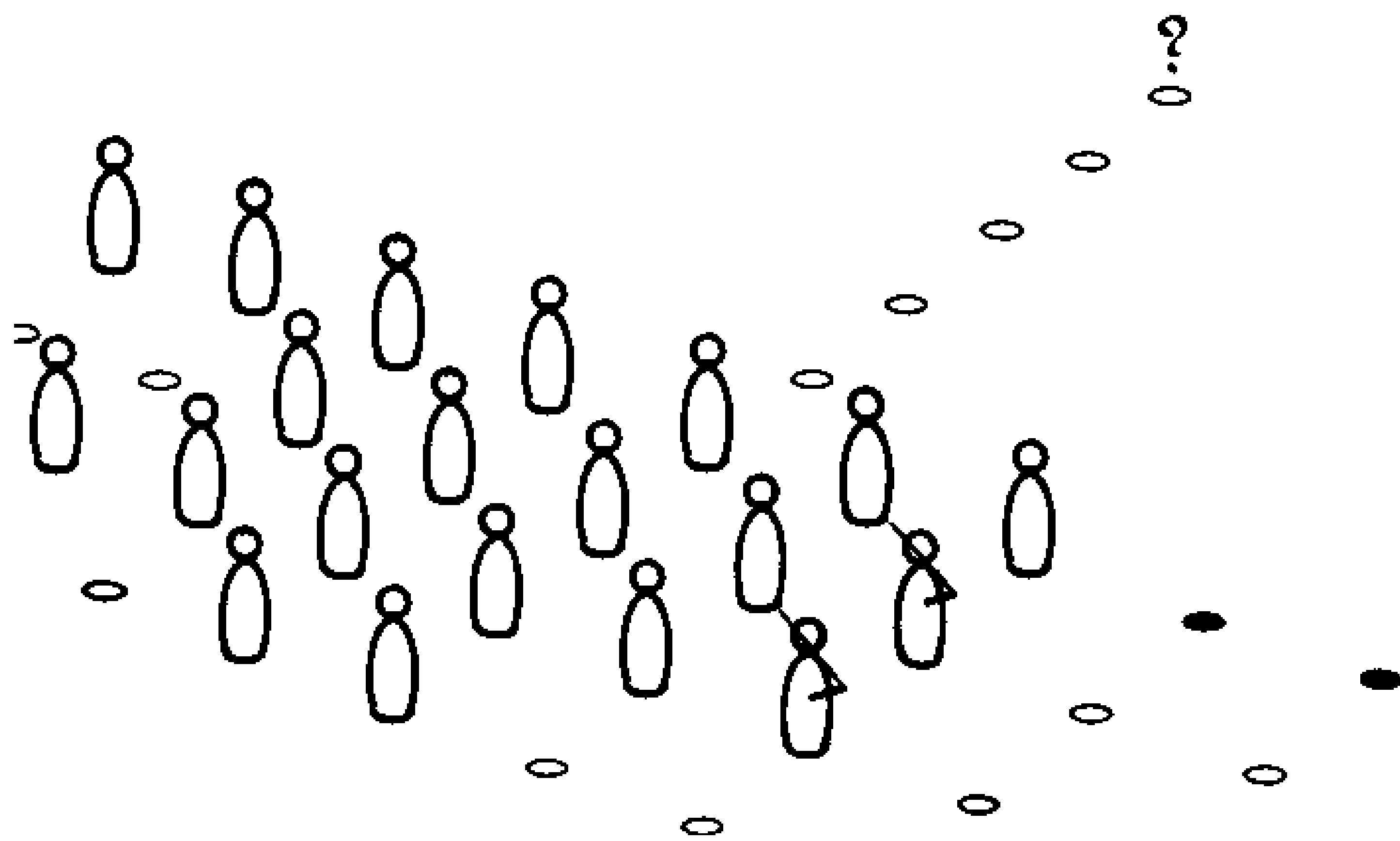


图 23. 怎样送出一名搜集情报的侦察兵?

不难看出，使侦察兵跨出 0,1,2,3 步的棋子数是 1,2,4,8，于是你将会猜想，下面两个答案可能是 16 与 32. 但事实上，要想跨出去 4 步，应不少于 20 枚棋子. 你能不能找出这 20 个人的可能布阵呢?（请参看本章增补材料.）

---

* 译者注：渡渡鸟是原产于毛里求斯，现已绝种的鸟. 后转义为糊涂虫或不能单独飞行的航校学员. 此处的意思为火候不到、技术不精的独粒钻石玩家.

若想跨出 5 步，则答案甚至更为惊人——想使一名侦察兵深入沙漠五步之遥是根本办不到的，不管我们的雇佣军何等庞大！证明这一事实的宝塔函数见图 24 所示．正是这种函数的图像（请对照图 20)，向人们提示了“宝塔”的名称．图中的 σ 为黄金分割比所定义的无理数：

$$\sigma=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\doteq 0.618\cdots,$$

$$\sigma^2+\sigma=1.$$

					1					
					σ					
					σ^2					
				σ^4	σ^3	σ^4				
			σ^6	σ^5	σ^4	σ^5	σ^6			
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}
…	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	…
	…	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	…	
		…	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	…		
					……					
					……					
σ^{n+5}	σ^{n+4}	σ^{n+3}	σ^{n+2}	σ^{n+1}	σ^n	σ^{n+1}	σ^{n+2}	σ^{n+3}	σ^{n+4}	σ^{n+5}
……										

图 24. 一支独粒钻石大军的宝塔函数.

通过一些简单的数学计算可以得出

$$\sigma^n+\sigma^{n+1}+\sigma^{n+2}+\cdots=\frac{\sigma^n}{1-\sigma}=\sigma^{n-2},$$

从而，中项元素为 σ^n 的这一行的总分为

$$\sigma^{n-2}+\sigma^{(n+1)-2}=\sigma^{n-3},$$

而这一行及一切较低各行的总分为

$$\frac{\sigma^{n-3}}{1-\sigma}=\sigma^{n-5}.$$

特别，在 σ^5 这一行以及一切较低各行上的人数总和正好等于 1，因此，不可能有一支人数为有限数的部队得以送出一名侦察兵使之到达分数为 1 的地点. 不过，若有无限多人的部队可以调遣，那就**差不多够了**，因为只要开始时准许部队中的任何成员可以在他的肩膀上携带其战友，那么不论这个额外之人冲得多远，问题总是能解决的. *

精心运用你的资源

你在宝塔函数上的得分从某种意义上来说是你所有的资源的量度，你是不应该耗用太快的. 但光考虑世俗商品尚嫌不够，必须在你各方面所承担的义务中保持平衡.

图 25 所示的**资产负债表**正是为此而精心设计的. 英国式棋盘的奥妙之处在于：为了维持平衡，总是逼得你消耗资财，正如图中所指出的，由希腊字母 α,β 来表示你在南北与东西方向局势的量度. 拉丁字母 a,b,c 则同时用来表示一些宝塔函数资财的量度（a,b 用来表示图 22(a)与 22(b)，abc^2 用以表示图 21(c)）.

为了估算一个局势的总体容量，应依照图 25，求出它的一切木栓资源的乘积，此时应利用关系式

$$\alpha^2=\beta^2=1.$$

对一个具体问题来说，总是存在着两种乘积，即**原始乘积**（对其初始局势而言），它必须除以**完成乘积**（对最终局势而言），以便算出可以耗用的资源：

$$\frac{\text{原始乘积}}{\text{完成乘积}}=\text{可利用的资源}$$

在图 26 中，改变乘积的所有跳法都可用大小为若干**单位**来表示：

---

* 译者注：这是作者的一句戏言，无非是用诙谐的语气说明本问题不存在有限解.



$$\begin{array}{lllll} a & a\alpha & c\alpha & a^2c^{-1}\alpha=A & a^2 \\ b & b\beta & c\beta & b^2c^{-1}\beta=B & b^2 \end{array}$$

所以你的可利用资源如果能由这种单位来制备,它们才是富于成效和有出息的.

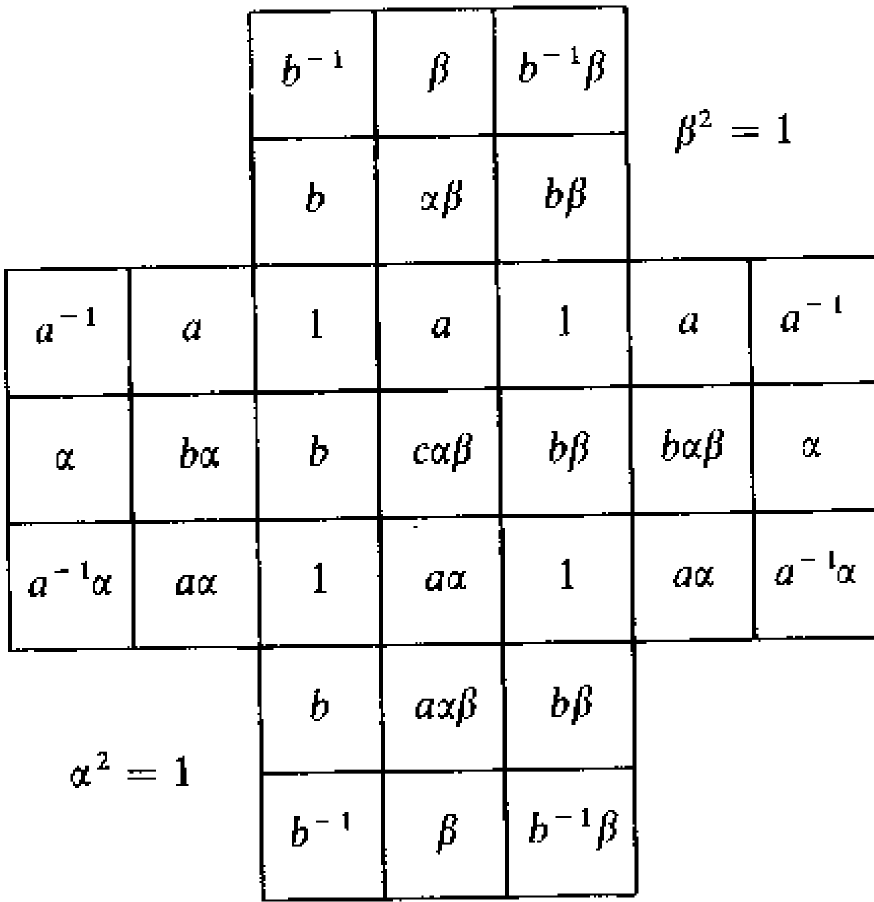


图 25. 资产负债表.

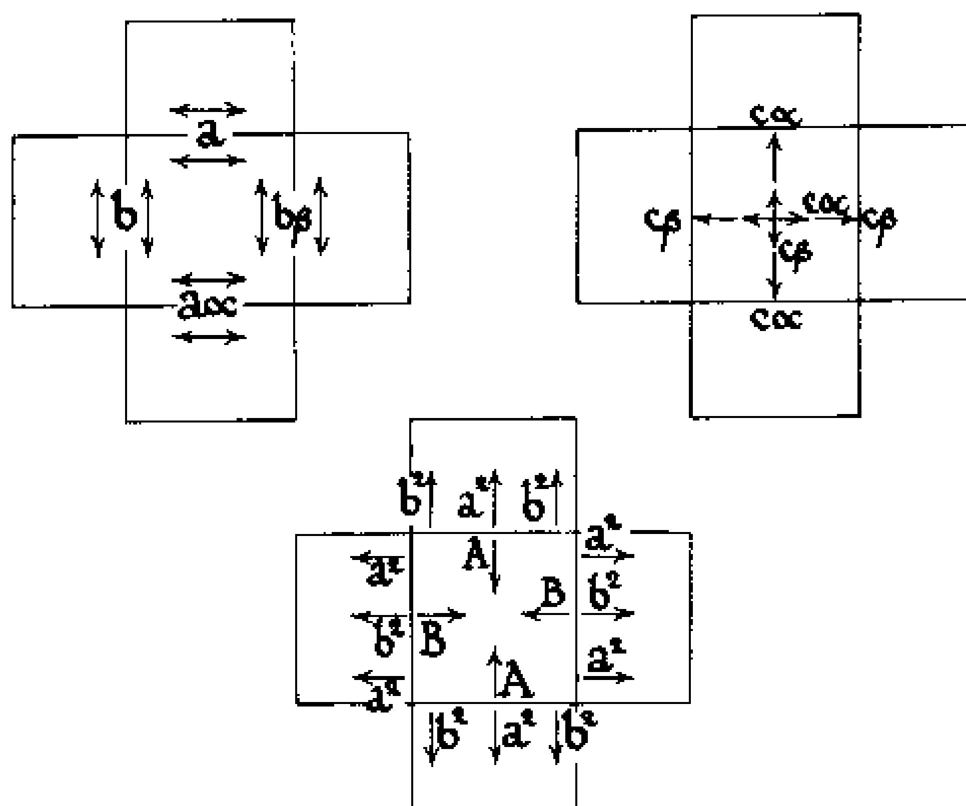


图 26. 各种单位的资源利用.

譬如说,中心位置的独粒钻石棋,它的原始乘积为 a^4b^4,而完成乘积为 $c\alpha\beta$,所以它的可利用资源为

$$\frac{a^4b^4}{c\alpha\beta}=a^4b^4c^{-1}\alpha\beta.$$

在杜登尼的解法中只有开始几步与最后几步动作真正利用了这些资源:

动作	e	J	O_2	$fmh_2apFMH_2APc_2g_2C_2G_2$	P_6	o
资源	A	$c\beta$	$B.c\alpha$	←——自由动作——→	$1.a.1.1.a\alpha.1$	B

徒劳无功与挥霍的浪子

许多独粒钻石问题的不可解,其原因十分简单,仅仅是下列事实:

> $b^2\alpha$ 与 $a^2\beta$ 乃是不毛之地,根本不出成果的!

何以如此呢? 在 $b^2\alpha$ 的情形,譬如说,我们之所以成为跛足巨人是由于缺少了一些 a,因而 α 迫使我们走出一步跳跃 $c\alpha$,只留 b^2c^{-1}给剩下的动作,其中 c^{-1}要求一步动作 $b^2c^{-1}\beta=B$,于是我们就没有什么资产去调整剩下来的 β.

挥霍浪子的开局法

> 跳进中心;跳越中心;
> 跳进中心;回头跳越中心;

是中心独粒钻石棋在少到只有四步动作的情形下能误入歧途的唯一方式.这些动作何以拙劣到如此地步呢? 原来,挥霍浪费在于第二步与第四步,它们都用了 $c\alpha$ 或者都用了 $c\beta$,于是只剩下

$$a^4b^4c^{-1}\alpha\beta/c^2=a^4b^4c^{-3}\alpha\beta$$

给余下的各步动作.然而

> $a^4b^4c^{-3}\alpha\beta$ 却是不毛之地,根本不出成果的!



唯一利用 c^{-3} 来应付局面而不过度耗用 a 或 b 的办法是去利用单位

$$A, A, B \text{ 或 } A, B, B,$$

它们只会剩下不出成果的乘积

$$b^2\alpha \text{ 或 } a^2\beta.$$

当然，同样的论证将表明，在中心独粒钻石棋的任何解法中，没有两个动作会产生出乘积 c^2.

你能不能找出唯一的途径，在六次跳跃后得到绝对封锁的木栓形势(根本动弹不了，即所谓的**傻瓜独粒钻石棋**). 另外，在上面的六步已经走过五步之后，你能不能解开这种形势以**救助傻瓜**？还有，从开始状态出发，你能否用少到只有十步的跳跃达到另一种封锁状态？

赤字会计与国民生产总值*

一个问题的**赤字**是指初始状态所缺少的整个盘面的资源，计算时自然要考虑最终状态的全部资源以及你想采取的任何行动的代价. 由于整个盘面的资源为

$$a^4b^4c\alpha\beta \text{(英国式棋盘的国民生产总值 G. N. P.)}$$

从而有

$$\text{剩余的资源} = \frac{a^4b^4c\alpha\beta}{\text{赤字}}.$$

赤字的计算非常容易，只要把初始洞孔值与最终木栓值相乘一下就行. 对中心独粒钻石棋而言，基本赤字为

$$c\alpha\beta \cdot c\alpha\beta = c^2,$$

然而浪荡子的笨拙走法却使它不适当地膨胀到 c^4. 他肯定不了解**赤字法则**：

> 如果赤字/c^4 是有出息的，那么你的剩余资源则否！

这是因为(G. N. P.)/c^4 是我们的毫无出息的乘积 $\alpha^4\beta^4c^{-3}\alpha\beta$ 之故.

---

* 译者注：这只是原作者的一种幽默说法，当然与通常所谓的国民生产总值(G. N. P.)毫无共同之处.

两木栓逆转问题的会计

我们知道所有的单栓逆转问题都是可能的，但是不可能的两栓逆转问题却有不相同的四类. 它们中间的第一种叫做**汉姆莱特难忘问题**（在或不在*）：

走到只剩 b，有 e 在场（在）

从 b 出发，e 不在场（不在）.

汉姆莱特问题的赤字会计

初始洞孔 @b & e：	$\beta\cdot a\beta=a$
最后木栓 @b & e：	$\beta\cdot a\beta=a$
第一次与最后一次跳进 e：	$c\alpha\cdot c\alpha=c^2$
跳入 b：	a^2
赤字：	a^4c^2

由于

$$\frac{a^4c^2}{c^4}=a^4c^{-2}=A^2\cdots$$

是有出息的，汉姆莱特问题最终由赤字法则判为死亡. 其他三种不可能的两栓逆转问题是渡渡鸟问题，其中的两位置是五个渡渡鸟木栓中的两个（见图 22(d)）. 典型问题 eo，ex 与 eE 的赤字会计如下：

渡渡鸟问题	eo	ex	eE
初始洞孔与最后木栓	$(a\beta\cdot bd)^2$	$(a\beta\cdot c\alpha\beta)^2$	$(a\beta\cdot a\alpha\beta)^2$
需要的动作	$c\alpha\cdot c\beta$	$c\alpha$	$c\alpha\cdot c\alpha$
赤字	$a^2b^2c^2\alpha\beta$	$a^2c^3\alpha$	a^4c^2
赤字/c^4	$A\cdot B$	A	$A\cdot A$

* 译者注：《汉姆莱特》又可译为《王子复仇记》，此典故出自“To be, or not to be, that is the question”，中文意思是“活着还是死掉，那就是问题所在”，请参看《莎士比亚全集》.

至于其他两栓逆转问题，仔细阅读并充分留意的读者自然能够找到解决办法，不会有什么困难.

约翰·康威、密克·盖伊与鲍勃·赫舍斯业已指出，仅有的不可能三木栓逆转问题可以分为以下几种类型：

(1) 野蜂问题(b,e 以及除 g,m,M,G 之外的任意第三个位置)；

(2) 绝种渡渡鸟问题(两只渡渡鸟以及除去一个外面的角 $acgmMGCA$ 之外的任意第三位置)；

(3) 三个倒霉位置问题 (在三行 def，$nopxPON$，FED 的十三个不幸位置中的任意三个).

这些都可以通过赤字会计来证明其不可能性. 实际上，在逆转问题中，除了外面的角之外，一只额外的木栓只会使赤字情况更加恶化.

遗忘顺序也许有用

如果你允许自己在一个洞穴里有 2 只或 2 只以上木栓，或者有 −1 只或更少木栓，那么你就可以用任何顺序来运作！用此种办法来转换一个难啃的问题确实是个好主意. 如果你能解决变换过以后的问题，那就可以回过头来，找到原问题的一个合适顺序.

以下，我们将要响亮地为你解决一个伤脑筋的 3 木栓逆转问题：

开始时，在 b,N,n 有 0 个木栓；其余地方每一处有 1 个木栓；

最后，在 b,N,n 处有 1 个木栓；其他地方有 0 个木栓.

在转换后的问题中，较易解决的问题为：

开始时，在 b,N,n 处有 −1 个木栓，其他地方每一处有 1 个木栓；

最后，任何地方有 0 个木栓.

从开始位置，图 27(a)，我们将需要在某个时刻，作三次跳跃来填充那些 −1，既然如此，于是**现在**我们就来跳三下，于是到达了图 27(b)的状态. 处理六个在角上孤立的木栓的唯一办法看来是向里面跳，于是，在图上用向上的箭头标明，越过中心的跳跃之后，我们到达了图 27(c)的状态. 此时，剩下来的一些木栓就可以用一个三栓清除剂，一个六栓清除剂以及跳过内部角落的四次双连跳来统统一扫而空.

如果你按照图 27(d)中自 A 到 L 的顺序来执行的话，你将发现所有的上述动作都是用合乎规定的方式来实施的. 双连跳早已被收编进三栓清除剂 B,C,I,K,J.

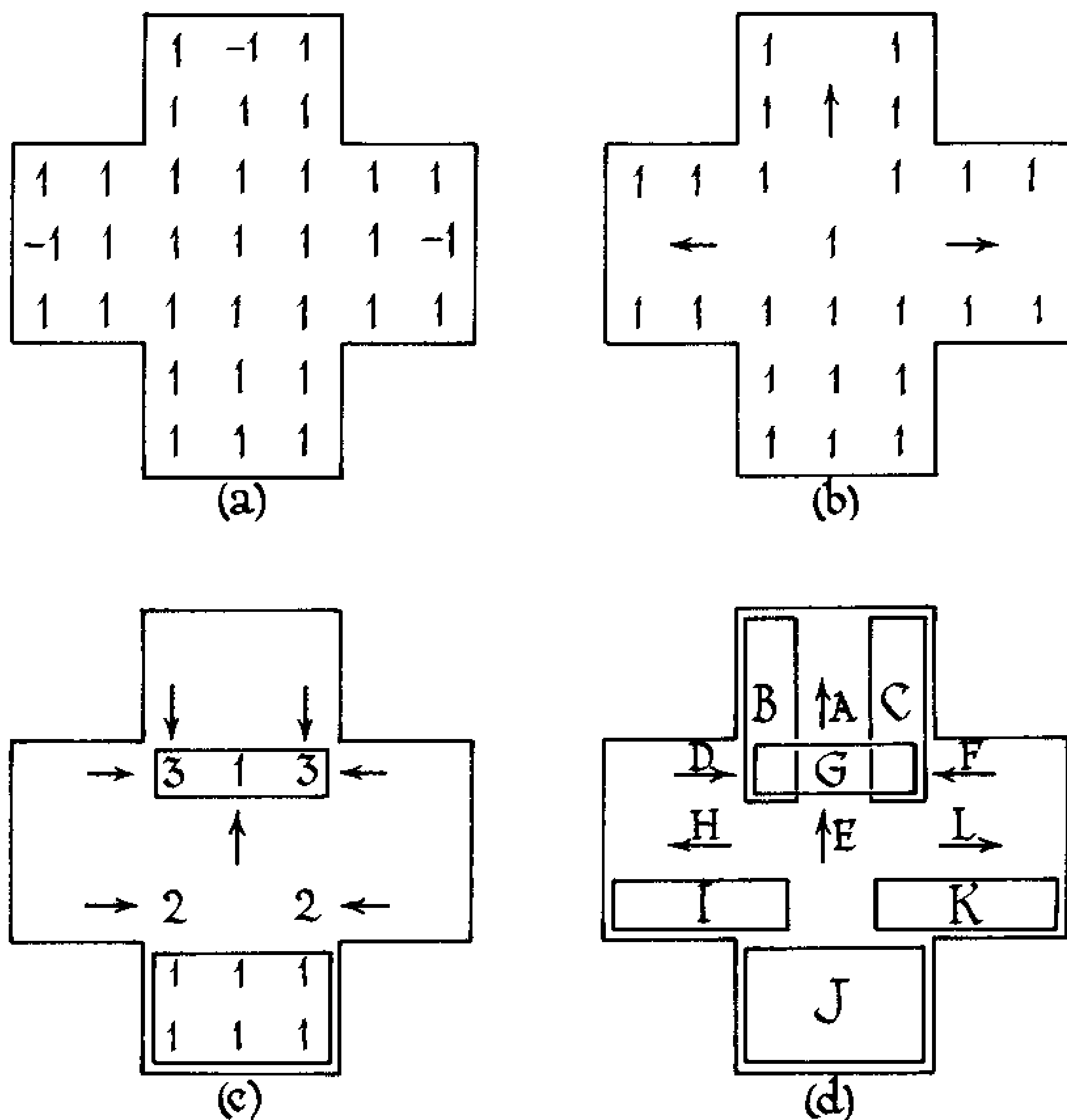


图 27. 解决一个伤脑筋的 3 木栓逆转问题.

贝斯莱的紧急出口*定理

有时候你能想出问题中的适当走法，但难以把它们安排得井井有条. 下面的注释能帮助你

* 译者注：又叫“太平门”，是电影院等娱乐场所应付失火、爆炸等紧急情况的安全通道.

把你的走法编排得合乎顺序，或者证明它是做不到的.

> 一个至少有三方格的区域，（开始时是满的，或结局是空的）需要至少一个紧急出口走法. 一个至少有三方格的区域（开始时是满的，而结果变为空的）需要至少两个紧急出口走法.

贝斯莱的第一与第二紧急出口定理

此处所说的一个区域的紧急出口走法，指的是一个跳法，它使区域内的某些方格变空，而把区域外部的某些方格填满. 为了验证贝斯莱第二定理，请注意影响区域的第一步与最后一步走法必须都是紧急出口. 我们将用下文的呆头呆脑的幸存者问题来加以说明.

迟钝的幸存者问题

假定我们需要做一个 a-逆转，附加条件是木栓 K 是一个**迟钝的幸存者**，这就是说，K 的第一步动作也是从 K 到 a 的最后一步动作. 现在要问，最后一幕能是一个 6-链*吗？

我们在讨论的第一部分中所涉的概念往往对长链问题很有用. 然后我们试图把发现的动作安排成可操作的顺序，利用的自然是贝斯莱紧急出口定理.

我们怎样利用图 22(h)与(v)中的 16 只边上木栓 h^8v^8 呢？每一只外面角上的木栓必然在某一时刻跳进中央的 3×3 正方形，而位于 C 及 M 处的木栓必须先跳到边上去以避开 K 处的迟钝幸存者，因而所提到的跳跃利用边上木栓的方式应如下述：

$$\begin{matrix} c & m & G & A & C & M & g \\ v & h & h & v & hv & vh & h \end{matrix}$$

留下 h^3v^4 来以供余下的跳跃. 由于第一步动作用去了一个边上的木栓，而最后的链长为 6，从而我们已经考虑到了所有边上的木栓，没有其他动作能破坏其中的一个.

这样就迫使我们去走第一步动作 c_a，这是因为另一种走法 i_a 将使一只内部角落里的木栓走到外面去，并迫使我们在以后使用另一只边上的木栓把它带回来. 下一步的 k_c 将利用边上的另一只木栓，所以第二步动作应该是 j_b，并且这只木栓必须停留在 b，直到最后一幕的到来. 因为重新填满 e 的一步动作将要利用另一只边上的木栓. 现在我们已经知道，最后的 6 链要利用 h^2v^4，

---

* 译者注：指 6 步连跳.

并且包含着跳越 b 的水平方向的跳跃，所以它必然像图 28(a)那样的方式.

由于 K 除非到最后一步是不动的，因而 L 不能被跳过，它只能通过向上的跳跃 L_h 来清除. 我们需要两次跳跃来越过 B，一次是把角上的木栓 C 弄出来，一次是在最后的六连跳，所以我们必须通过一个向下的跳跃 J_B 来把一个额外的木栓输送过去. 根据同样的理由，在 D 处需要两只额外的木栓，所以我们必须制造两个向下的跳跃 P_D. 为了这些跳跃中的第二个，以及为了最后一幕的连跳，我们需要在 P 处输送两只额外的木栓；而它们必然来自 N 及 p. 我们现在已经找到 31 跳中的 23 个(见图 28(b)). 如果我们作了这些跳跃之后，我们就到达图 28(c)的状态. 在 I 与 k 每一个上面的两只木栓必须由一对对垂直或水平方向的来回跳跃予以清除，而在 i 上的四只木栓则由两对这类跳跃予以清除.

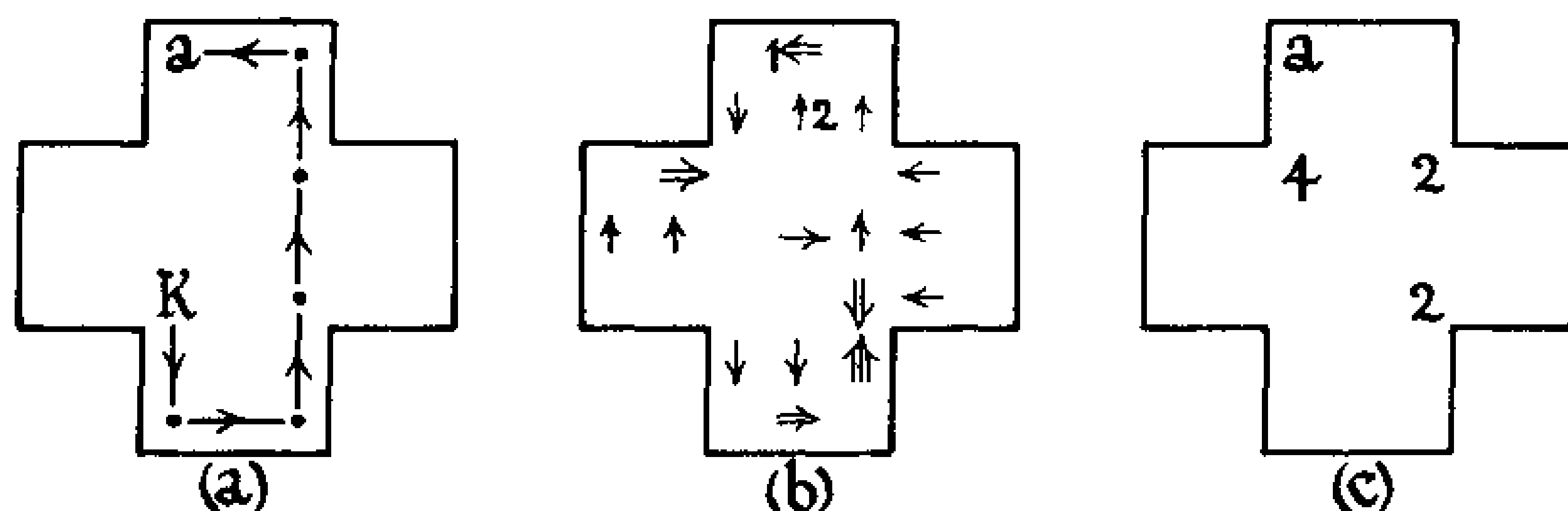


图 28. 迟钝的幸存者能制造一个伟大的六连跳吗?

为了找出正确的顺序来执行这些跳跃动作，我们要应用贝斯莱的第二紧急出口定理. 现在来考察图 29(a)中的区域. 我们从图 28(b)复制的动作从区域里刚刚收编了一个出口；即穿过 P

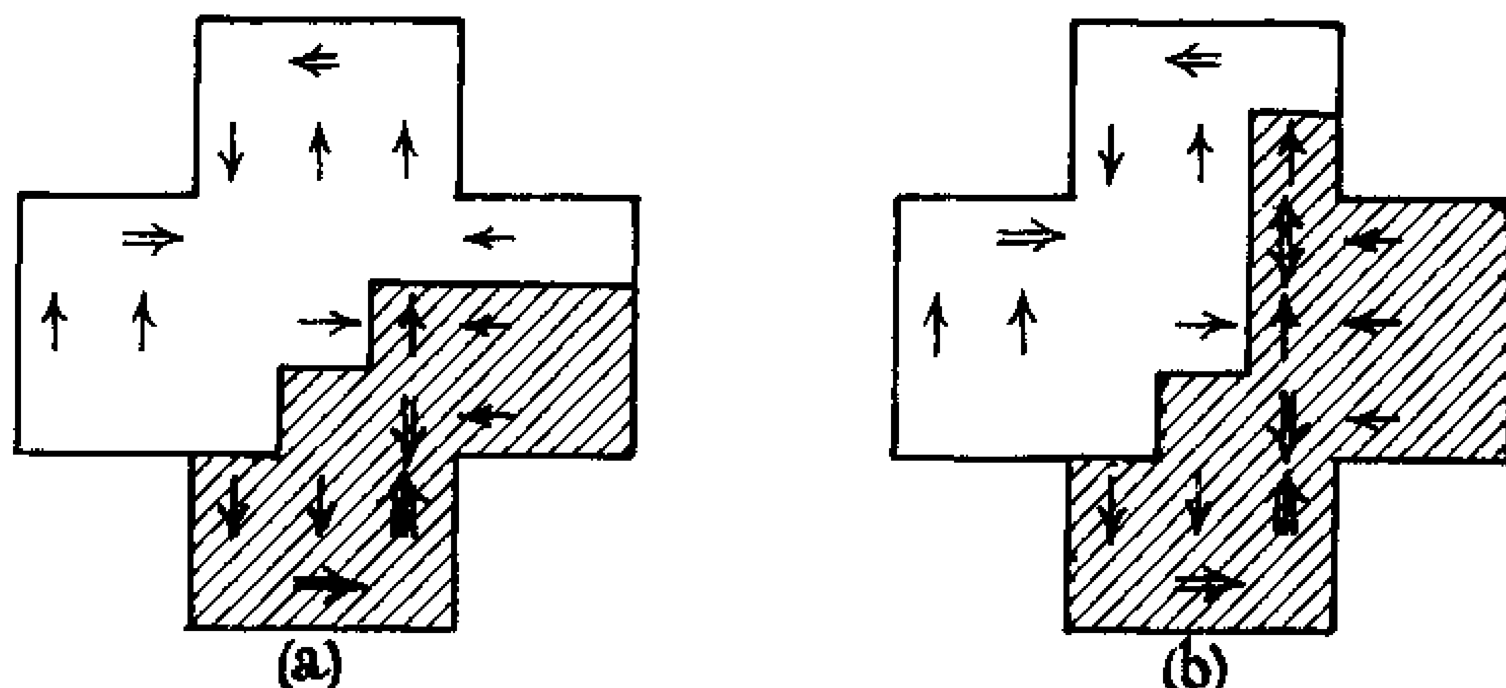


图 29. 应用贝斯莱第二紧急出口定理.

数上损失6)，于是跳跃 I_k 就非它莫属了. 倘若我们进行了所有这些动作，它们已在图31(b)作了汇总，我们就到达图32(a)，而其资源现在是

$$a^2b^3c^{-1}\alpha=Ab^3 \text{ 或 } A.B.b.c\beta \text{ 或 } \beta.a.a\alpha.b\beta.$$

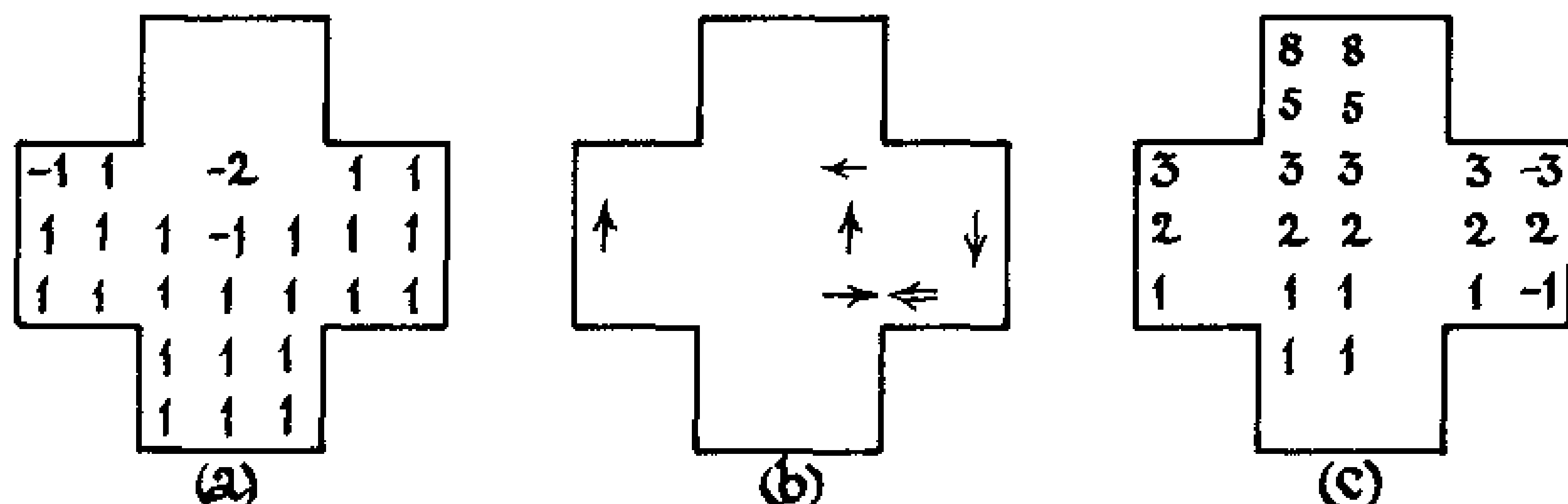


图31. 我们有了一些进展.

所以并没有跳跃 $c\alpha$.

想搬掉 O 处的木栓有两种办法：或者用 j_{IHJ} 或者用 O_x. 前者(必须先输送 I_k)导致图32(b)，但它是无法清除的，因为图32(c)的宝塔函数已经告诉了我们. 所以迫不得已，只好利用 O_x(见图33(a))，而它需要输送 D_P(由图31(c)的宝塔函数可知，水平方向的输送已被禁止). 这两个跳跃导致一种状态，其资源 $a^2\alpha\beta$ 是唯一有产出的：$(a^2c^{-1}\alpha)(c\beta)$，于是跳跃 E_x 是非执行不可了. 图33(a)的 L-软件包将把第二只木栓传输到 K，而整个盘面将被 L_J 与 h_{LJj} 清除掉.

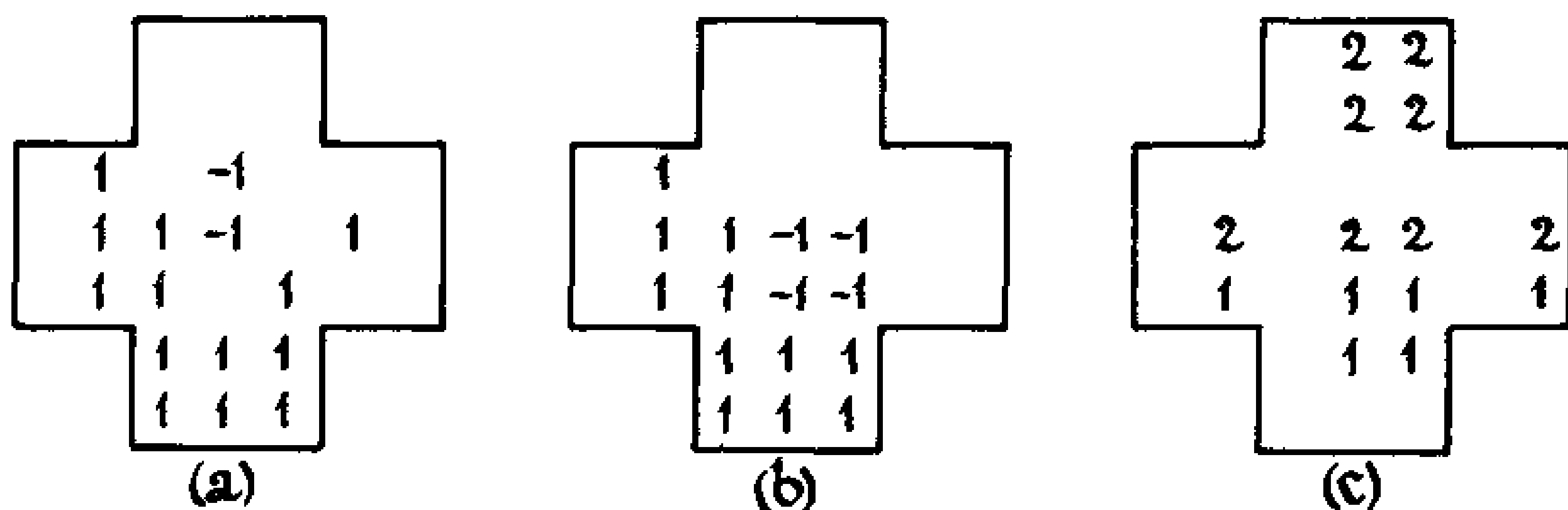


图32. 一个死胡同!

23个跳跃已在图33(b)中给出. 我们怎样把它们实际执行? 孰先孰后，究竟按照什么顺序? 答案并不唯一，图33(c)揭示了一种可能的答案. 它含有两个 L-包，10与11，以及两个连跳动作 13_3 与 14_2.

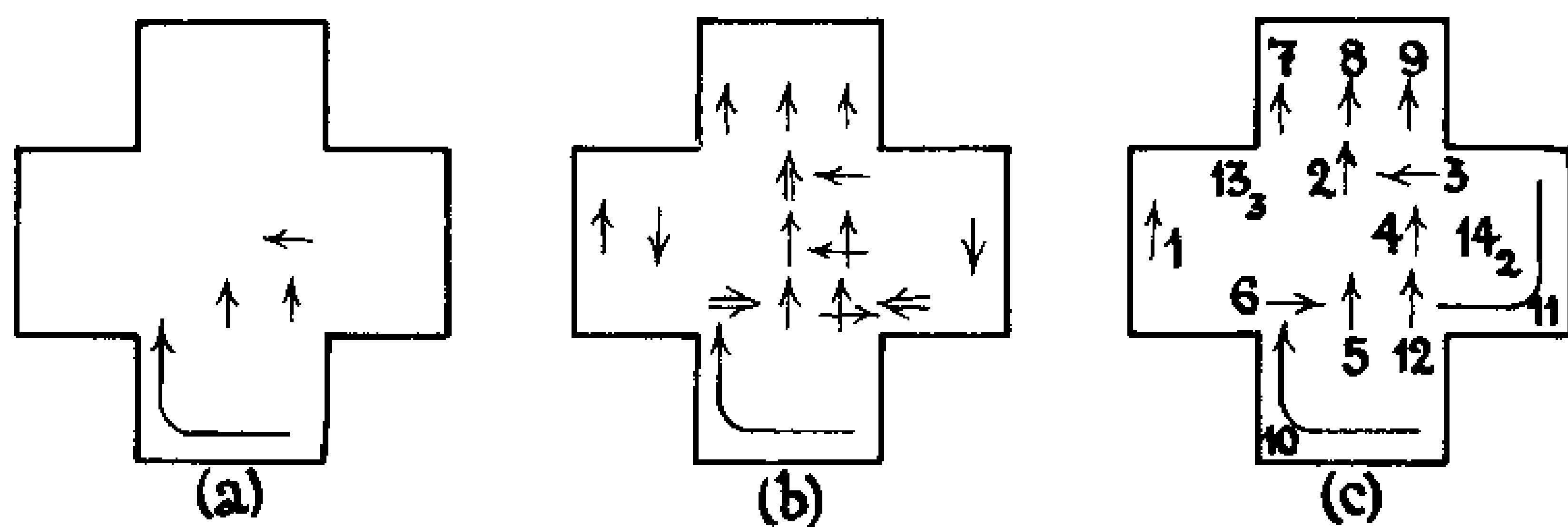


图 33. 问题解决了.

机盒盖头

开局时,棋盘上 b,B 两处是个空档,g,M,G,m 是涂上黑色圆圈记号的木栓,你能否做到如图上的箭头所示,使它们各自跳到 M,G,m,g?

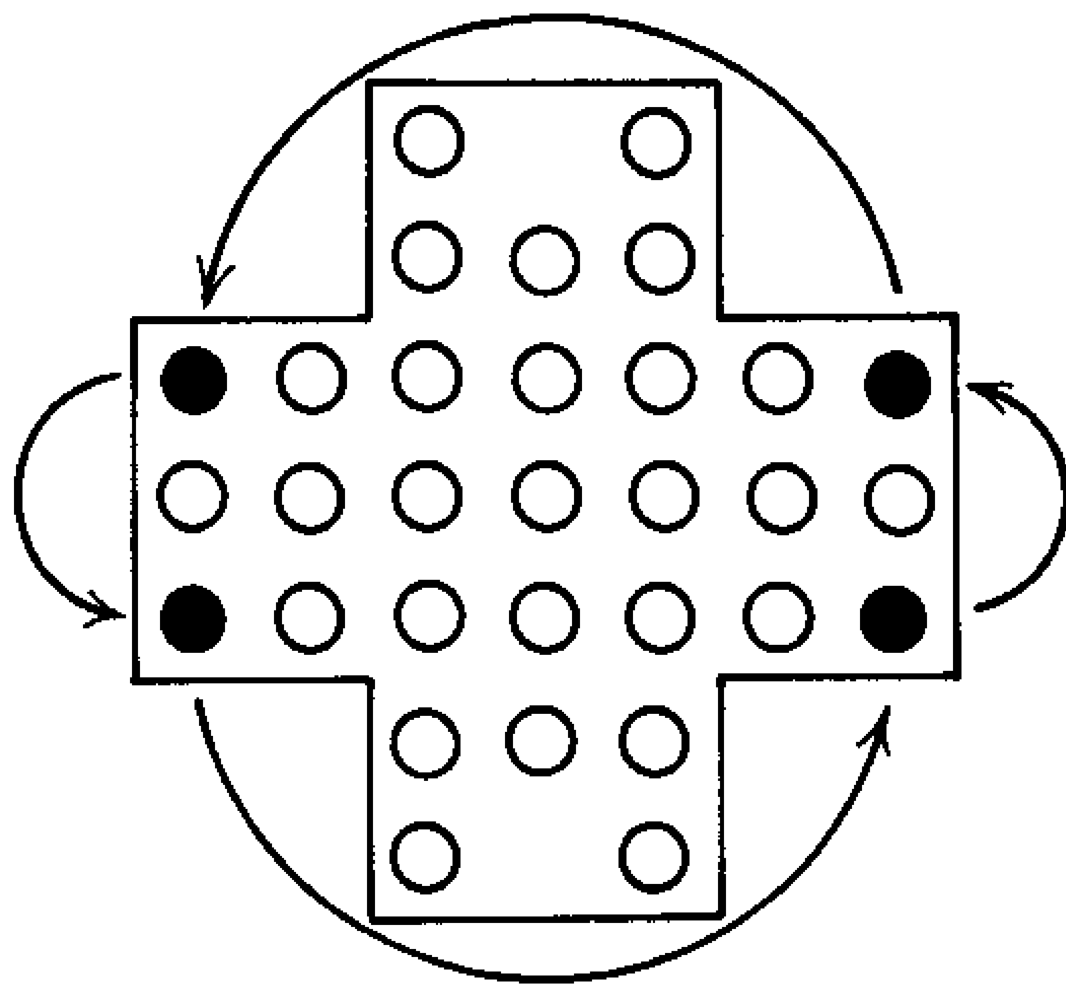
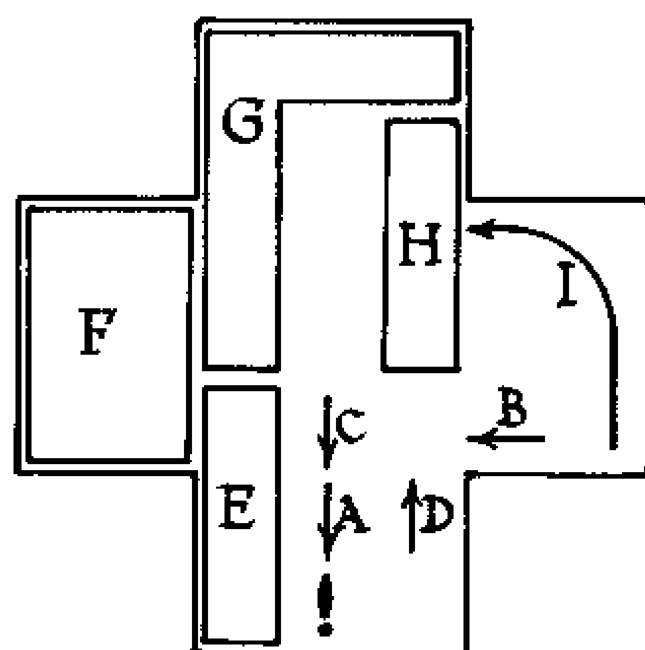


图 34. 机盒盖头.

增 补

我们的优秀决赛选手*

两的法则与三的法则一起告诉我们，如果最初的洞穴在 B，则从 J 开始的决赛选手必然终止于 B 或 b. 下面是终止于 b 的一个解：



图中的字母指出了一系列动作的先后顺序，除了最后的精采动作**之外. 用来表示动作 I 的弯曲箭头是我们用来代表 L-包的记号，以便同 L-清除剂有所区别.

但是，决赛选手要想在 B 处结束是不可能的. 这是由于，存在着一些非执行不可的动作

$$J_B \qquad x_E \qquad x_E \qquad J_B$$

它们在资产负债表上的消耗分别是

$$a^2 \qquad c\alpha \qquad c\alpha \qquad a^2$$

---

* 译者注：指最后一只木栓，这是作者们的风趣说法.

** 译者注：指最后的六连跳.

从而得出赤字 a^4c^2. 由于

$$赤字/c^4=a^4c^{-2}$$

是有产出的,故而你剩下的资源就没有出息.

进行分割肢解

如果你从图 16(a)开始,并按照图 35 的指示,从 A 走到 I,其中的Ⓒ,Ⓕ,Ⓖ为 2-清除剂,这时你就将到达一个 5 木栓的构形,后者很容易简化到 I,L 或 f(从开始状态减掉 5 栓构形后,通过排序过程,我们发现了这一解答).

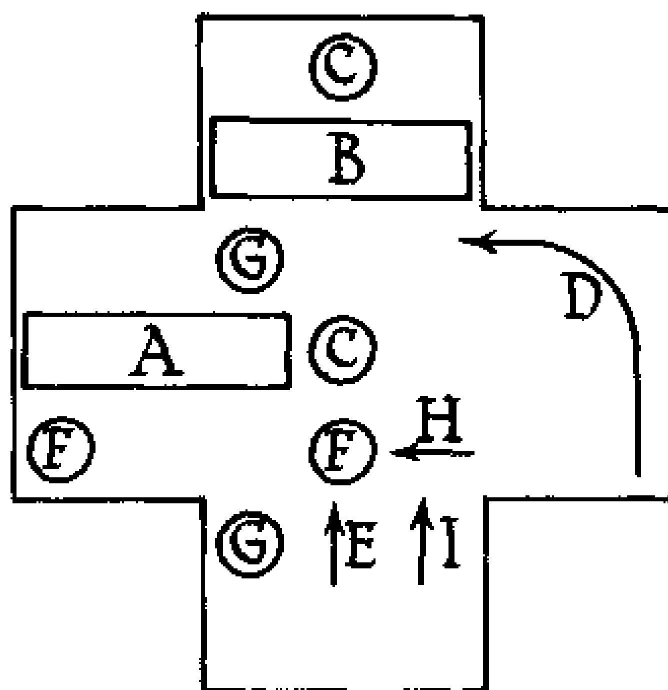


图 35. 火车驶向伊凡尼克格勒,卢布雅那或游击区中心. *

大陆式棋盘上一切可解的一栓问题

都已被黎斯用他的学说全部发现. 如采用我们的语言,大陆式棋盘在代数上与其中心等价. 因而,如果一栓问题是可解的话,则必有(从我们的代数意义上说)

(初始洞孔)×(最后的木栓)=中心.

你很容易验证初始洞孔与最后的木栓是在

$$(apCO)\leftrightarrow(APco) \qquad (eGJM)\leftrightarrow(Egjm).$$

---

* 译者注:这些都是前南斯拉夫的地名,其中较为我国读者熟悉的只有中间的卢布雅那,现在克罗地亚共和国境内. 三个地名是作者的故弄玄虚,实际即指 I,L,f.

中的一个箭头的相对端点上.

存在着一种 41 孔的棋盘,刘卡在它上面给出了所有的可解问题;请参看刘卡著作第二版中的附录,他先是猜测绝大多数问题是无解的!

最后两步动作

在图 19(a)中,最后两步为 n_9G_3.

一支 20 人的独粒钻石部队

可以按照图 23 的布阵法把一名侦察兵送出四步之遥.为了得出另一种布阵法(只有一种),需要把图上两名扛枪的七兵走到有黑点的位置.

傻瓜独粒钻石棋及其他

如果你的每一步被限制在中间一行或中间一列.那么六步以后就会到达图 36(a)的状态.图 36(b)称为镰刀与斧头*,那是经过十次跳跃后达到的.

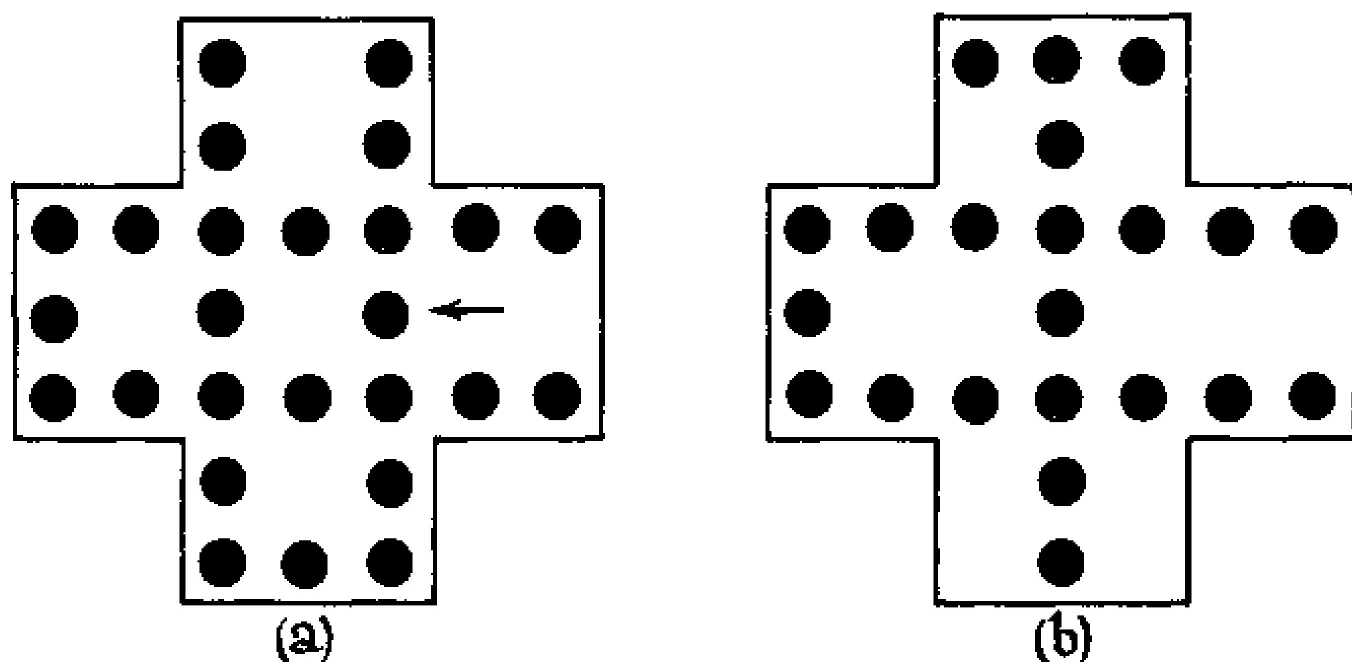


图 36. (a)镰刀和镰刀. (b)镰刀和斧头.

* 译者注:前苏联国旗上有这种图案标志.这是作者的一句俏皮话.

傻瓜已经走了五、六步，导致图 36(a)的出现. 为了帮助他，最好的办法是把图 37(a)的盘面清除为零. 如果你把它放在棋盘上来看(对 −1 要使用一枚上下倒置的木栓!)你就会看到，实施了图 37(b)的走法顺序后，即可到达易于清除的状态图 37(c)、图 37(b)中的 L 式动作是 L -包不是 L -清除剂. 你要对付的有趣小问题不过是把这些必要的动作做出正确的顺序安排. 有一种解法已在图 37(d)中给出，其中 A 及 F 是 L -清除剂，但 c 是一个 L -包.

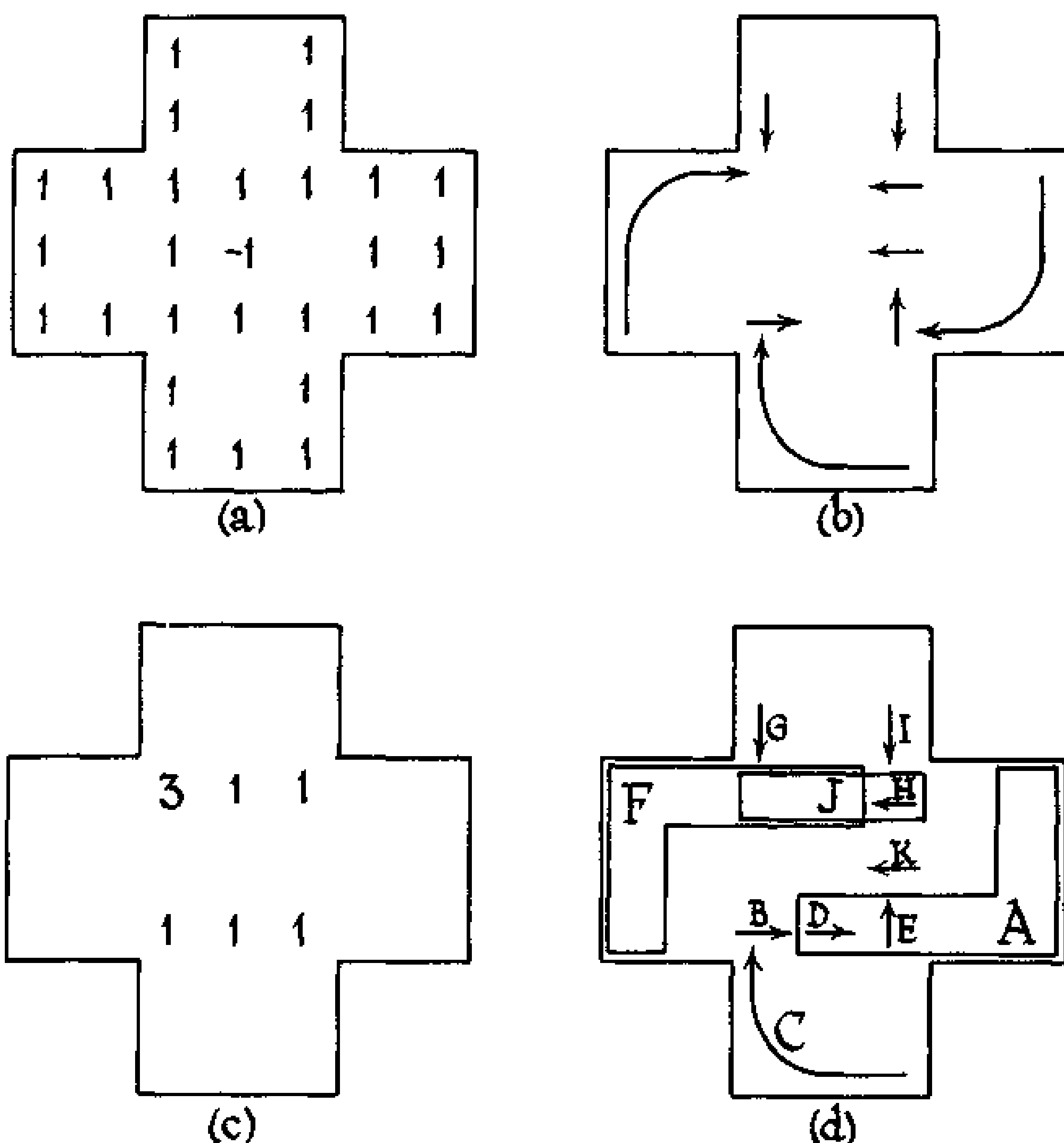


图 37. 帮助傻瓜.

贝斯莱证明布荷特解法是最优解

假定中心独粒钻石棋存在着 17 步解法. 贝斯莱首先应用图 38(a)的计分函数(下文所谓“分

数"即指该函数,但它不是宝塔函数,在全部证明过程中都应作如此理解)以及他的第一紧急出口定理,证明了没有一种动作可以开始或结束于 b,n,B,N. 初始与最后的分数为 20 及 0. 在 b, n,B,N 处开始或结束的动作至少要增加 1 分. 而其他动作则至多减少 2 分(细心的读者可以对每种类型的动作编造一张分数变动表格).

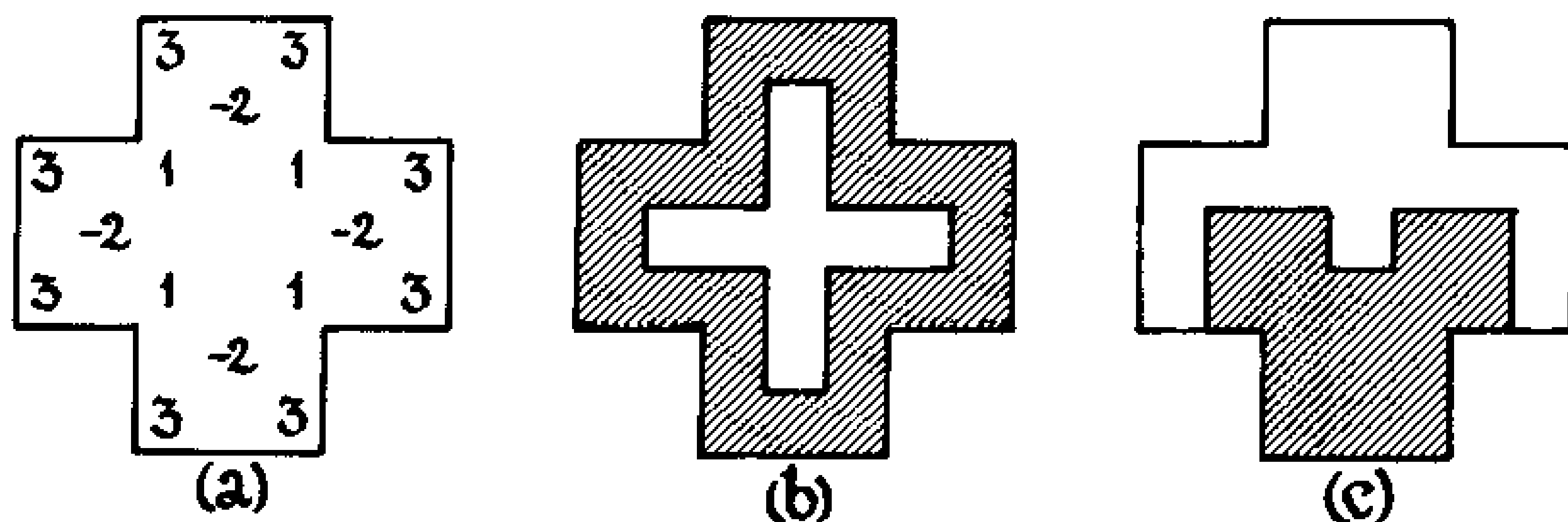


图 38. 贝斯莱证明中所用的计分函数与区域.

> 中心独粒钻石棋的任何一种解法
> 必然含有 11 个**保留**动作:
> 我们要走的第一步 e_x,
> 最后一步动作,它肯定是跳到中心的单跳,
> 倒数第二步动作,取一个木栓到 j,p,J,P,
> 将外面角上的木栓带到内部角上的八个动作,于是它们将被捕获. *

第一步与最后一步动作的每一步都要增加 2 分,倒数第二步至多减 1 分,而另外八个动作的每一个至多减 2 分. 因此剩下来的六个(**宽松的**)动作一定要至少减 7 分.

第二步动作是宽松的,譬如说,它可以是 Jj 或 hj. 动作 Jj 不会改变分数,它使留下来的图 38(b)装得满满的. 这区域的第一个出口是一个宽松动作,要末是 b_j 型,要末是 h_j 型(以之结尾). 前者将增加 2 分,而另外四个宽松动作将至少减 9 分,然而这是不可能的. 后者会减少 1 分,而我们的四个宽松动作必须使它进一步减少 6 分. 如果它们中的任何一个增加了分数,那么另外的动作将不再有可能使分数减少为零,因而在 b,n,B,N 处开始或结尾的动作再次被证明为不可能的. 这样的一个动作可作为倒数第二个动作而出现,但这时,六个宽松动作将不得不减少

* 译者注:指被跳过而从盘面上清除出去.

10 分,类似上面的论证将表明这是不可能的.

第二步动作 h_j 可减少 1 分,而且是图 38(b)中所示区域的第一出口.其他五个宽松动作必须把分数至少减低 6 分.什么是图 38(c)所示区域的第一出口呢?存在着好几种可能性,它们全是些宽松动作,我们留给读者去追查、探索.在若干情况下他会就图 39 中的区域之一(它们中的木栓仍是满满的)提出进一步的问题.从现在开始,我们将假定:在 b,n,B,N 处没有任何开始或收尾动作.

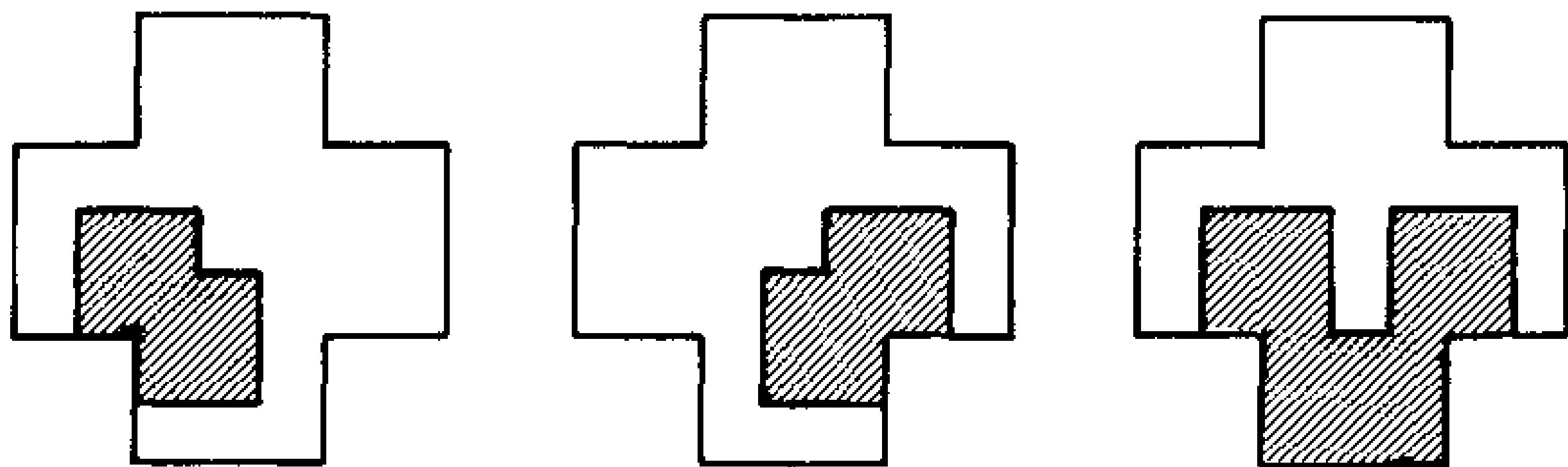


图 39. 什么是第一出口?

怎样才能清除 a,b,c? 我们已经证明 b 不能跳出去,所以一定要有跳过它的一跳,譬如说 c_a.现在,a 处的两个木栓必然要有两个跳跃 a_i 以及跳到 d 的一跳,后者我们将称之为一个**边传**动作.

四个跳跃

$$c_a \quad a_i \quad a_i \quad ?_d$$

是至少三个动作

$$a_i\cdots \quad ?\cdots_d \quad c_{ai}\cdots \quad \text{(正常情况)或}$$

$$a_i\cdots \quad ?\cdots_d \quad ?\cdots_{kcai} \quad \text{(一个} U \text{形转弯)}.$$

中的一部分.不过,U-形转弯要求在此之前必须把 c 清除,还得有一个额外的,到 f 的边传动作.

由于同样的论证也适用于 n,B,N,于是我们将至少需要四个边线,它们中的任何一个都不能在 11 个保留动作里面,也不可能是图 38(b)的第一出口.这样一算,就要有 16 步动作;我们把剩下的一步动作称为**备用**动作.另外,如果有一个 U 形转弯含于其中,我们还得有一个边线,于是就没有什么剩下来了.注意在 lha 之后,p 是一个边线,但当 g 仍被占位时 j 是不算的,因为我们还是需要一个动作去清除 gnM.

贝斯莱证明的最后阶段不过是列举所有的变化而已.在以下表格中,**备**用动作用**粗体字**表示.在前两个变化中,图 38(b)的第一个出口是 L,而在所有其他情况下是 h.每一种变化最后总

是以 ‡，§，冒号:加一个数字来结尾.

‡ 的意思是:下一动作不可能是一个角上动作或一个边线，而且备用动作已经被用掉；

§ 的意思是:剩下来的动作已经不够，不能使分数降到零；

:9的意思是:参考第 9 种变化；其他:3，:5等可仿此.

此表格已覆盖了没有 U-形转弯的所有变化. 如果存在着一个 U 形转弯，那就没有备用动作，于是只有一种变化 $ehapc_2$‡(参着第 56 种变化).

1	$eJLCpA_2$‡	17	$ehKMJg_2$‡	33	$ehajgpL$§	48	$ehapFc_3$‡
2	D§	18	CD§	34	c_2L§	49	M_2‡
		19	P_2g_2‡	35	J_2M_2‡	50	c_2MJg_2‡
3	$ehxaf$‡	20	A_2‡	36	l_2M_2‡	51	Mc_2:50
4	pc_2‡	21	d_2g_2‡	37	L§	52	Jc_3‡
5	Lap§	22	A_2	38	$J_2M_2p_dc_2$‡	53	g_3‡
6	gj§	23	j_2§	39	$l_2M_2p_dc_2$‡	54	c_2:50
7	$kcPa_2$‡	24	CD§			55	g_2c_2‡
8	mH§	25	P_2A_2‡	40	$ehapc$:30	56	c_2P_2‡
9	J_2a_2‡	26	MJ:19	41	k_2§	57	F_2MJg_2‡
10	G_2‡	27	j_2§	42	x:4	58	x:4
11	L_3§	28	d_2A_2‡	43	L:5	59	L§
12	mH§	29	MJ:21	44	kmH§	60	jgL§
13	J_lG_2‡			45	J_lG_2‡	61	J_2M_2‡
14	cP:9	30	$ehacpa$‡	46	L_3§	62	l_2M_2‡
15	L_3G_2ap§	31	x:3	47	Pc_2‡	63	P‡
16	c_2§	32	L:5			64	FMj_2§
						65	Jg_2‡

一些经典问题

这些问题是:开局时只有一个空位，结果只剩下一只木栓. 它们之中也包括逆转问题，对之，布荷特的结果是:

a- b- d- e- i- j- x- 逆转，

其所需步数分别为

16 18 16 19 16 16 18 步.

我们刚刚着到，他的 x-逆转问题是最优解. 但哈利·O·台维斯(Harry O. Davis)在 i-逆转问题上的结果比他还要好；只要 15 步:

$$kmh_2cPKCD_{PF}A_3MG_2H_4a_2d_5g_3.$$

下面是台维斯的 b-与 j-逆转问题的解法，结果同布荷特的解法一样的好：

$$jhapc_2xl_hIf_PA_2GJm_2gL_{Hh}M_2CB_5,$$

$$hKCd_2MJkmH_{Jl}G_3cA_2D_{Fd}g_2ab_7.$$

哈马利（Hermary）鉴定了 21 个不同问题，都是从一个空位到只剩一只木栓（参考刘卡的书）. 台维斯编制了一张已知最优解的表格（参看马丁·加德纳的著作《意料之外的绞刑和其他数学娱乐》），步数为：

aa	*ap*	*aO*	*aC*	*bb*	*bn*	*bx*	*bB*	*dd*	*dK*	*dH*	*ee*	*eM*	*eJ*	*ii*	*il*	*jj*	*jg*	*jE*	*xx*	*xb*
16	16	17	16	18	17	18	18	16	15	16	19	17	17	15	16	16	16	17	18	17

对此信息，我们要感谢瓦德·*E*·斐尔波特（Wade E. Philpott），他有着解法的复印件. 希望我们的热心读者能找到更好的解法，或者证明它们已经是最优解了.

参考文献及进一步阅读材料

J. D. Beasley, Some notes on Solitaire, Eureka, **25** (1962) 13—18.

E. Bergholt, The Queen, May 11, 1912; and "The Game of Solitaire", Routledge, London, 1920.

N. G. de Bruijin, A Solitaire game and its relation to a finite field, J. Recreational Math. **5** (1972) 133—137.

Busschop, "Recherches sur le jeu de Solitaire" Bruges, 1879.

M. Charosh, The Math. Student J., U. S. A, March 1961.

Donald C. Cross, Square Solitaire and variations, J. Recreational Math. **1** (1968) 121—123.

Harry O. Davis, 33-solitaire, new limits, small and large, Math. Gaz. **51** (1967) 91—100.

H. E. Dudeney, The Strand Magazine, April, 1908; and see "Amusements in Mathematics", problems 227, 359, 360, Nelson, London 1917, pp. 63—64, 107—108, 195, 234.

M. Gardner, Sci. Amer. **206** #6 (June 1962) 156—166; **214** #2 (Feb. 1966) 112—113; **214** #5 (May 1966) 127.

M. Gardner, "The Unexpected Hanging and other Mathematical Diversions", Simon and Schuster, 1969, p. 126.

Heinz Haber, Das Solitaire-Spiel, in "Das Mathematische Kabinett", Vol. 2, Bild der Wissenschaft, D. V-A., Stuttgart 1970, pp. 53—57.

Irvin Roy Hentzel, Triangular puzzle peg, J. Recreational Math. **6** (1973) 280—283.

Hermary, Sur le jeu du Solitaire, Assoc. franc. pour l'avancement des sci., Congrès de Montpellier, 1879.

Ross Honsberger, "Mathematical Gems Ⅱ", Mathematical Association America, 1976, chap. 3, 23—28.

M. Kraitchik, "Mathematical Recreations", George Allen & Unwin, London, 1943, pp. 297—298 quotes letter 1716 : 1 : 17 Leibniz to Monmort.

E. Lucas, "Récréations Mathématiques", Blanchard, Paris 1882, Vol. 1, part 5, 89—141 is mainly concerned with the continental board (37 places) but pp. 132—138 refer to the English board and much of the whole is applicable. He attributes (pp. 114—115) the 3—*purge* to Hermary.

M. Reiss, Beitrage zur Theorie der Solitär-Spiels, Crelle's J., **54** (1857) 344—379.

Ruchonet, Théorie du solitaire, par feu le docteur Reiss, librement traduit de l'allemand, Nouv. Corr. math., t. Ⅲ p. 231, Bruxelles 1877.

B. M. Stewart, "Theory of Numbers," Macmillan, New York, 1952, 1964, pp. 20—26. Analyzes Solitaire on a 7×5 rectangular board. He colors the diagonals with 3 colors in either direction and obtains the Rule of Three as an example of congruences (mod 3). Exercise 4. 5 on p. 24, due to F. Gozreh, asks you to start from an even length row of pegs with the second peg missing and finish with just the second peg from the other end. A pattern of 2-purges does the trick. If you start with the fifth peg missing, then a 2-purge and a double jump by the 1st peg reduces the prohlem to the earlier one. Can you clear the row with other pegs missing? Which missing pegs enable you to clear an *odd* length row?

第24章

决心研究各色游戏

意外事件的章节是书里头最长的一章.

——约翰·威尔克斯

我打算做一些文娱活动以滋补心灵,其中的数学游戏决不比其他东西逊色.

——威廉·雷邦拿,《逐利之乐》

我们知道你想运用稳操胜券的办法同别人去玩，但是，确实存在着一大批极其有趣的游戏使你真正感到你是在同一个看不见的对手交锋——他也许就是游戏的设计者，甚至是一位用心险恶的鬼神. 在这一章中我们将讨论一些策略思维能化简问题的案例，可是我们不想挫伤你的乐趣，因此我们试图尽量作出安排，不要老是把其中的奥妙完全和盘托出.

索马

这种精致的小玩具是由皮特·海因(Piet Hein)设计出来的.

图1表明其七块非凸的形状,它们是由四只或为数更少的 $1\times1\times1$ 立方块制造出来的. 皮特·海因游戏之目的是把它们装配成一只 $3\times3\times3$ 立方体. 我们劝你把这七块东西涂成颜色,如图1所示. 许多人用不了十分钟就能解决问题,所以它说不上有多大困难. 但是我们总有一种感觉,它好像是要比实际更难些,是不是因为这七块东西的奇形怪状所致?

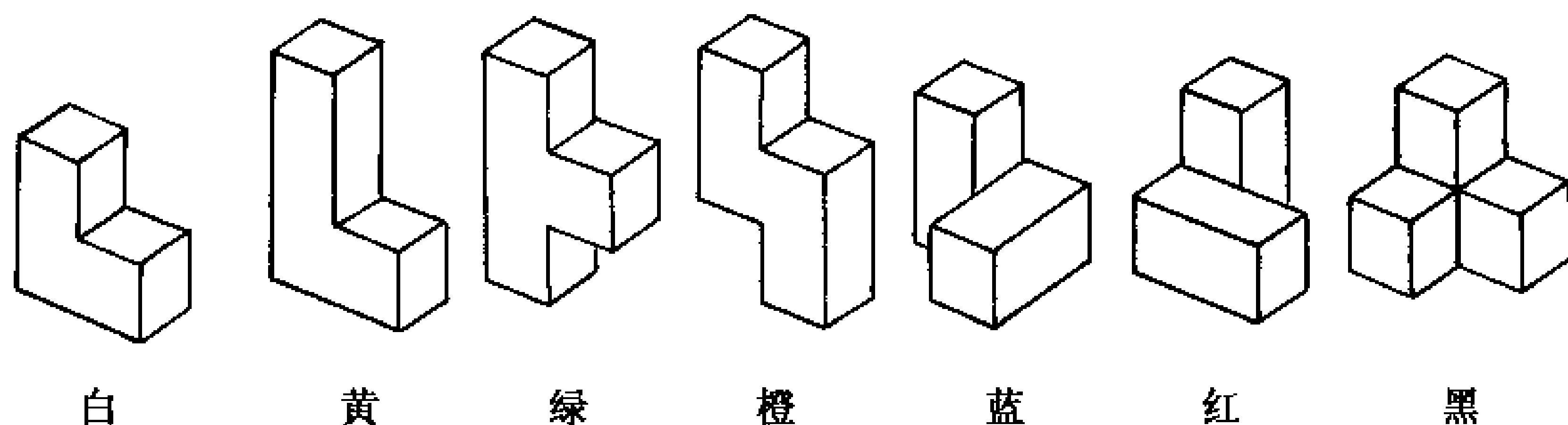


图 1. 七只索马游戏块.

盒中的积木块

下面是另一个游戏，几年前它由我们中间的一人发明出来，它的各块都是形状很规则的长方体，但装配它们还是相当困难. 这游戏要求我们把一只 2×2×2 立方块，一只 2×2×1 扁平方块，三根 3×1×1 竖杆以及十三块 4×2×1 平根放进一只 5×5×5 的立方体盒子(见图 2). 除去一块东西以外，好像很容易把所有的东西统统装进去，但别扭的是，总有一块放不进. 我们的一位朋友曾经花费过好几夜功夫而始终找不到解答. 为什么它竟会如此似易而实难?

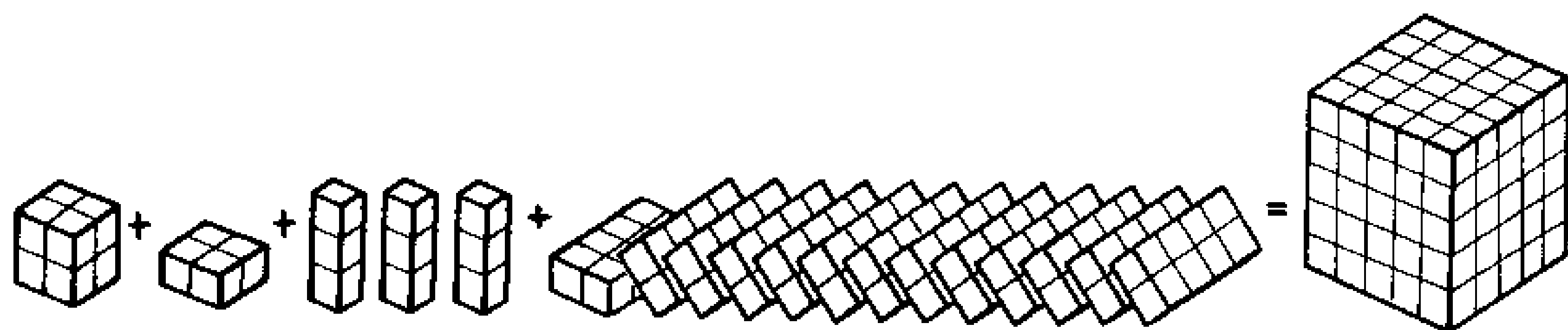


图 2. 把十八块东西装进一只方盒子.

隐藏的秘密

按照我们的观点，好的游戏应该是构件简单而解答很困难、任何人都能用上一堆复杂的构件来制作出极困难的游戏，这不算本事. 你能不能利用简单的构件来做复杂游戏呢?

如果一个看来似乎非常简单的游戏，解起来居然出乎意外的困难，则通常是由于，其中某些隐藏的秘密有待揭露. 索马与盒中的积木块这两种游戏都有这类暗藏的机密. 现在让我们先来看一看一个较之简单得多的游戏：把六个 2×2×1 扁平方块装入一只 3×3×3 的立方体盒子，

使之留出三个 1×1×1 的“洞”(见图 3). 这游戏看来很平凡,很肤浅,但其中却暗藏机关,以致有人花费了 5 分钟以上时间才把它解决掉. 这一隐藏的秘密来自以下事实:扁平块在水平方向置放的每一层上只能占据偶数个单元. 由于 9 为奇数,所以每一水平层必须有一个空洞,而正好有三个空洞够用. 另外,这些空洞也应安排得使能满足两个垂直方向的各层的同样要求——你不能在任意一层上出现两个空洞,如果那样的话在别的层面上就会没有空洞了.

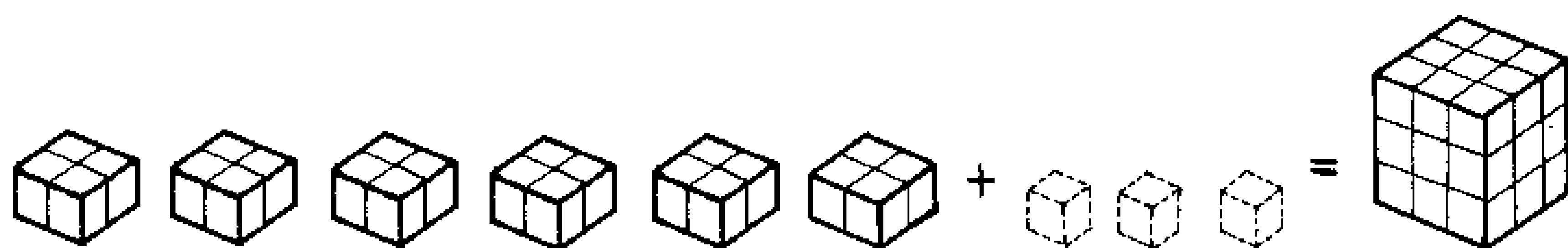


图 3. 一个简单得多的游戏.

于是你会看到,问题的实质其实不是安放构件,而是推敲空洞的位置. 只有当你认识到这一点时,你才会恍然大悟,为什么本题的唯一解(见图 4 所示)的样子看上去如此古怪,空洞必须位于对角,而不是整整齐齐地排列在盒子的顶面上.

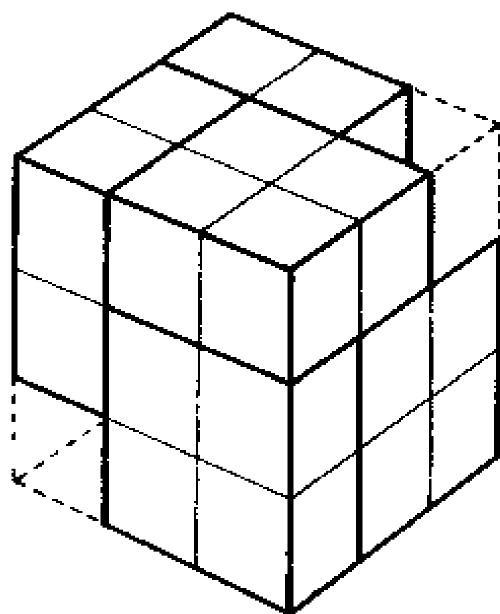


图 4. 3×3×3 盒子里装六只扁平方块.

现在你可以来试一试盒中的积木块游戏了,兴许你不必去看本章增补材料中的额外提示.

索马游戏的机密

由于索马游戏的构件必须满足若干明显的与暗藏的限制条件,所以使许多人感到头痛. 现在让我们来看一看原因.

在 3×3×3 立方体中有着 8 只角块，12 只边块，6 只面块以及 1 只中心块（每一块是一个单元），见图 5 所示.

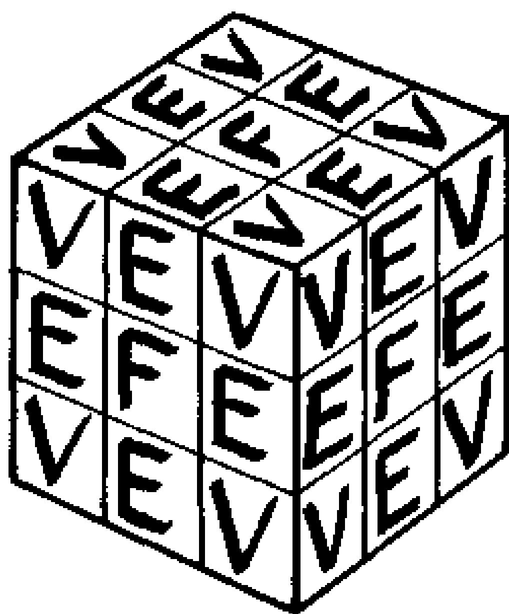


图 5. 角块、边块、面块与看不见的中心块.

现在，每个构件至多只能占有下列角块：

W	Y	G	O	L	R	B
1	2	2	1	1	1	1

所以正好有一构件（称为**不足或欠缺构件**）必须占据少一个角块的位置，很明显，绿色构件不可能是不足构件，因为它如果要缺少角块，那就得欠缺两块，不能只缺一块的，于是

> 绿色构件的脊梁骨必须紧紧贴着立方体的一边.

现在让我们把立方体的 27 个单元用两种颜色来间隔涂抹，

14 个得宠的，(F，V 单元)涂上鲜红的火焰色，

13 个越规的，(E，C 单元)涂上暗淡的祖母绿色.

从而在我们已知的一种解法中，相应的七个构件分别占有

W Y G O L R B

2+2+3+2+2+2+1=14 个 F，V 单元，

1+2+1+2+2+2+3=13 个 E，C 单元.

但是，现在我们已知黄、橙、蓝、红以及绿色构件在每一个解答中也都必须占有上述这些数字，从而白色与黑色构件也只能如此，因为它们中的一个或二个如果交换颜色必将变动总数.

白色构件必须占有 2 个 FV 单元,1 个 EC 单元.

黑色构件必须占有 1 个 FV 单元,3 个 EC 单元.

如果打算在盒子里放上单独一只构件,则上述考虑只允许它放在图 6 的各个位置(已覆盖一切可能性). 于是你可以看到,除了立方体的旋转之外,任一单个构件的安放由下列两个要素唯一确定:一要看它是不是不足构件,二要看它是不是占着中心单元.

W Y G O L R B

正常

占不占
中心单元

不足构件

占中心的
不足构件

图 6. 七个索马构件的各种可能摆放位置.

索马游戏的深藏机密往往使得在前几件中如果有一件放错了地方,那就会徒劳无功地浪费掉许多时间来企图安放其他各件. 要想发现错误,往往要花费很大代价. 譬如说,开始时你想把白色构件的角块放到立方体的角上时,情况就是如此. 但如果你把组件放在图上的位置时,那么

你很快就找出了问题的一种解答. 本问题一共有 240 种解答，它们是在 1961 年的一个多雨的下午由 J・H・康威与 M・J・T・盖伊完全通过手算而找到的. 本章增补材料中的 SOMAP 全图(索马谱)将使你得出其他 239 个解答，如果你已经找出了 1 个解答的话 —并且能够在图中明确标出！

霍夫曼的算术—几何平均数趣题

数学上，有一个众所周知的，关于算术平均数与几何平均数的不等式：

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

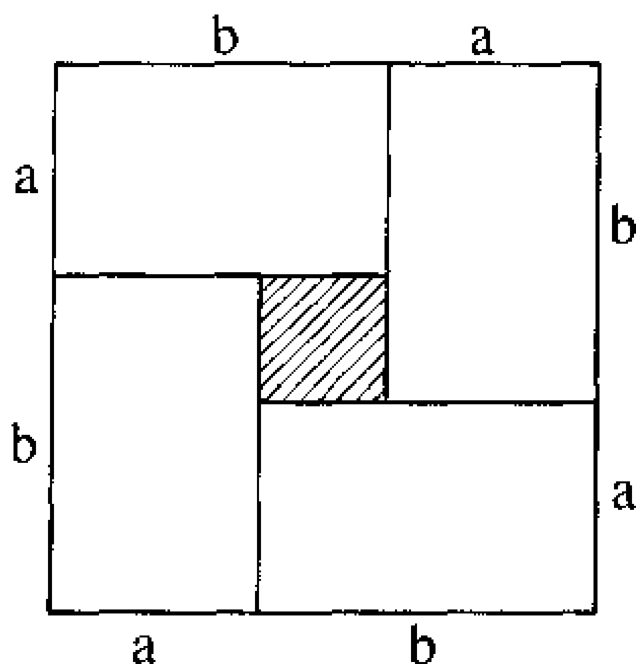


图 7. 算术—几何平均数不等式的证明.

图 7 提供了它取下列形式

$$4ab\leqslant(a+b)^2$$

时的简洁证明. 此不等式的三变量形式

$$27abc\leqslant(a+b+c)^3$$

促使迪安・霍夫曼(Dean Hoffman)思考：27 块 $a\times b\times c$ 的物体是否永远能装得进边长为 $a+b+c$ 的一个立方体？如果 a,b,c 的数值靠得很近但并不相等时，这看来是相当困难的一个趣题.

一个很好的实际问题是要把

27 只 $4\times5\times6$ 木块装人一只 $15\times15\times15$ 的箱子.

选取这些数值时，以及取其他数值而满足下列条件：

$$\frac{1}{4}(a+b+c)<a<b<c$$

时，可以证明，三只木块的每个垂直堆必须包含每个高度 a，b，c，而在每个水平层面上正好要有这样三个高度．在每个面上必定要有同样的、未使用的面积（在上述 4×5×6 木块的情况下，这样的面积数值是 3 个平方单位）．

如果你不把这种暗藏的机密时刻牢记在心，要想解决这个趣题几乎是不可能的，因为你会不知不觉地犯下一些错误，例如把三只高度为 5 的木块放在一起，或者在某一面上留出一个 2×2 空洞．当你真的把这些知识牢牢记住了，那么问题就会容易得多，但仍然非常困难！在本章增补材料中，你可以找到解决霍夫曼问题的若干信息．

3×3×3 立方体的一个着色问题

在霍夫曼的 3×3×3 趣题中，沿着纵、横、斜任意一个方向上的三个长度必定是不相同的．

你能不能在 3×3×3 的棋盘上用三种不同颜色将它的每个单元着色，三种颜色的每一种，都要使用同样的次数（每种 9 次），要求在 49 条 $\left(49=\frac{1}{2}(5^3-3^3)\right)$ 纵、横、斜线上，没有一条线用过三种不同颜色，也没有一条线拥有相同颜色？

铅丝与绳索趣题

图 8 画出了一些拓扑游戏，它们可以用金属丝* 与绳子来制造．可惜制造商不见得对它们了解得很透彻．

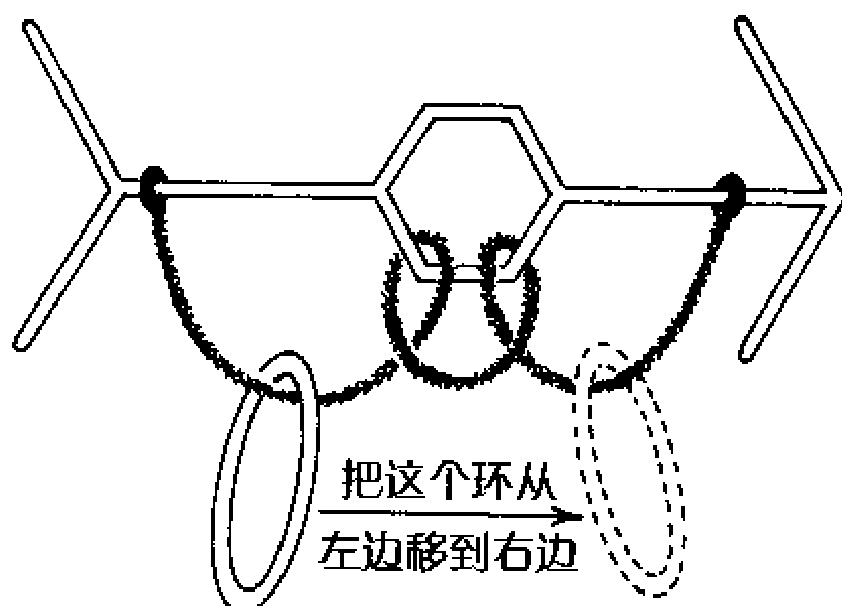
你别指望对这种形状变化多端的东西了解得很完善，但实际上存在着一个相当带有一般性的原理，它们可以帮助你解决一大批拓扑游戏．

魔镜方法

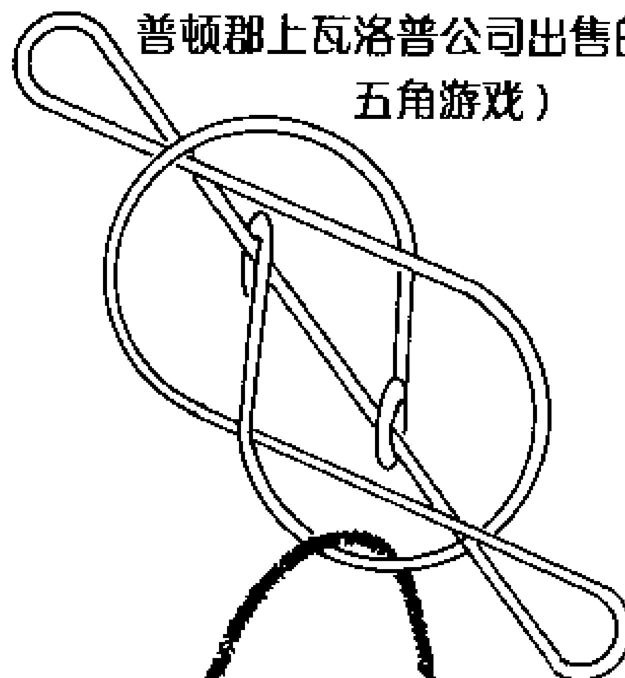
让我们说一下图 8(c)所给出的拓扑游戏（英国伦敦特洛波尼有限公司生产，商品名称叫做"发狂的环圈"）的单结形态．游戏目的是要求你把绳子从刚性的铅丝框架（见图 9(a)）中拿出来．

---

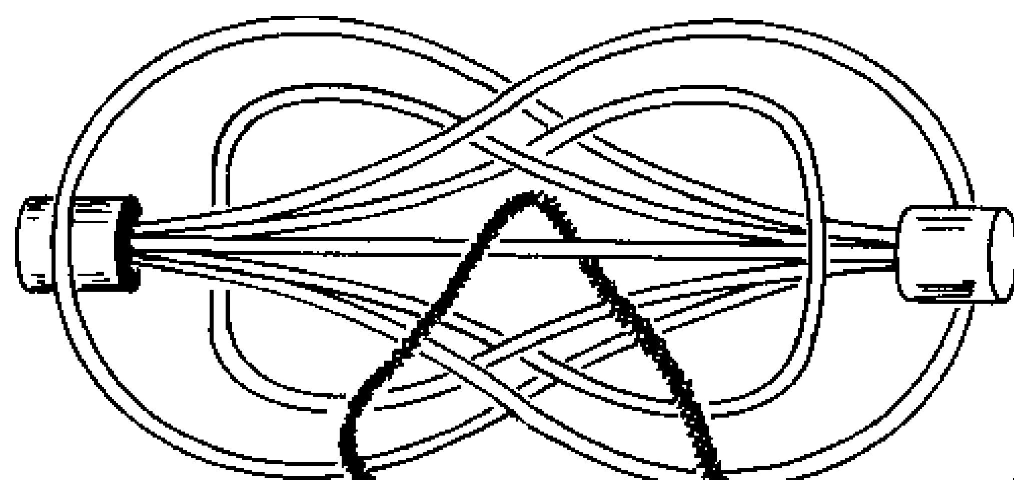
* 译者注：除珍藏品外，我国民间艺人一般都用铅丝制造．



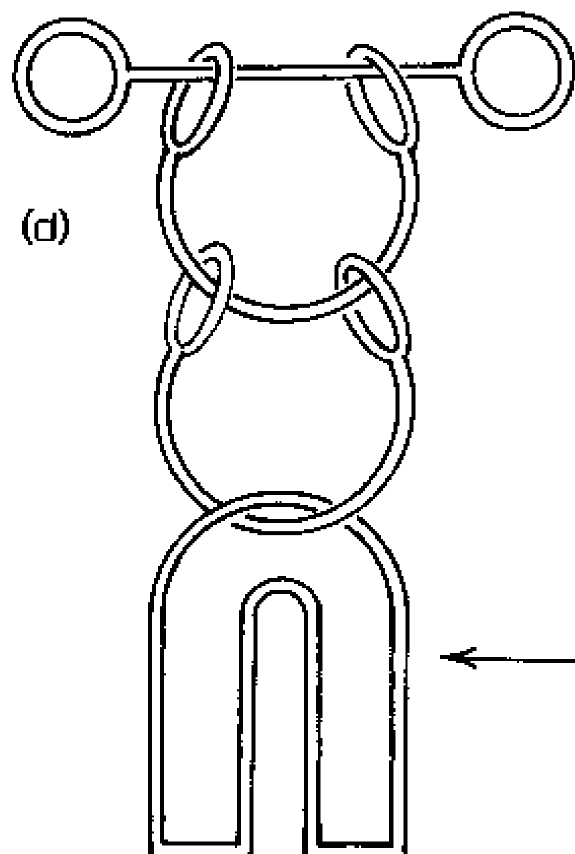
(a) 巧妙的箭
把这个环从
左边移到右边



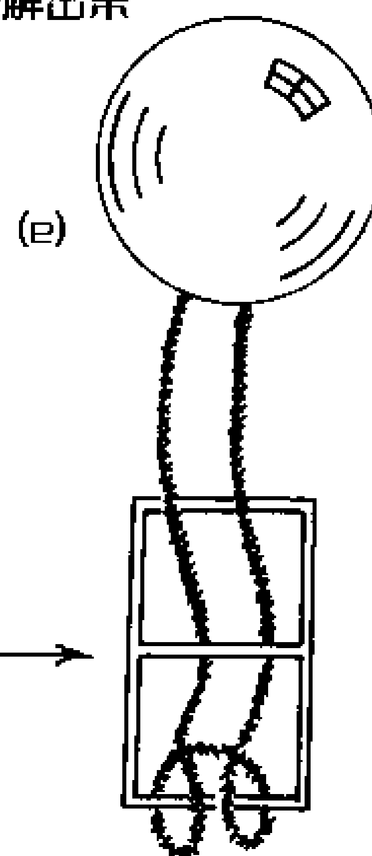
(b) 加倍三重乐谱记号（联合王国汉普顿郡上瓦洛普公司出售的五角游戏）



(c) 发狂的环圈（伦敦特洛波尼公司产品）
把这些绳子解出来

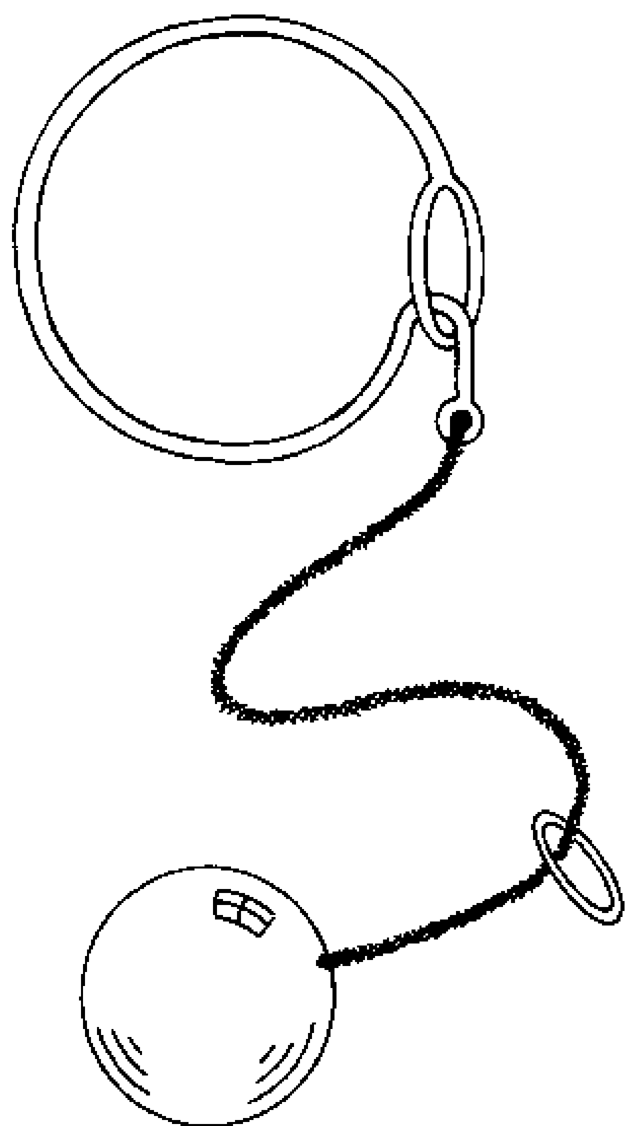


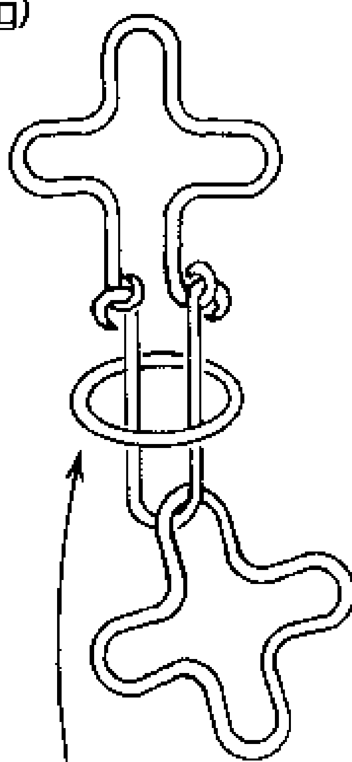
(d)

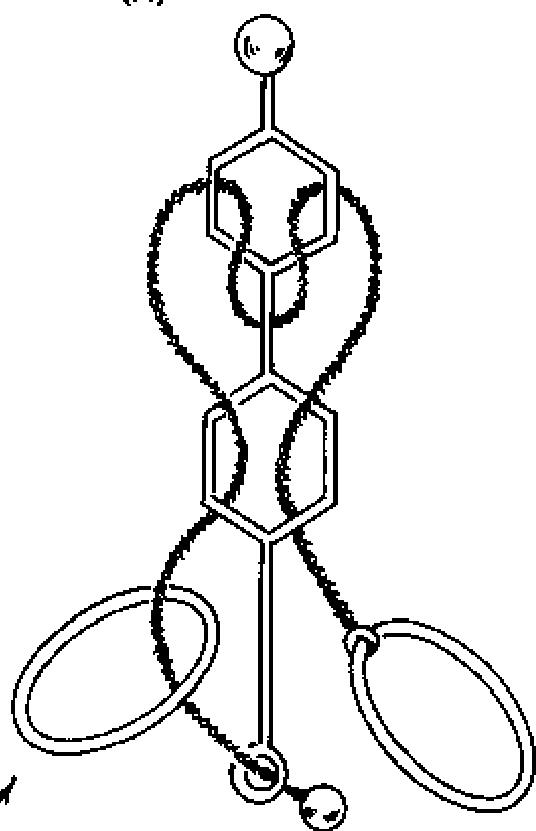


(e)
把这些东西
解出来

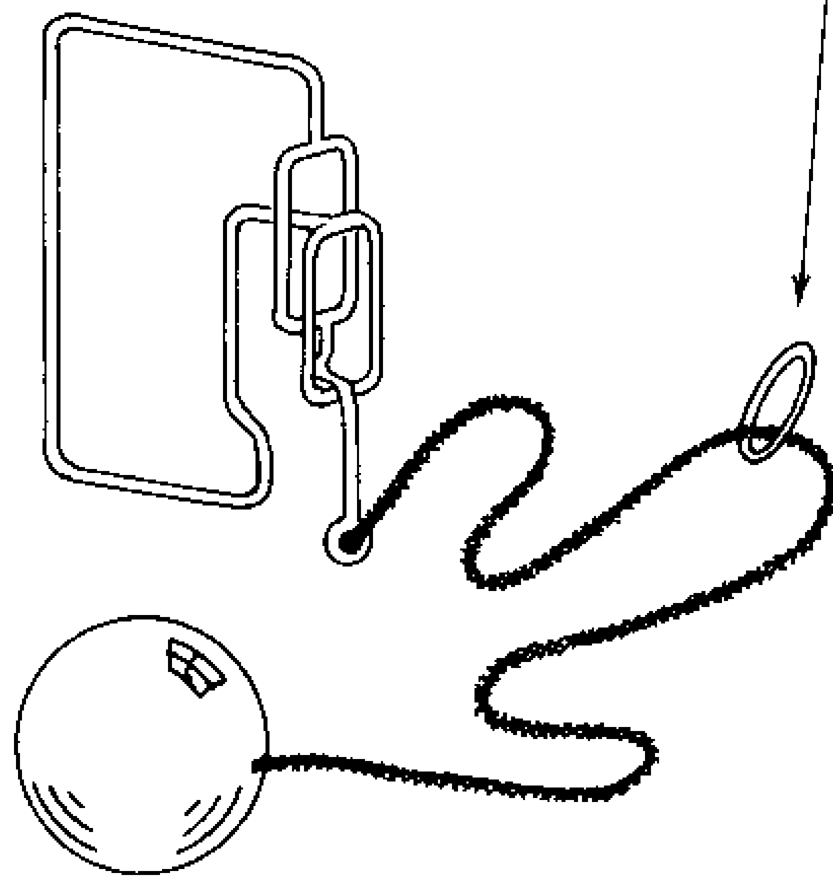
图 8. 把环圈，绳子……

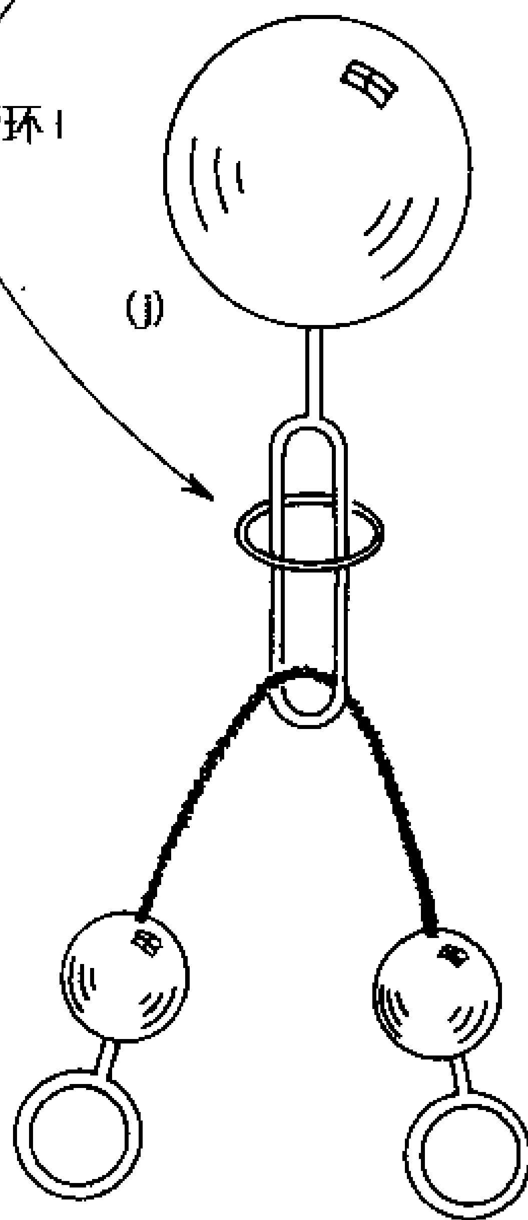






请解出这些环！





……与其他东西解出来.

如果刚性的铅丝能够稍为伸展，问题的解决是相当容易的. 先把绳子压扁，使它不要挡住道路(见图 9(b))，然后我们伸展环圈，使它通过两头(见图 9(c)). 接着又使它们收缩回来(见图 9(d))，这样一来，我们就可以把绳子直接拉出来(见图 9(e))，尔后又把环圈恢复原状(见图 9(d))，尽量小心，不要把东西弄坏，从而使主人感到懊恼.

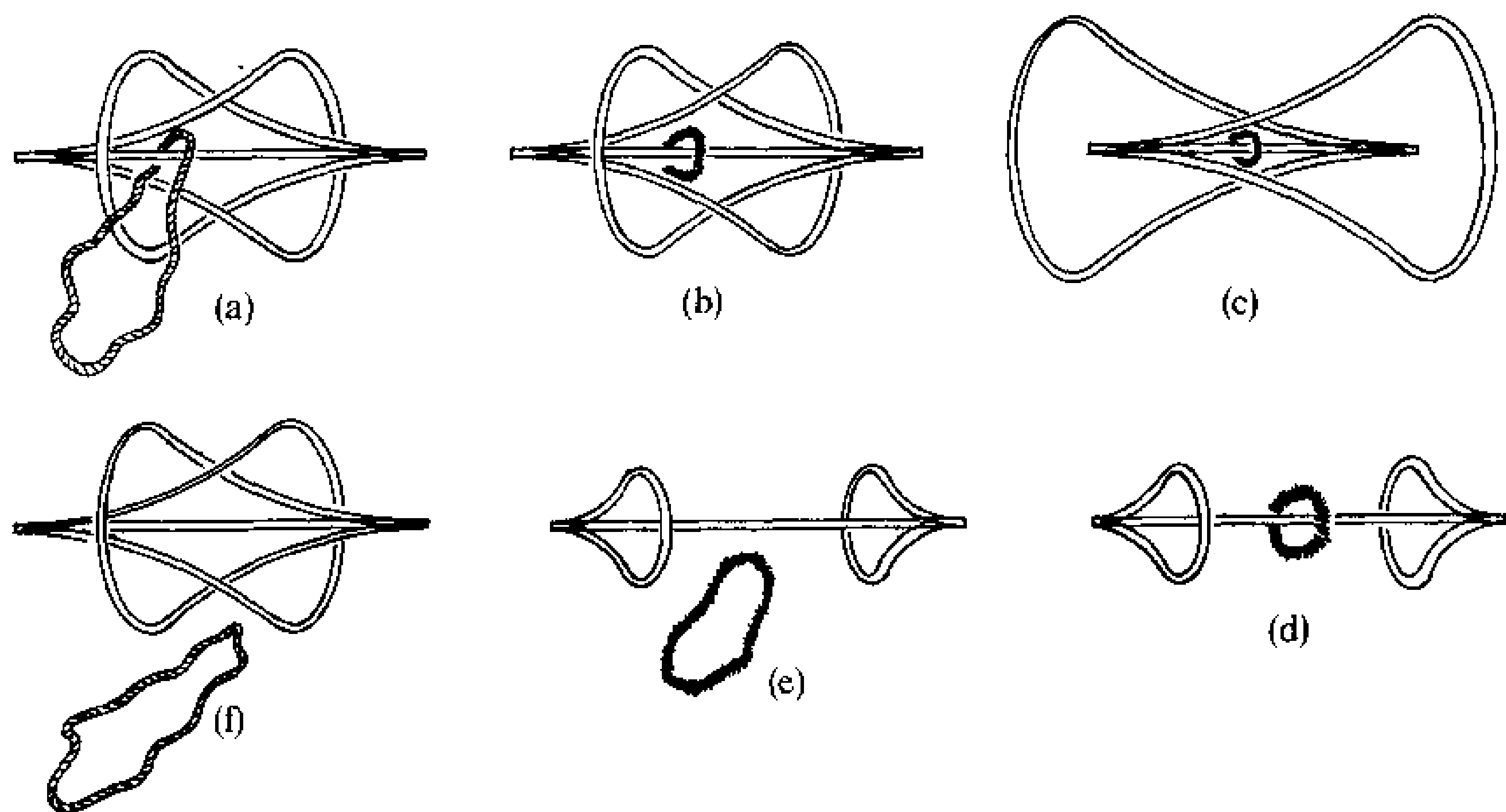


图 9. 解开发狂的环圈.

现在可以看到，从图 9(b)变到图 9(d)，可以通过连续的畸变空间而实现. 可以想像该游戏是在一种柔顺如意的胶冻中表演，如果圣母能造出一个的话. 在老式的展览会里有着一些特殊镜子[×]，它们可以把空间扭曲得十分可笑. 现在让我们设想有一面魔镜，它具有一项奇异性质：所产生的畸变正好能使图 9(b)看上去像是图 9(d). 把铅丝框架绝对静止地执持在魔镜前(图 10(a))，并将绳子拧成一束，直至它几乎成为轴上的一个点. 由于空间的畸变是连续的，于是它的像几乎也是像轴上的一点.

现在你非常谨慎小心地移动绳子，使它在魔镜中的像完全脱离铅丝，在某个距离很小的地方缩为一点. 现在，再次由于畸变是连续的，所以真正的绳子目前几乎也像是一个点，并且离开绳子有一些距离. 这么一来，你就解决了问题. 这难道不是轻而易举吗？

× 译者注：例如从前上海“大世界”游乐场的哈哈镜.

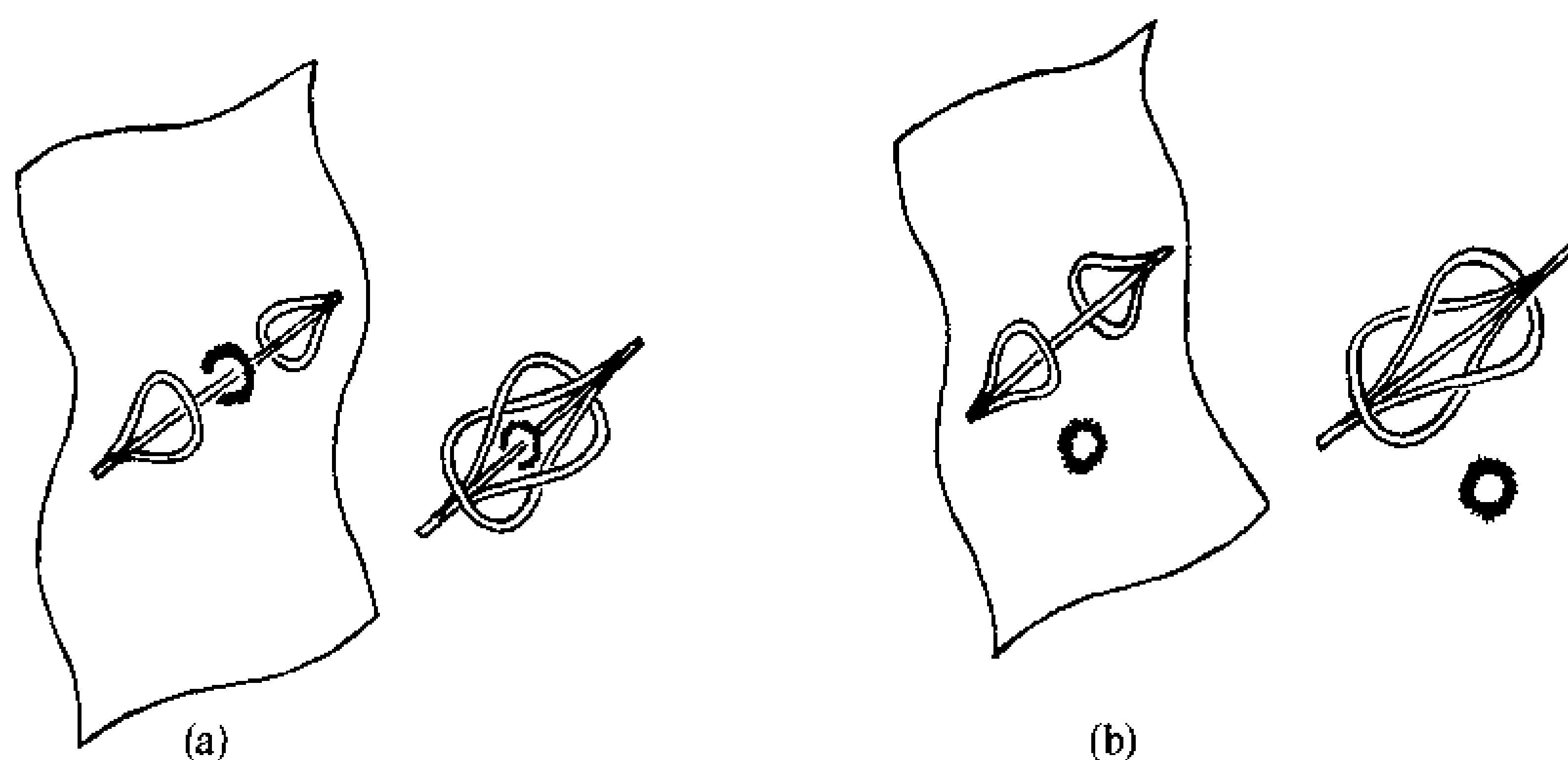


图 10. 魔镜.

在这种情况下，设想一个中间畸变往往是有用的. 在图 11 中，我们图示了中间畸变的单结或狂圈的两个阶段. 现在你或许对图 8(c)的双结形式以及图 8(b)的加倍三重乐谱记号游戏(联合王国汉普顿郡上瓦洛普公司，五角游戏产品)在心理上已经作好准备，是吗?

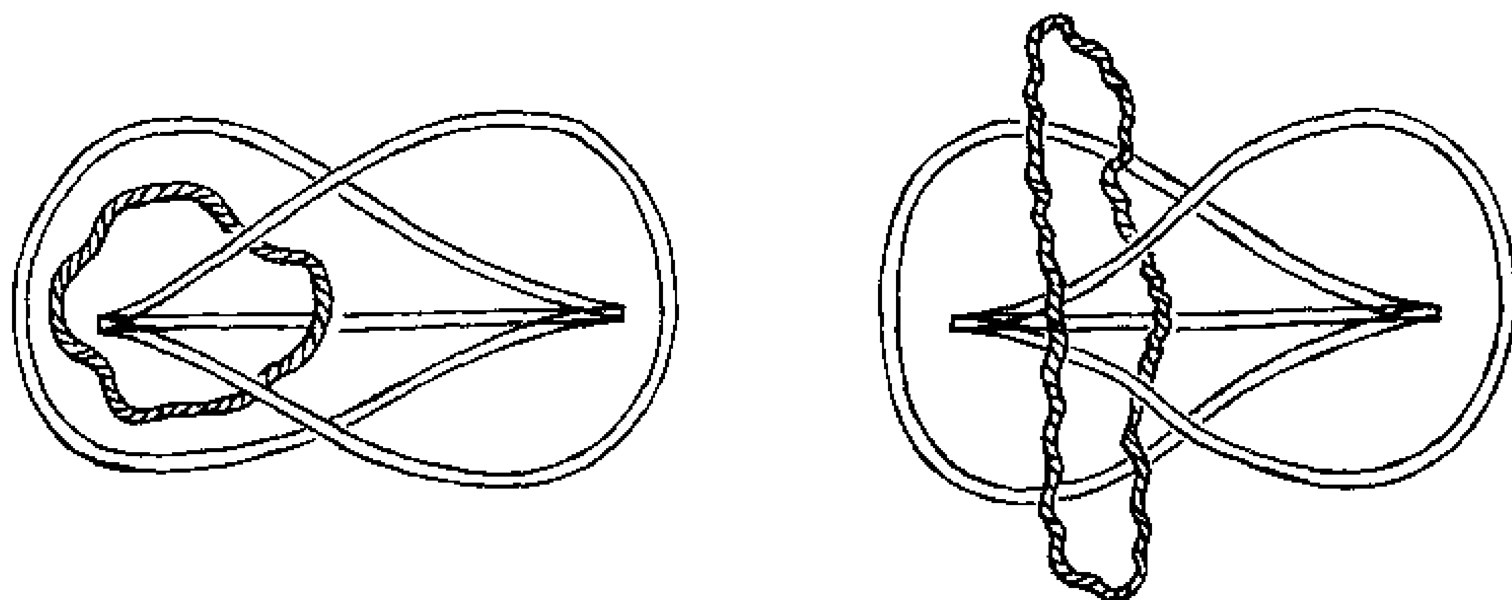


图 11. 一面畸变较少的镜子.

如果一个拓扑游戏由一块完全刚性的部件，若干个完全柔性的部件所组成，那么你一般总是可以应用魔镜方法，设想刚性部件也是柔性而弯转如意的. 譬如说，不用胶水，好像根本就不可能用纸片打成图 12 中的辫结. 但这个问题实际上却容易解决. 做皮革的手艺工人对它很熟悉(你可以在一端编辫子而设法解开另一端所形成的结).

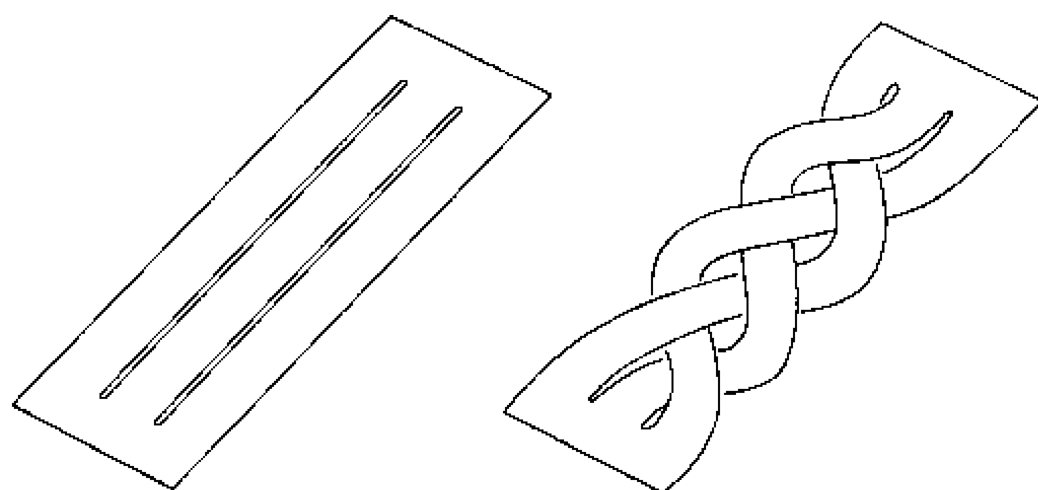


图 12. 你能把纸片编成辫结吗?

傻瓜的辫结

此问题首次出现于本书. 要求把绳子从刚性的铅丝框架中解脱出来(见图 13(a)). 想来你会知道怎样解决,因为在合适的魔镜中它看起来就像是图 13(b).

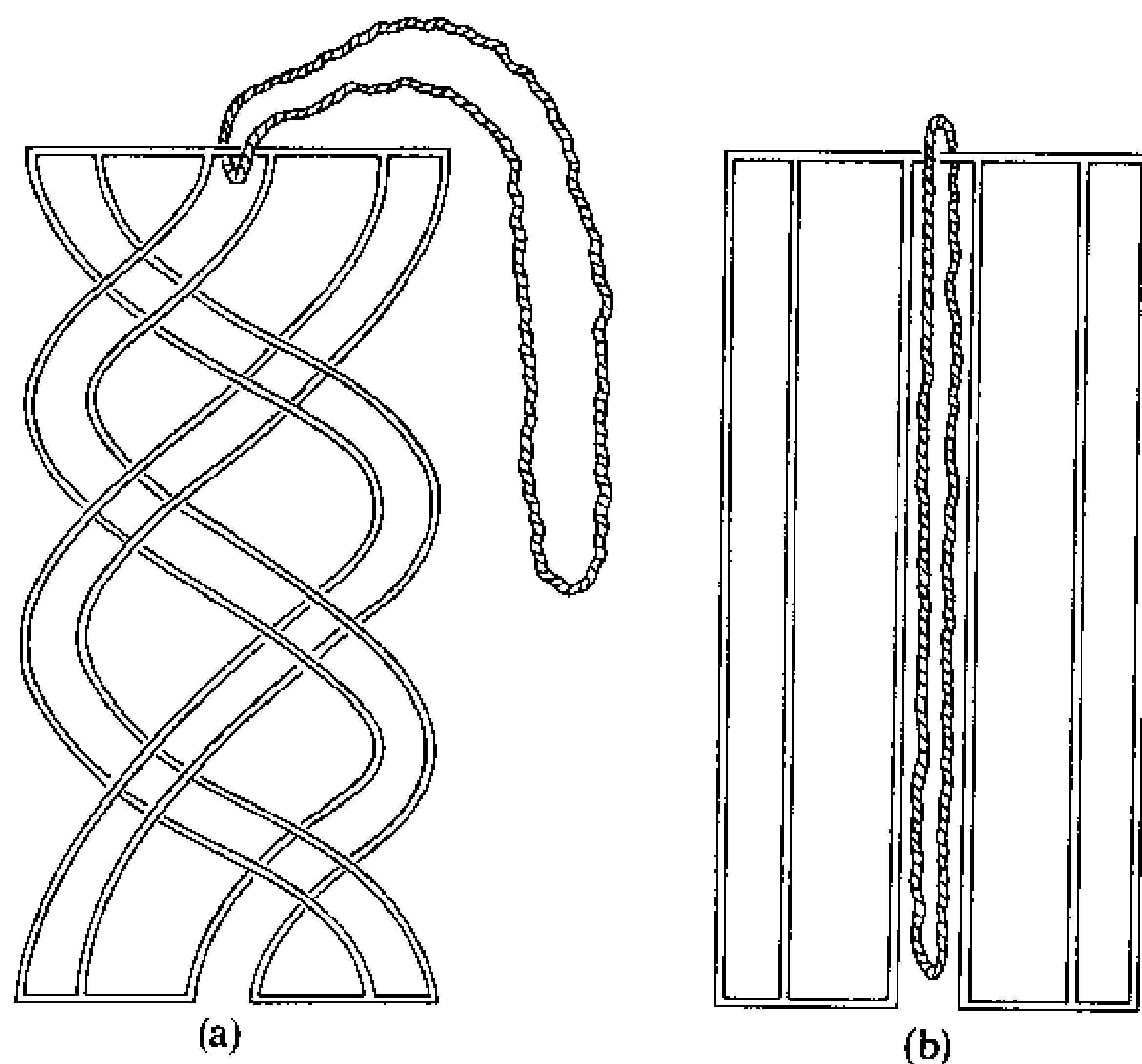


图 13. 傻瓜结在"照妖镜"下现出了原形.

巧妙的箭

图 8(a)是我们所设计的.这种玩具的形态,除此之外,它还有各种不同形状.通常所能见到的基本形态是一根木头横杆,上面钻出一个洞眼以代替我们的六边形.我们甚至看到一种变化型式,其中箭的首尾变成了巨人的手臂,而中央的洞穴成了他的鼻孔,尽管如此,解法完全是一样的!你可以通过一种魔镜法的改进型——魔幻电影法来解决它以及类似的游戏.

魔幻电影法

如果"巧妙的箭"游戏中有一只比图 8(a)小得多的环,那么解起来是没有困难的;我们只要把小环沿着绳子从箭尾滑到箭头就行了.假定我们有一位研究运动学的朋友要对它拍电影,但由于他的滤光镜出了点毛病,绳子在镜头上看起来效果不太好.镜头上显示出来的只是刚性的箭头框架以及在空中晃荡的小环.事实上小环向下运动穿过六角形(图 14(a)中的 1,2,3),环行扫描(图上的 3,4,5),安然返回(图上的 5,6,7).

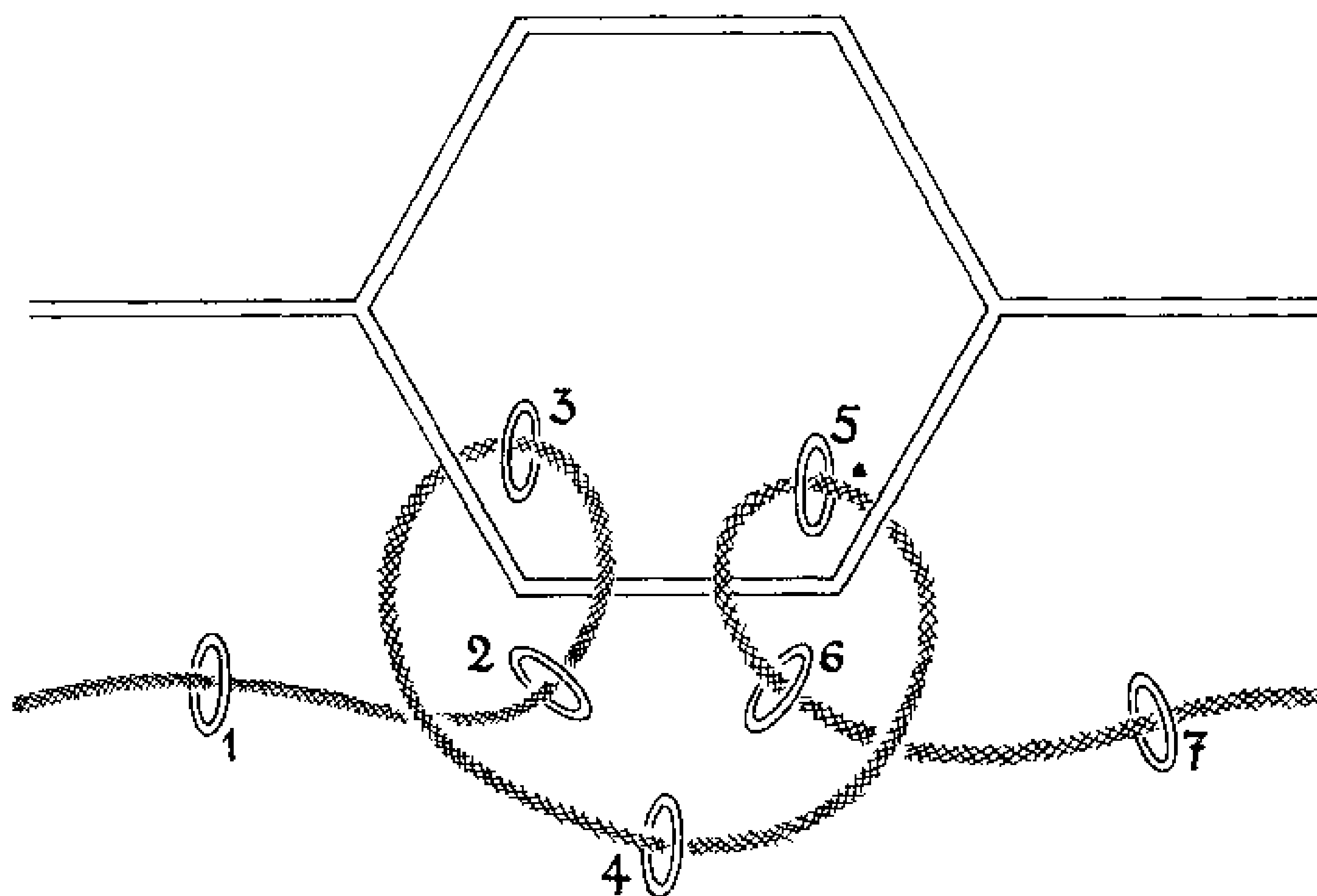


图 14(a). 魔幻电影 M_0.

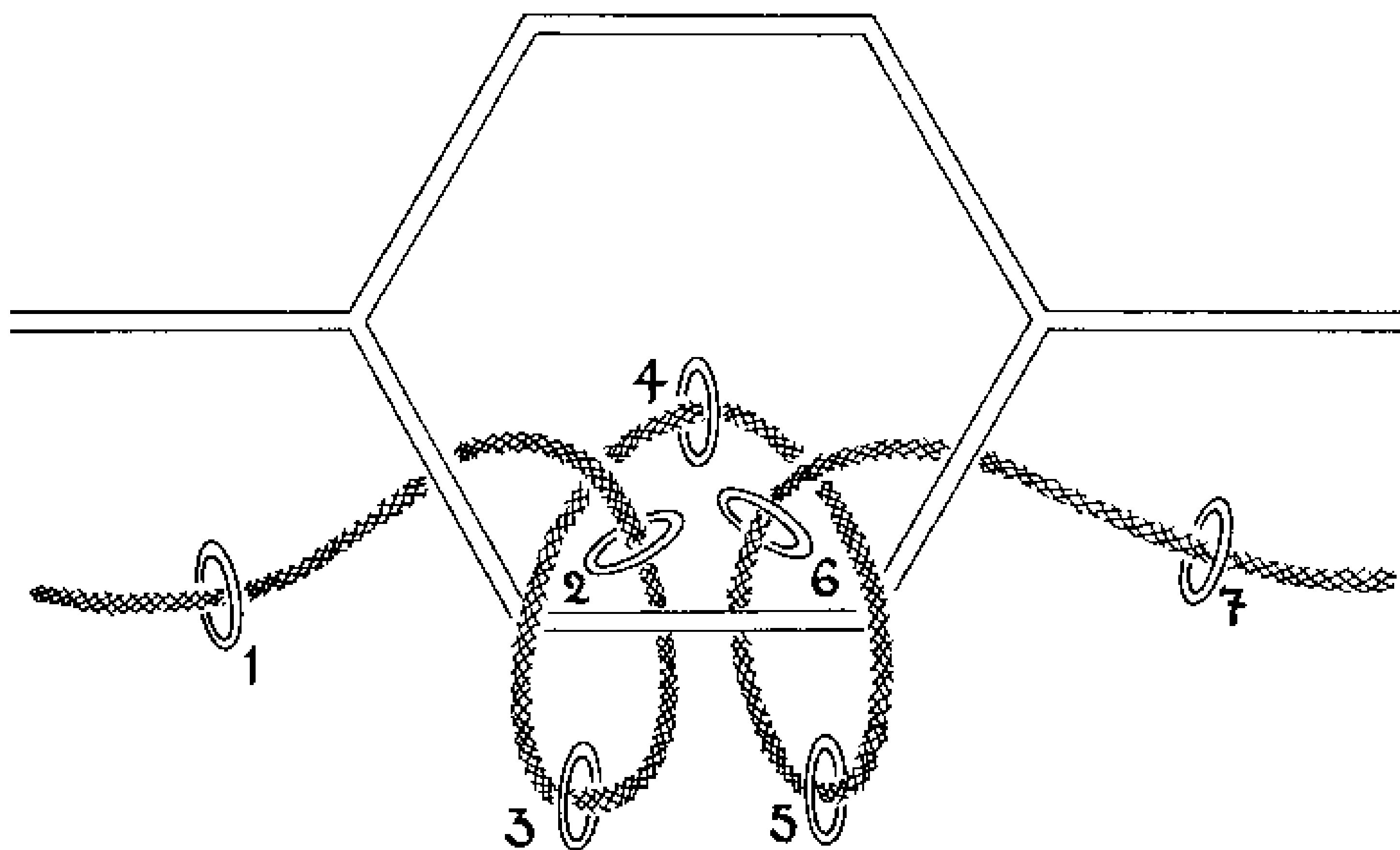


图 14(b). 一部中间状态的半-魔幻电影.

我们所要做的是使用一种能扭曲时间与空间的魔镜之类的东西去注视着这部电影. 我们的朋友将作出安排,他把电影交给动画片制作部门,后者能迈开小步子,一点一滴地改变整部电影,先变到 M_1,这时小环向下穿过六角形,在那里略作一些转悠,然后再向上返回来,……其次变到 M_2,这时小环在返回之前已经难得再转悠了,……继而再变到 M_3,小环胆怯地在六角形中泡了一泡……然后又变到 M_4,小环连小步都迈不开了……接着又变到 M_5,M_6,……指环的大小越来越大,直至它大得穿不过六角形了.

在这些动画片电影中,困难在于我们看不见绳子! 但由于我们企图通过一系列动画片实现时-空的连续扭曲,我们可以请求动画片制作部门加班加点,把绳子也充实进去. 譬如说,最后的电影 M_{10} 将能使制片人满足其愿望:它能显示出本问题的一个解法.

在通常情况下,即使整个过程只是半魔幻性质的,它也起作用. 这一系列电影中真正要发生的是:指环穿过六角形的漫游将逐渐被中间绳圈的拉动所取代(穆罕默德*. 爬山). 在图 14(b)中我们揭示了一部处于中间状态的电影,这时你很难说穿过图上在位置 4 的指环的绳圈究竟是在六角形的上面还是下面. 从而你就可以解出问题:当绳圈在六角形的下面时,把指环从 1 通行到 2 再到 3,然后把绳圈略向上抬,让指环从 3 通行到 4 再到 5,接着,又将绳圈往下落,使你能将

---

* 译者注:英语中的另一拼写法,犹如中文里头的异体字,其意思就是穆罕默德.

指环从 5 通行到 6 再到 7，由于所有这些电影都能用一个同实物一般大小的指环来拍摄，这就解决了问题.

以上论证也使我们把此种概念推广到傻瓜结问题. 假定一个难题有着任意个数的刚性组件（例如我们的箭与指环）与某些柔性组件（譬如说我们的绳子），如果刚性组件变成柔性时你能找出一种解法，若在此解法中，刚性组件的动作能连续地扭曲为可允许的刚性动作，那么你就可以利用魔幻电影法来解决原来的问题. 用拓扑学家的技术语言来讲，我们用的是所谓同构扩展原理.*

宴会游艺与中国九连环

你一定看到过这种宴会游艺吧：一对青年男女不准解开绳子的结而彼此分离. 通常情况下，他们总是要在别人的臂肘里上窜下跳而毫无效果，引起一阵阵的哄堂大笑，最后才找出真正的解法.

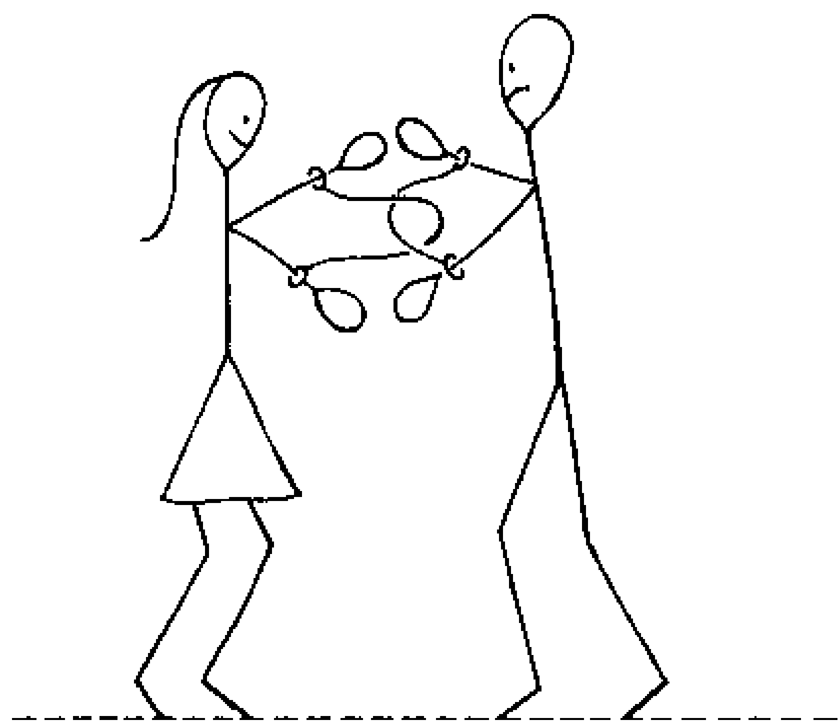


图 15. 青年男女，难分难解.

让我们仔细看一看其中的一个拳头（图 16(a)）. 利用一面真正的魔镜，它看来就像图 16(b)，于是解法就很明显. 不过，倘若你的镜子只具有半魔幻性，那就能略会更容易地看出你应采取的动作（图 16(c)）.

---

* 译者注：事实上对不懂魔术的拓扑学家来说，仍然对之一筹莫展.

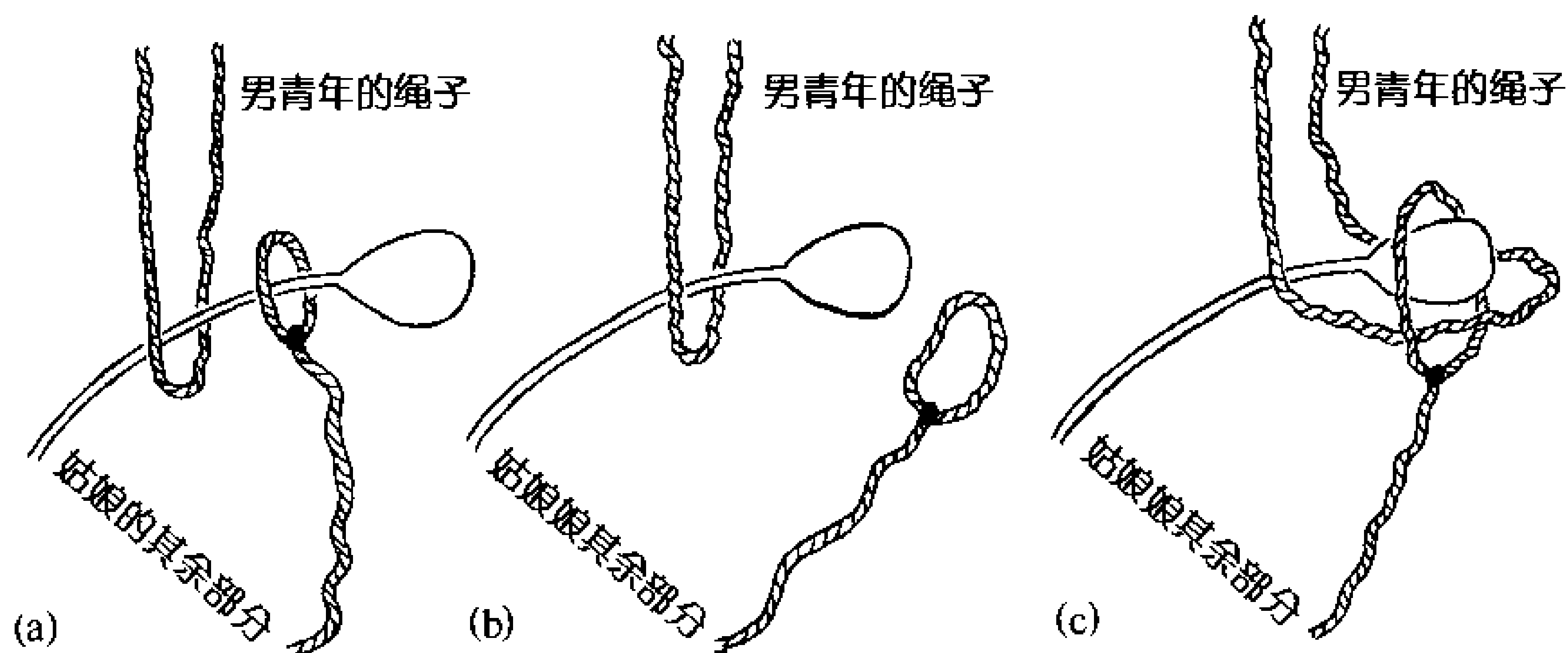


图 16. 男青年终于摆脱了姑娘.

我们的铅丝与绳子小玩意儿中,有一个与此非常类似.底部那个像宽松裤形状的薄片(见图 17(a)),是用铅丝做的,不是绳子.但其形状和大小正可以像绳子那样的伸进套出以使两者分离.在图 8(d)中你可以看到一个类似的小玩意儿,但中间又多出一个小部件.

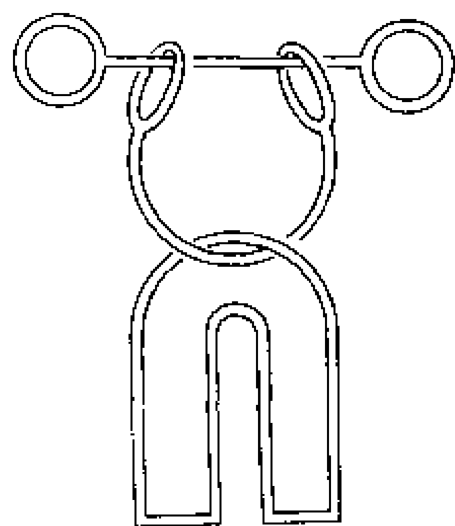


图 17(a). 挂钩上的宽松裤.

图 17(*b*)的魔镜表明,这个问题肯定有解,如果铅丝做的"宽松裤"能够被一根完全柔性的绳子所取代的话——但这个滑稽可笑的形状再次表明它能克服缺乏柔性的弱点.

中国九连环玩具是这一原理的推广,但环数并非一成不变,可多可少.魔镜法表明,图 18(a)中的那根绳子是可以取下来的.在解开过程中它将到达图 18(b)中长方形框柄 * 所到达的位置,

---

* 译者注:此处译文采用"九连环"的规范化术语.在目前一般书刊中,名称还较混乱,未能完全统一.



而把它解开就是传统的中国九连环智力玩具了.

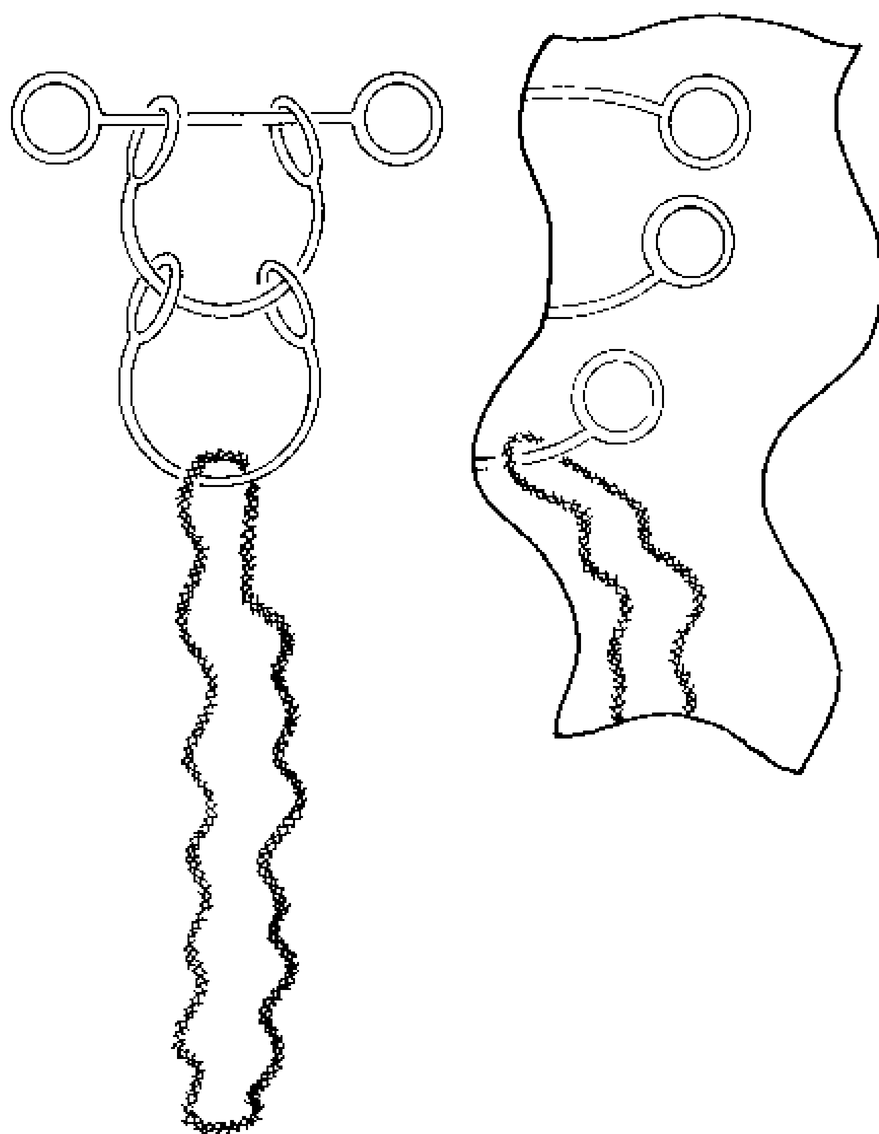


图 17(b). 魔镜中出现的另一种形像.

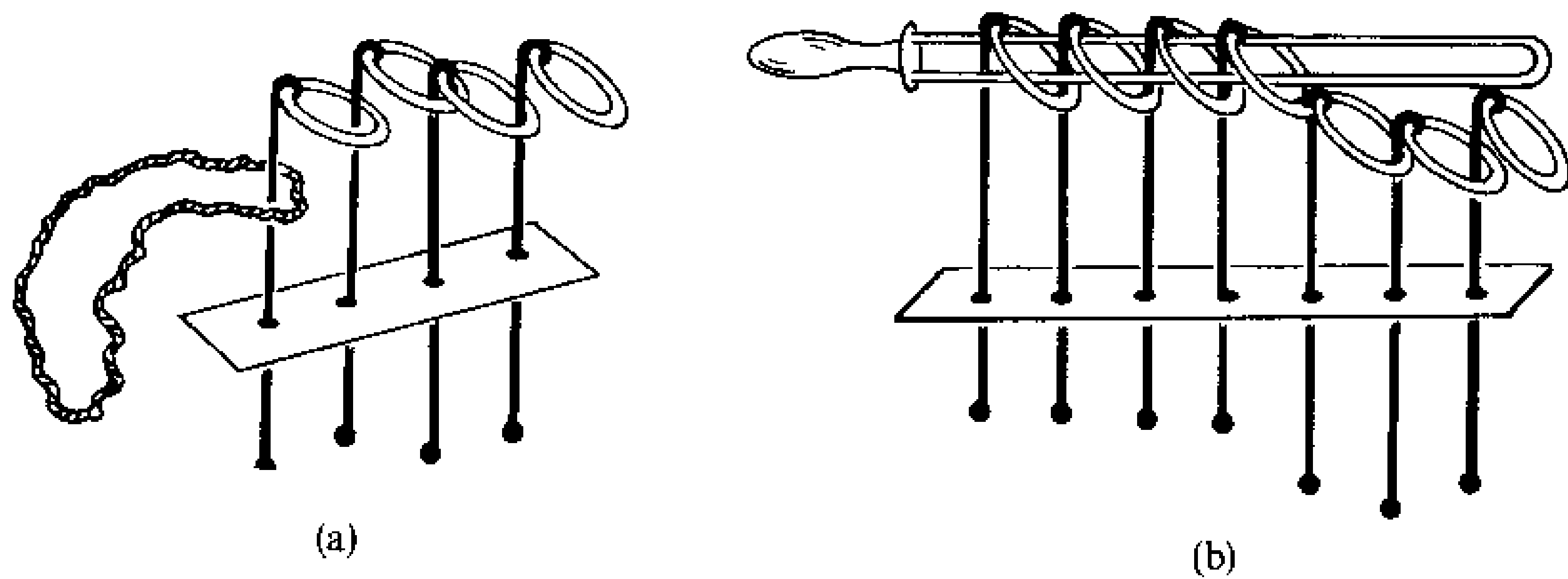


图 18. 中国九连环智力玩具.

中国九连环与格雷码

图 19(a)揭示了一只七连环玩具的某一状态. 我们把它称为

1　0　1　1　1　0　0

因为编号与之对应的环

64　32　16　8　4　2　1

套不套在框柄上的情况是:

在　不在　在　在　在　不在　不在

试问,同它相邻的状态是什么?

你们基本上不需要用魔镜去观察最右边的那只套环(编号为 1 的)的情况,它是随时可以改变的(见图 16(b)),所以上述七连环的状态与下面的状态

1　0　1　1　1　0　1

相邻. 但它也与

1　0　1　0　1　0　0

相邻.

为了看清楚这一点,可将编号为 8 的那只套环像图 19(a)的虚线箭头所示,穿过框柄,然后又像图 19(c)那样套出来.

一般地说,最右边的那只套环(编号为 1)可以随心所欲地在框柄上套进套出,因而

……? ? ? 0

的邻居就是

……? ? ? 1

但若某一只环的紧邻右环套在方形框柄上,而右面其他各环都不在框柄上时,则该环也可以套进套出,也就是说,状态

……? 1 1 0 0 0

与状态

……? 0 1 0 0 0

是紧邻.

掌握了这些紧邻规则之后,n 环智力玩具的 2^n 种状态的完整集合就能形成一个连续序列. 譬如说,$n=4$ 时:

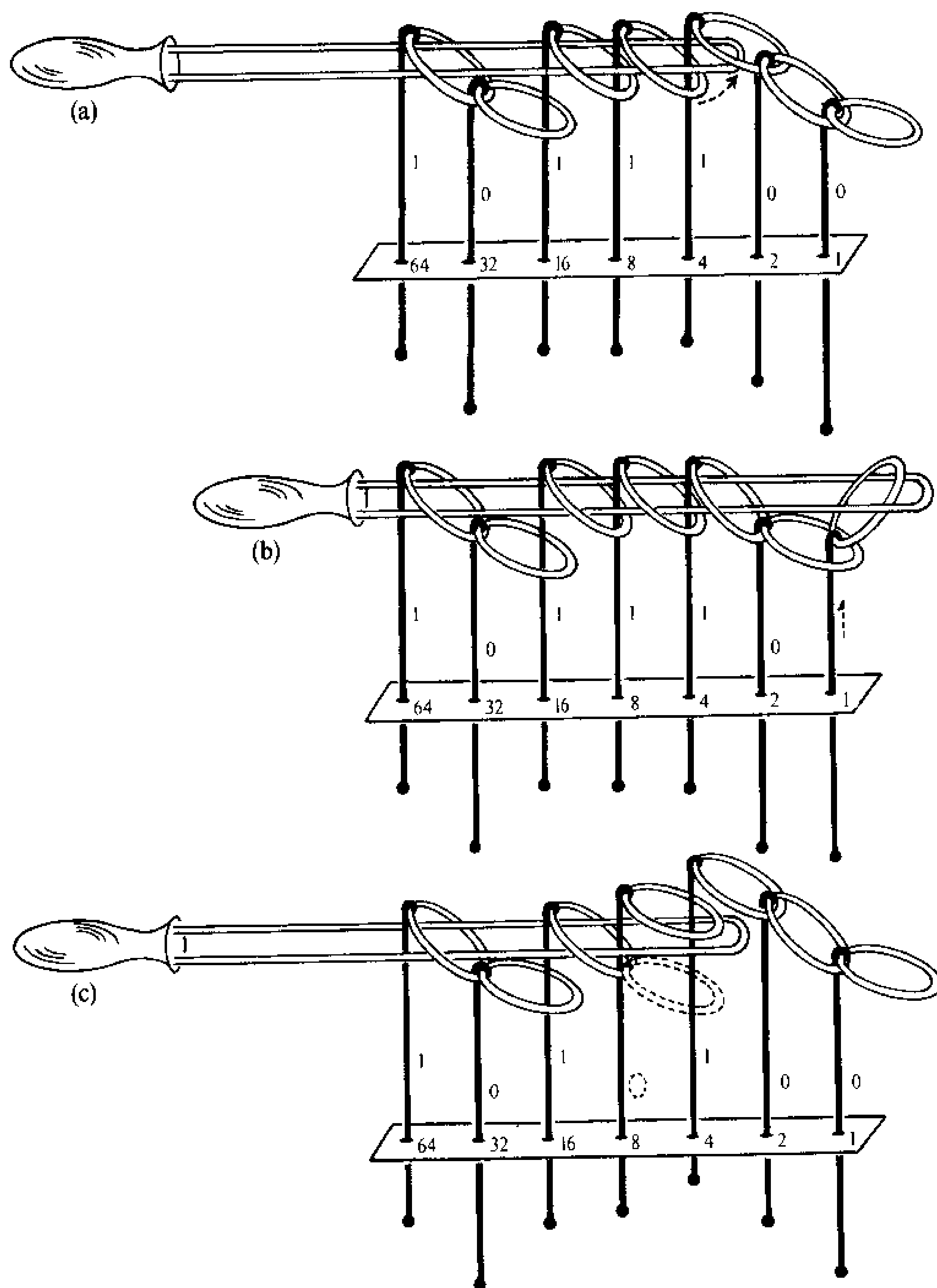

(a)
1
0
1
1
1
0
0
64
32
16
8
4
2
1
(b)
1
0
1
1
1
0
64
32
16
8
4
2
1
(c)
1
0
1
1
0
0
64
32
16
8
4
2
1

图 19. 格雷码与七连环.

	环的编号	8	4	2	1	
状态#8,	即	1	0	0	0,	用 15 步可解开,
状态#9,	即	1	0	0	1,	用 14 步可解开,
状态#11,	即	1	0	1	1,	用 13 步可解开,
状态#10,	即	1	0	1	0,	用 12 步可解开,
状态#14,	即	1	1	1	0,	用 11 步可解开,
状态#15,	即	1	1	1	1,	用 10 步可解开,
状态#13,	即	1	1	0	1,	用 9 步可解开,
状态#12,	即	1	1	0	0,	用 8 步可解开,
状态#4,	即	0	1	0	0,	用 7 步可解开,
状态#5,	即	0	1	0	1,	用 6 步可解开,
状态#7,	即	0	1	1	1,	用 5 步可解开,
状态#6,	即	0	1	1	0,	用 4 步可解开,
状态#2,	即	0	0	1	0,	用 3 步可解开,
状态#3,	即	0	0	1	1,	用 2 步可解开,
状态#1,	即	0	0	0	1,	用 1 步可解开,
状态#0,	即	0	0	0	0,	现在已解开了!

如果只告诉我们状态数,即套在框柄上各环的编号数之和,我们能不能准确地说出把各环统统解开究竟需要若干步呢? 此问题的解答揭示了它与尼姆加法的神奇联系! 当你的状态数为 n 时,需要的步数是

$$n \overset{*}{+} \lfloor n/2 \rfloor \overset{*}{+} \lfloor n/4 \rfloor \overset{*}{+} \lfloor n/8 \rfloor \overset{*}{+} \cdots = m.$$

譬如说,当状态数为 13 时,你正好需要

$$13 \overset{*}{+} 6 \overset{*}{+} 3 \overset{*}{+} 1 = 9$$

步. 如果告诉你一个状态数 m,则从解环开始算起,走过 m 步以后,各环的状态数为

$$m \overset{*}{+} \lfloor m/2 \rfloor = n.$$

例如

$$9 \overset{*}{+} 4 = 13.$$

现在让我们算一算,在七连环问题中,从解环开始算起,经过 99 步以后,将达到什么状态呢? 由于 99 与$\lfloor 99/2 \rfloor$的二进制数为

	1	1	0	0	0	1	1
		1	1	0	0	0	1
其答案为	1	0	1	0	0	1	0

再问一个问题,从开始解环算起,要经过多少步数才能到达状态

1 1 0 1 1 1 1?

答数可由 7 项尼姆加法求得,见下列算式:

	1	1	0	1	1	1	1
		1	1	0	1	1	1
			1	1	0	1	1
				1	1	0	1
					1	1	0
						1	1
							1
=	1	0	0	1	0	1	0

它相当于十进位数 74.

在各种自动控制装置中需要编制出一种重要的编码系统,其特点是,相邻的数字,其代码只能在一个位置有差异,上述的代码即具有此种重要特性,它就是工程师们熟知的格雷码.它也被用于传输电视信号.一个多世纪以前,L·格罗斯(L. Gros)先生发现了它同九连环的联系.顺便说一句,有着好多个纽结的狂圈同三进位的变相格雷码也有联系.

九连环虽然号称起源于中国,但看来它是一个中世纪的、斯坎迪那维亚半岛人的发明*,原来用作一种组合锁.**近年来,玩具市场上出现了一些机械与电子智力玩具,虽然外表完全两样,

---

* 译者注:原文如此,不知作者有何根据,但包括李约瑟博士在内的绝大多数学者都认为九连环起源于中国(宋、元以前).

** 译者注:九连环在中国已有八百年以上的历史,据说在宋代就很流行.过去曾有人把巧环当作锁来使用,即把框柄和基架分别固定在门上,要锁的时候,只要把框柄套进去,要开的时候就按照一定的方法把框柄套出来,不必另备钥匙.但是因为开启太费时间,终究不方便,后来就逐渐不用了.详见俞崇恩先生与美国张卫女士合著的《Ingenious Rings》(有中文本)的序言.

但应用了同样的数学结构.

梵塔*

在休闲娱乐时,此游戏主要由于同印度寺庙的一个神奇传说相联系而在智力游戏家中间出了名.庙里的一些和尚,正在一刻不停地把 64 枚金片从第一根宝石针搬到第三根宝石针上(见图),其规则是

一次只能搬动一片;

大片不能压在小片之上.

图 20(a)画出了小型游戏的初始状态,在图 20(b)中给出了经过 13 步之后所到达的状态.

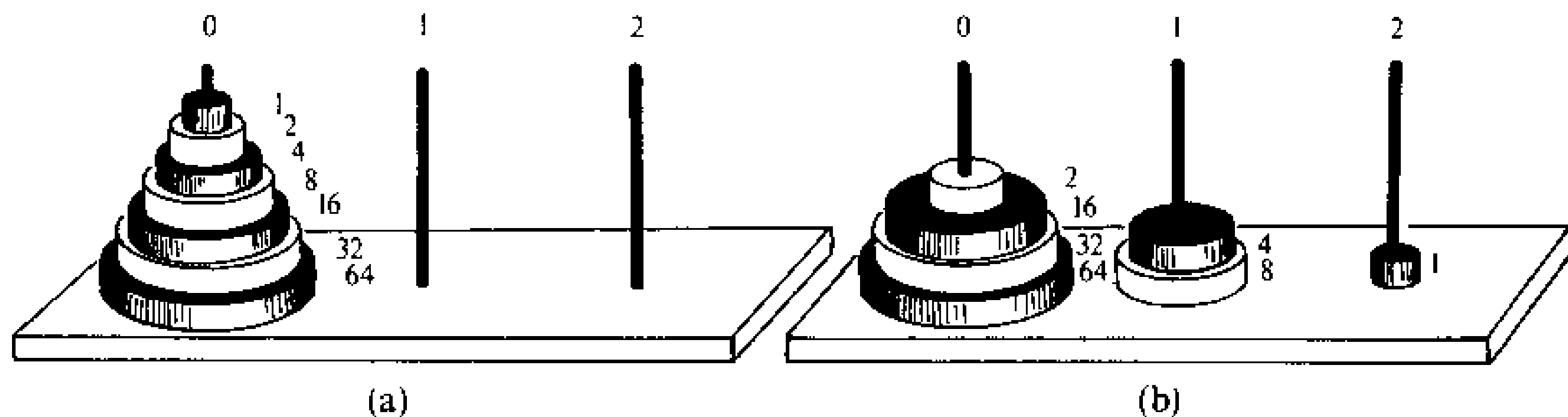


图 20. 梵塔.

人们在做这个游戏时可能犯错误,但它同九连环不一样,对后者来说,人们可能犯的唯一错

* 译者注:原书及许多书上都称此游戏为"河内塔",按河内是越南的首都,此游戏根本不是越南人的发明,在越南亦并不流行.有可能以讹传讹.译者初次见到它的文字记载是在扬州中学数学教师,中国数学会第一届(1935 年)理事陈怀书先生的著作《数学游戏大观》(此书二十年代由上海商务印书馆出版,早已绝版)上面.伽莫夫的名著《从一到无穷大》中也有涉及,今转引一段于下:"在世界中心贝拿勒斯有着三根约 1 腕尺(约合到 20 英寸),像韭菜叶那样粗细的宝石针.大梵天王在创造世界的时候,在其中的一根针上从下到上放下了由大到小的六十四片金片.不论白天黑夜都有一个值班的和尚按照始终不渝的法则,把这些金片在三根针上搬来搬去:一次只能搬一片.并且要求不管在哪一根针上,小片永远压在大片的上面.当所有六十四片都从大梵天王创造世界时所放的那根针上搬到另外一根针上时,世界就将在一声霹雳中消灭.梵塔,寺庙,和尚和一切众生都将同归于尽."

误是在开始时搞错了方向.尽管如此,你不大可能犯很多错误,只要你交替使用金片和银片并记住下面这句话:

不要把片子放在同样金属的另一片上.

为了求出搬过 m 次后你所到达的状态,可先把 m 表为二进位数,然而按照片数的奇偶性进行以下的替换:

	偶数	或	奇数
把 1 代之以三进位数	1	或	2
把 2 代之以三进位数	21	或	12
把 4 代之以三进位数	122	或	211
把 8 代之以三进位数	2111	或	1222
把 16 代之以三进位数	12222	或	21111
把 32 代之以三进位数	211111	或	122222
把 64 代之以三进位数	1222222	或	2111111,

……………………………………………………………

把这些三进位数进行以 3 为模的同余加法(但不要进位),结果就会告诉你,哪一枚金片在哪根宝石针上.譬如说,走了 13 步.梵塔有 7 枚金片,由于 7 是奇数,算法如下:

$$\left.\begin{array}{r} 1 \\ +4 \\ +8 \\ \hline =13 \end{array}\right\},\text{代换后的三进位数为}\left\{\begin{array}{r} 2 \\ 211 \\ 1222 \\ \hline 0001102, \end{array}\right.$$

这就表明,片子 1 应在第二根针上,片子 4 与 8 在第一根针上,其他片子在第 0 根针上,如图 20(b)所示.

梵塔游戏以及与之有关的神奇传说是克劳斯先生(爱多瓦特・刘卡)与德・巴维尔(De Parville)在 1883 年与 1884 年发明的.

一种跳棋与几个硬币游戏

近来我们偶然发现一种小型跳棋，它的玩法同独粒钻石棋极其类似，但被跳过的木栓并不从棋盘上拿走．开局时的状态如图21(a)，要求跳到图21(b)的"对立"状态，跳的时候只能沿着南—北方向(直跳)与东—西方向(横跳)，不准斜跳．游戏目的是要想把三只特定的木栓跳到三个特定的位置．

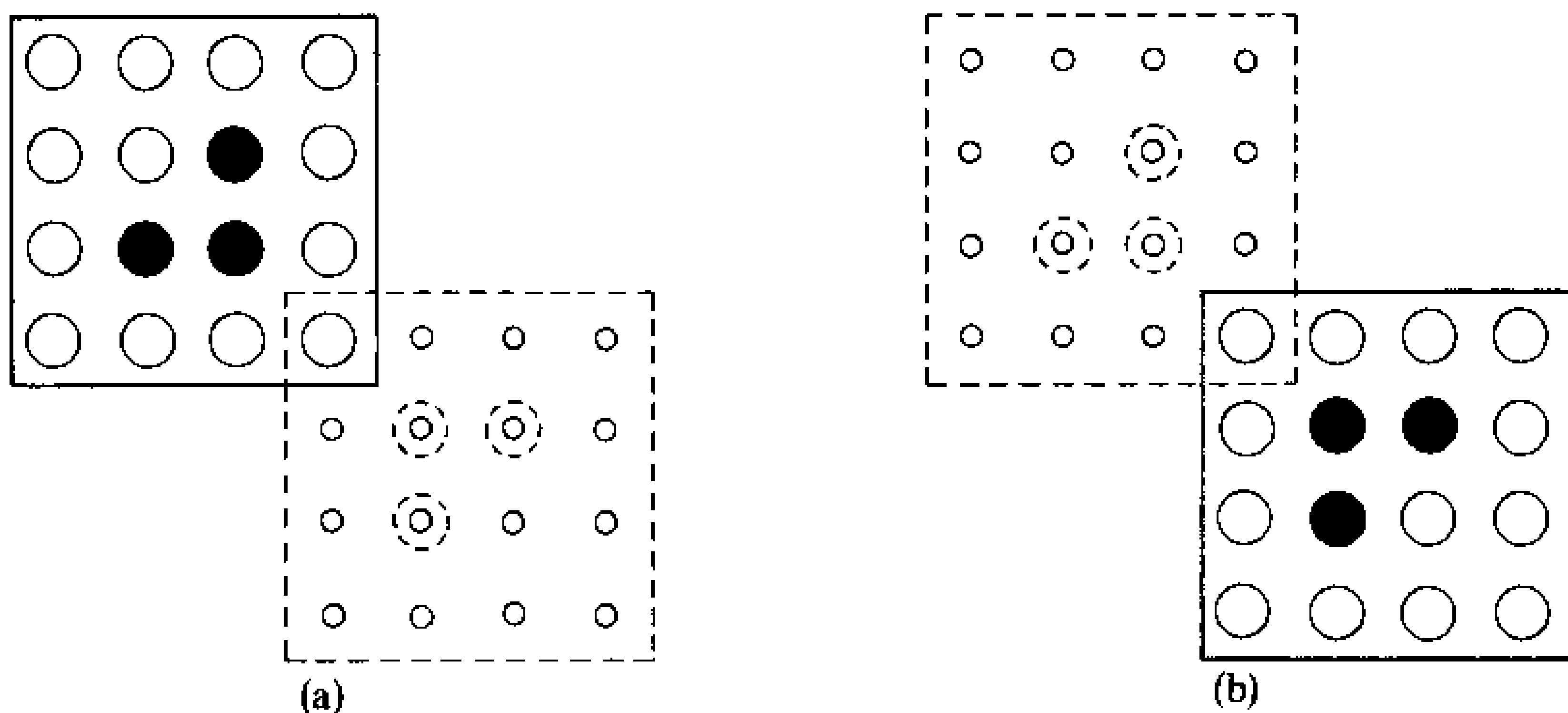


图21．一种小型跳棋．

它很像许多为人们熟知的龟兔问题(也叫山羊与绵羊游戏)的二维形式(见图22)，要求把两种动物(当然你可以用硬币替代)交换位置，允许的动作同第1章里的癞蛤蟆—青蛙游戏是一样的．六枚硬币的其他游戏还有：

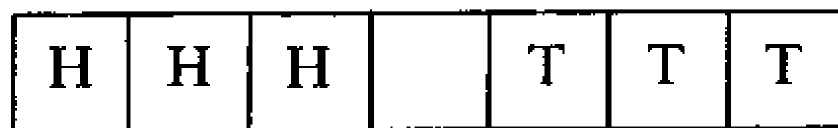


图22．龟兔对调．

(i) 把2枚相邻硬币移动三次，(硬币可在桌面上滑动，方向不变，始终保持接触，)从图23(a)变到图23(b)；*

---

* 译者注：即著名的"移棋相间"问题，我国西北工业大学一级教授姜长英老先生对此有专门研究，请参看他的著作《科学消遣》一书．



图 23. 走三步使成移棋相间.

(ii) 要求相同,但每对硬币移动过以后,其方向要颠倒;

(iii) 同类的问题,但硬币数不止 6 枚,可以更多;

(iv) 把图 24(a)排列的 6 枚硬币改变为指环形状(图 24(b)),但只准用三步就达到目的.在每次移动硬币时,一枚硬币必须在桌面上滑动,不能打扰其他硬币.移动过以后,必须同其他两枚硬币相切.例如第一步,你可以照图 24(c)那样去走走看,不过,这样一来,你就没有办法把中间的那枚硬币转出去了.

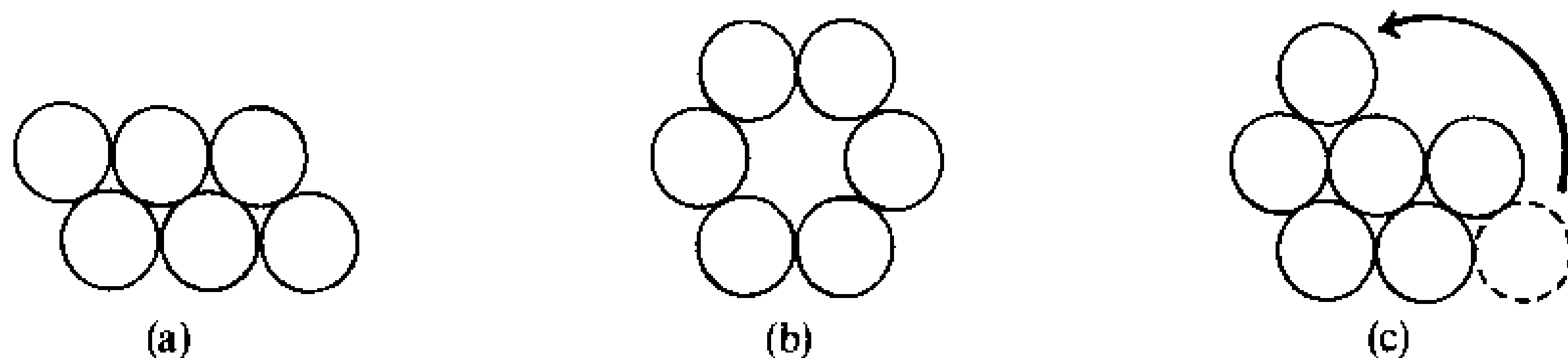


图 24. 从并列转成指环.

移动十五与幸运之七

最著名的滑块游戏是山姆·洛伊德的移动十五游戏,图 25 就是它的"归家"状态.游戏的走法是每次在空格里走动一格,要求你在杂乱无章的顺序中恢复到归家状态.如今,这种玩具的设计者已把它做成从底下拿不掉的商品.

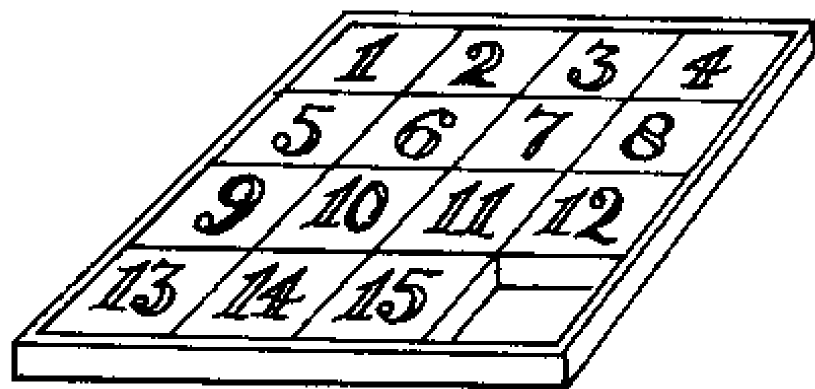


图 25. 山姆·洛伊德的"移动十五".

一种更为有趣的游戏是所谓**幸运之七**，它的归家状态如图 26 所示. 走法也类似.

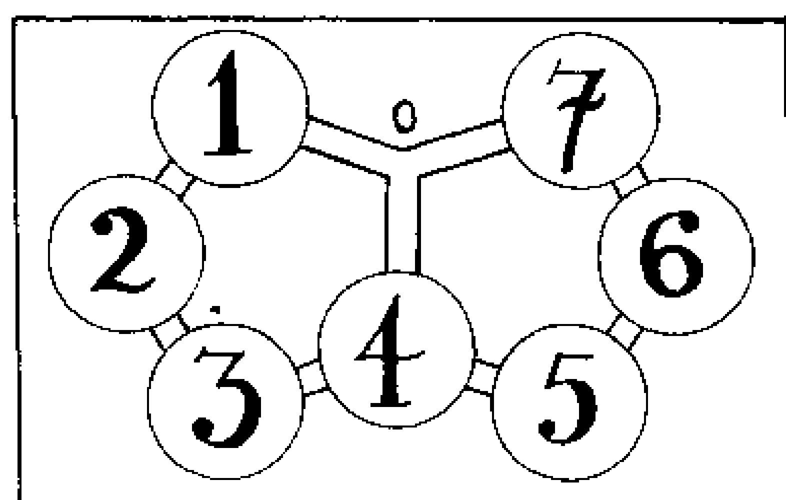


图 26. 幸运之七.

在这类游戏中，存在着滑块的某些基本排列，它们可以使空位回复到其标准位置. 例如，在**幸运之七**游戏中，你可以按下列顺序移动左侧五边形中的四只盘子 1,2,3,4,1，结果就得出图 27(a)；也可以在右侧的五边形中，按顺序 7,6,5,4,7 移动四只盘子，结果便得出图 27(b).

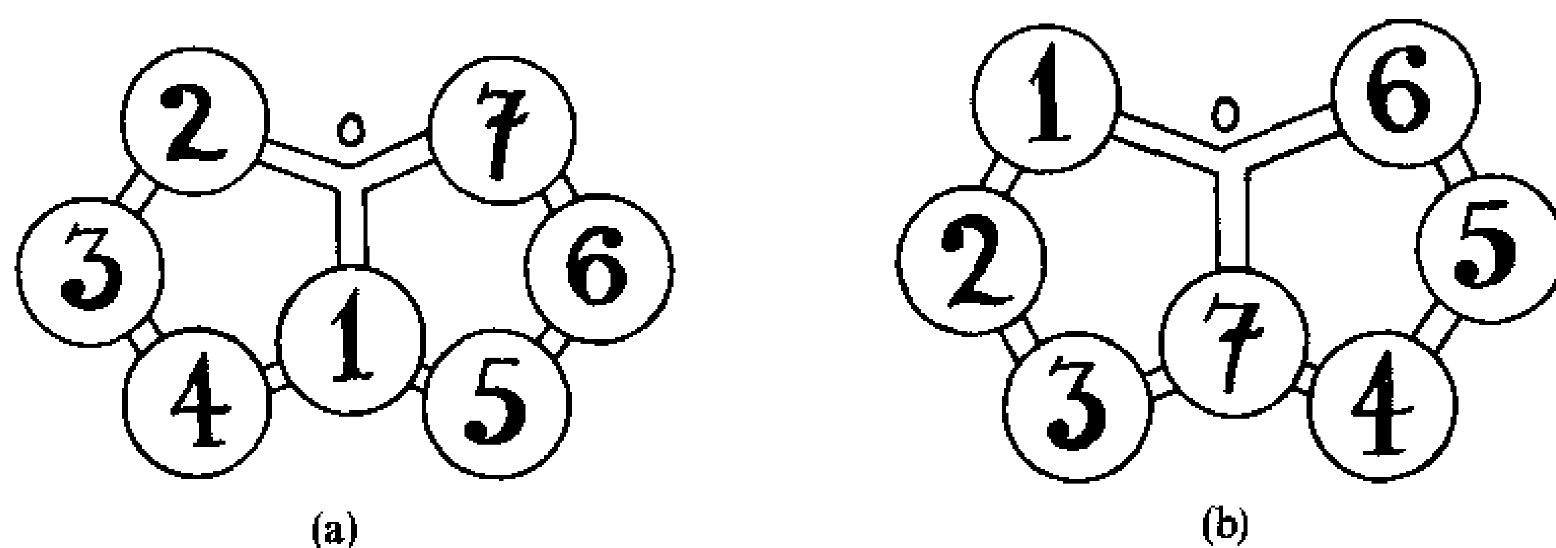


图 27. 走过几步后的状态.

在第一种情况下，我们认为是进行了变换 α，其结果是

盘子	1	2	3	4	5	6	7
到达	4	1	2	3	5	6	7

的位置，或者简记为　(1432)(5)(6)(7)，

而在第二种情况下，施行变换 β 的结果使

盘子	1	2	3	4	5	6	7
到达	1	2	3	5	6	7	4

的位置，或者简记为　(1)(2)(3)(4567).

显然我们可以任意运用这两种基本变换.例如,执行以下序列的变换

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \xrightarrow{\alpha} & 4 & \xrightarrow{\beta} & 5 & \xrightarrow{\alpha} & 5 & \xrightarrow{\alpha} & 5 & \xrightarrow{\beta} & 6 \\
2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 3 \\
3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 \\
4 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\
5 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 7 \\
6 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 7 & \longrightarrow & 7 & \longrightarrow & 7 & \longrightarrow & 4 \\
7 & \longrightarrow & 7 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 2
\end{array}
$$

之后,盘子	1	2	3	4	5	6	7
就会到达	6	3	5	1	7	4	2

的位置,或者简记为 (164)(2357).

如果用各种可能办法来组合已知的变换,我们就得到了数学家们所谓的**置换群**.有没有什么简易方法来看出属于"幸运之七"群的一些变换呢?回答是肯定无疑的,通常在这类情况下是要去寻找那些使绝大多数盘子原封不动的变换.在"幸运之七"游戏中,看来似乎最好的办法是把外缘视为一个完整的圆,而在0与4之间有一座桥(图28).这时,七只盘子可以自由地绕着外缘转圈子(我们一般不把它算作一步),或者一只盘子可以从桥上滑下来(要记住,游戏的实际形状是桥太短,以致无法使几只盘子同时过桥).很明显,盘子向上或向下过桥是无关紧要的(因其间转顺序一样),由此之故,为了方便起见,我们将规定盘子总是**自上至下**地滑动的.

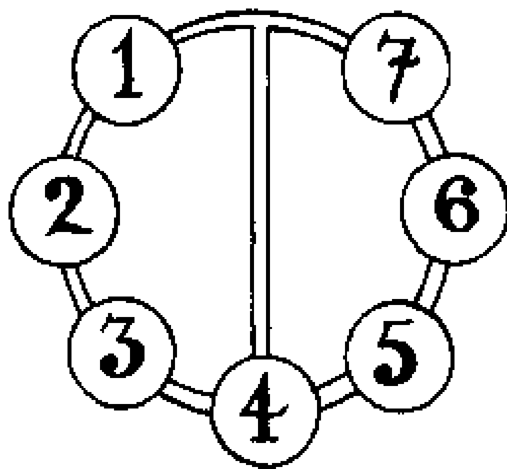


图28. 横贯的桥.

用这种思路来考虑问题,从归家状态出发,把盘子2,4,2,4,2滑下桥来,即可得到图29的状态,其时,只是盘子2与4互换位置,而其他盘子都在老地方不动.显然我们可以用这种办法对调在圆周上相距两个地点的一对盘子.也不难看出通过一系列对调就能达到任意重新排列之

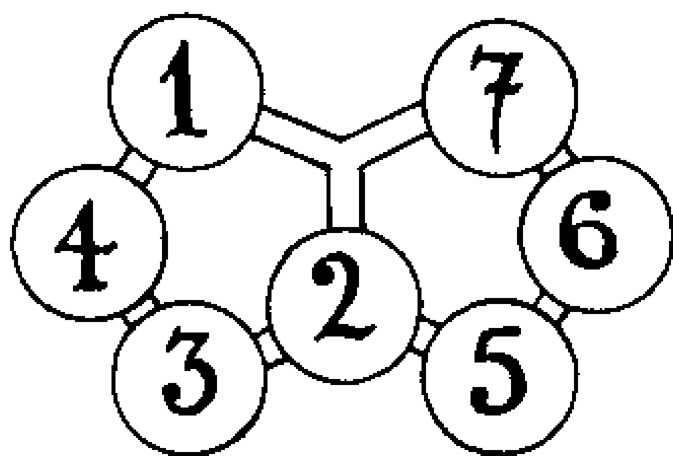


图 29. 把 2,4 对调位置.

目的. 譬如说,如果我们想把

盘子	1	2	3	4	5	6	7
放到位置	7	6	5	4	3	2	1

之上,我们就可以按下面的计划来逐步实现

1	2	3	4	5	6	7	
3	2	1	4	5	6	7	先把 1 安排就位,
3	2	5	4	1	6	7	
3	2	5	4	7	6	1	
3	4	5	2	7	6	1	再使 2 就位,
3	4	5	6	7	2	1	
5	4	3	6	7	2	1	然后使 3 就位,
5	4	7	6	3	2	1	
5	6	7	4	3	2	1	再后是 4,
7	6	5	4	3	2	1	然后是 5(6 与 7).

在此解法中,要使 45 只盘子"过桥". 虽然这一方法算不上高效率,但它的优点是步骤十分机械,用它可以得出任一所需状态,对于以上问题,你能否找到一个更简洁的办法呢?

逐点挪移游戏的其他情况

移动十五游戏已经被人们讨论得太多,此处不需要再去重复.

在

$$15!=1\times2\times3\times\cdots\times15=1\ 307\ 674\ 368\ 000$$

种排列中,正好一半排列(即所谓的偶排列)是可以到达的状态.用技术语言来说,此等排列形成**交代群**,A_{15},但在幸运之七游戏中,我们得到的却是全体排列,即**对称群** S_7,它共有 $7! =7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5\,040$ 个排列.

你们可以自己来制造这种智力玩具,在任意一个连通图的各个结点上放置筹码,但要预留出一个空白结点,然后逐点地挪移各个筹码,当然每次移动时都只能挪移到空白结点处.我们不去考虑两种退化情形,即图形是一个圆,或者将两个较小的子图放在一个结点上,因为前者太肤浅,而后者则已退化成两个对应于较小子图的同类游戏了.

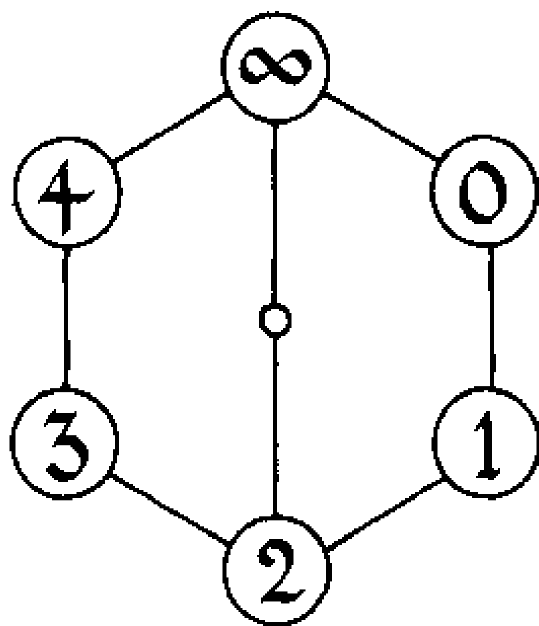


图 30. 列克的"狡猾之六"游戏.

列克·威尔逊业已证明一个引人注目的定理:除了唯一的例外,任一非退化图形的填空挪移游戏,我们要末得到完全对称群(若某些回路是奇性的),要末得到交代群(其他情况下),他所说的唯一例外,就是**"狡猾的六"游戏**(图 30),在这一个变换群中包含了一切可能的默比乌斯变换

$$x\to\frac{ax+b}{cx+d}\pmod 5.$$

匈牙利立方体——魔方*

在本节开头,出现了一个匈牙利文词组 *BŰVÖS KOCKA*,它的意思就是"魔方",如果你对

* 译者注:此种智力玩具在我国港、澳、台地区叫做魔方体,但大陆则通称魔方.事实上,"方"的用法中也有立体的意思,如在兴修水利,开河挖塘中,人们常说"每天挖土几方".故而此处遵循约定俗成的规矩,沿袭"魔方"这个名称,不作改动.

它很着迷，居然去买了一个回家，那么你将看到，从制造厂到你手中时每面都是同一种颜色（见图 31(a)），可是你的魔方委实很难保持这种美的状态，因为你可以旋转由九个小块构成的任意一个面（图 31(b)），从而打乱其色彩体系. 例如，倘使你开始时照图 31(b)那样完成旋转，然后再按顺时针方向转过顶面，那么你就将得出图 31(c). 再转三次以后，各种颜色就乱得一塌糊涂（见图 31(d)），想恢复原状就非常困难了. 换言之，使每个小块**归位**，重新摆放到它原来的**神龛**上去，真是谈何容易！

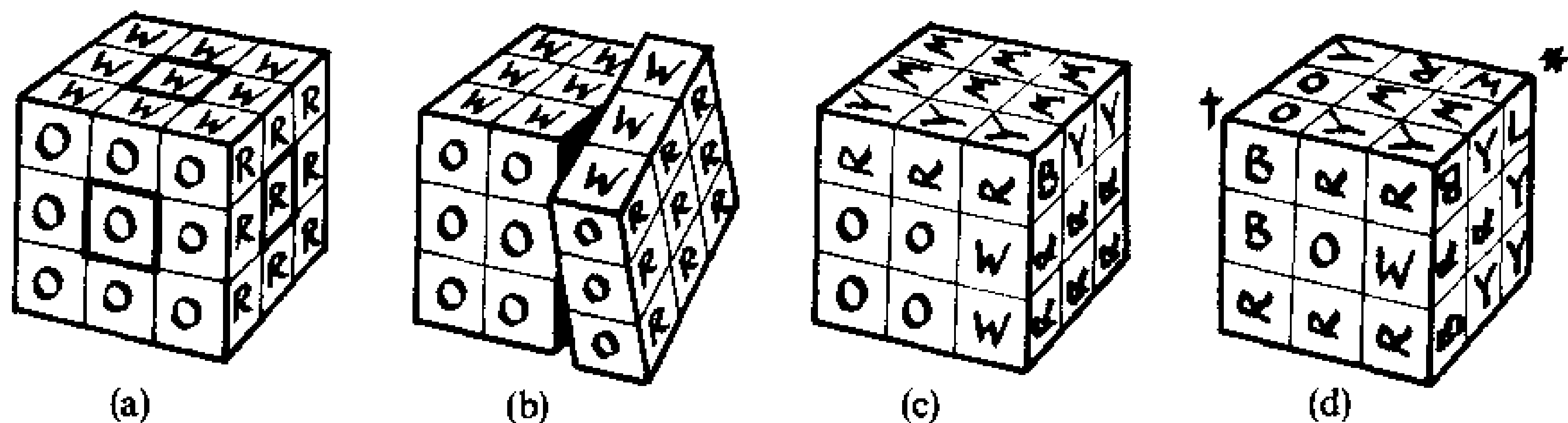


图 31. 匈牙利魔方.

实际说来，这种精致的玩具有两方面的问题. 首先是，玩具的设计家埃诺・鲁毕克（Ernö Rubik）用什么巧妙办法制造魔方，使它既能自由旋转，又不至于脱落下来. 这个问题我们不加讨论，让你们自己去想. 另一个问题是，我们当然要提供一种办法，以便保证使你把打乱了的任何状态，加以还原.

魔方究竟能"乱"到什么程度？

至少存在着六个永久标志：随便怎么旋转，位于各面中心的小块总是仍旧停驻在它们的自己的神龛里，我们将称之为**面块**，并在图 31(a)中给它们打上方框记号. 不管你的魔方看来如此混乱无序，你只要看一看各面中央的面块，就能说出各个面的最终颜色. 譬如说，在图 31(d)中，我可以告诉你，顶面的本色应为**白色**，尽管现下白块只占三分之一.

所以你只要看一看本色，想一想它们的位置，就能说出每个小块的神龛究竟位于何处. 例如，图 31(d)中标出的 LWO 小块（即右上角的 * 块）理应在 † 的地方（咱们的玩具魔方中，在 R，W，O 对面的颜色为 L，B，Y）. 让我们向胆怯的新手建议，总是把魔方的白色一面放在上面，然后注意一下底面的颜色，我们将称后者为**底色**.

由于另外 20 只可以看得见的小块分别属于两种类型：

8 只**角块**，在它们的神龛里有着 3 种可能定向，

12 只**边块**，它们的神龛里有着 2 种可能定向，

所以它们至多只有

$$3^8\times2^{12}\times8!\ \times12!\ =519\ 024\ 039\ 293\ 878\ 272\ 000$$

种可能的排列方式. 但是安妮・司各脱(Anne Scott)业已证明，可能的状态仅仅是上面这个数目的十二分之一，即

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$$

种.

主色与主面

即使各小块没有正确就位时，上述这些概念也有助于计算小块的定向. 如果魔方的顶面或底面上有一块业已就位，我们称之为神龛的**主面**，否则就在左面或右面去找. 所谓**主色**则是小方块回到正确位置时的颜色. 换言之，如有可能，尽先取白色或底面的颜色，否则就在魔方的左面或右面去取.

如果有一个小块，不管它情况如何，目前位于主面而且具有主色，我们就称它是**正常**的，否则就称它是**翻转**的(若它是一个边块的话)或**扭曲**的(若它是一个角块的话). 只存在一种办法使边块翻转(e)，但角块却有两种扭曲方式，反时针方向(a)或顺时针方向(c).

在图 32 中可以看到，旋转顶面(或底面)将使每一小块的主性保持不变. 转动前面(或后面)则将改变四只角上的主性，而旋转左面(或右面)则将改变四个角块及四个边块的主性. 由于每次翻转都涉及偶数条边. 于是，你们可以看到，对于魔方的任一可能状态来说：

边的翻转总数恒为偶数.

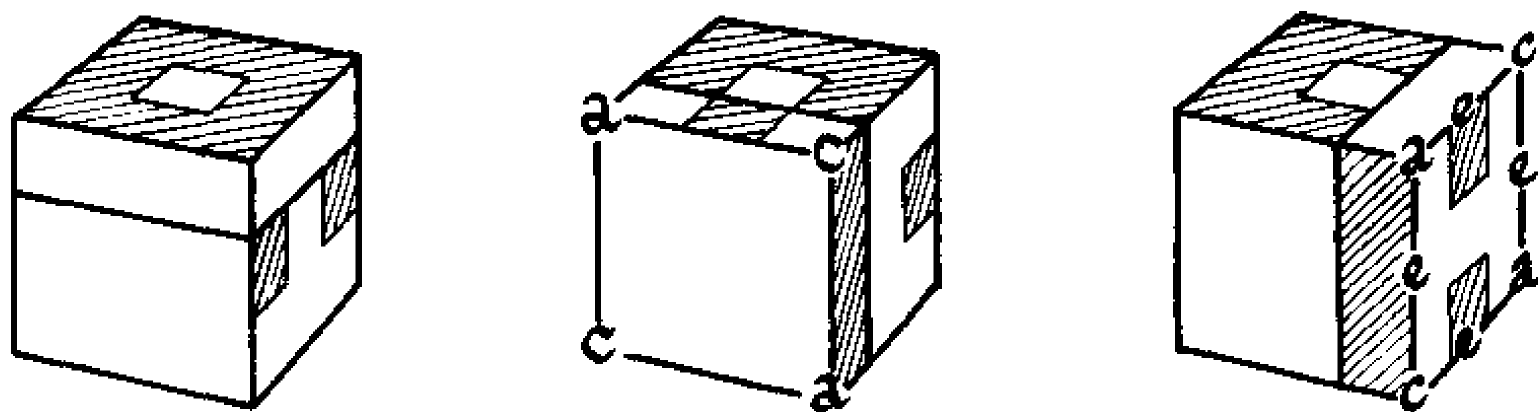


图 32. 主性的变化.

又由于每次旋转都会产生相等数量的顺时针向与反时针向扭歪，所以

> 角上的扭曲总数总是按模 3 同余于 0.

在计算角上扭曲数时，我们把顺时针向扭曲取为 +1，而把反时针向扭曲取为 −1　当然，对一个小块施行三次顺时针向扭转等于是原封不动. 最后，理由如同“移动十五”游戏一样，

> 所有 20 个可以移动的小块的总的置换必然是偶置换.

所谓**偶置换**，我们可以想像它是可以通过偶数次对调来实现的.

医治杂乱无章的魔方

本逊，康威与西尔已对安妮·司各特的证明进行了简化，因此你的的确确能使任何搞乱的魔方恢复其本来面目，只要这种状态满足以下三个条件：*

(i) 总的翻转数按模 2 同余于 0；

(ii) 总的角上扭曲数按模 3 同余于 0；

(iii) 所有 20 个可动小块的置换总数为偶数.

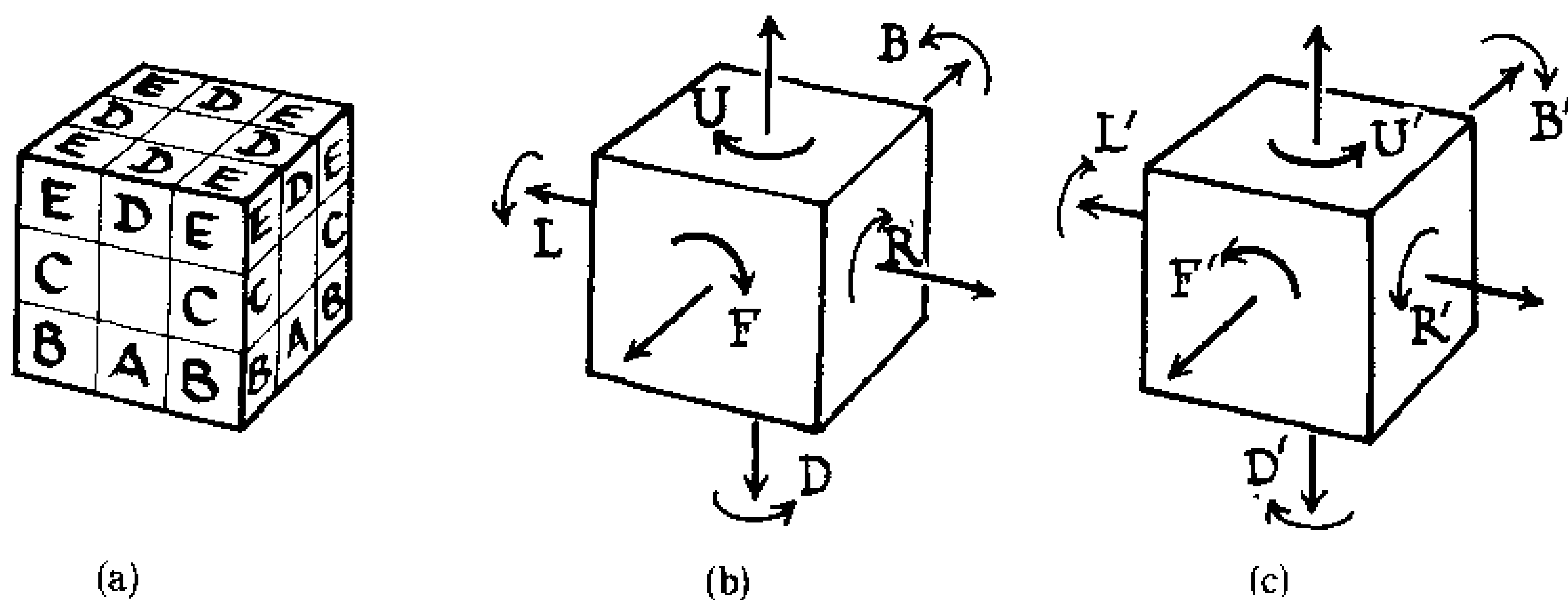


图 33. 六个阶段与动作记号.

* 译者注：只要不是存心刁难，把一只魔方拆开重装，以上三个条件，总是可以自动满足的.

我们已把各种动作(见图 33)的名称进行了调整,以便同大卫·辛马斯特(David Singmaster)* 的记号统一起来,我们希望这种统一记号能很快成为全球通用符号. 请注意字母 L,R,F,B,U,D 分别表示顺时针方向的左,右,前,后,上,下旋转,而右上角打上"′"的字母 L′,R′,F′,B′,U′,D′则表示相应的逆时针方向旋转. 对于**夹心动作**的记号与图解请参看图 34. 请注意在这些动作中只转动了魔方的**中间一层**. 有时我们也采用一般记法,例如 X^2 的意思是"把动作 X 连做两次",X^{-1}的意思是"解除 X".

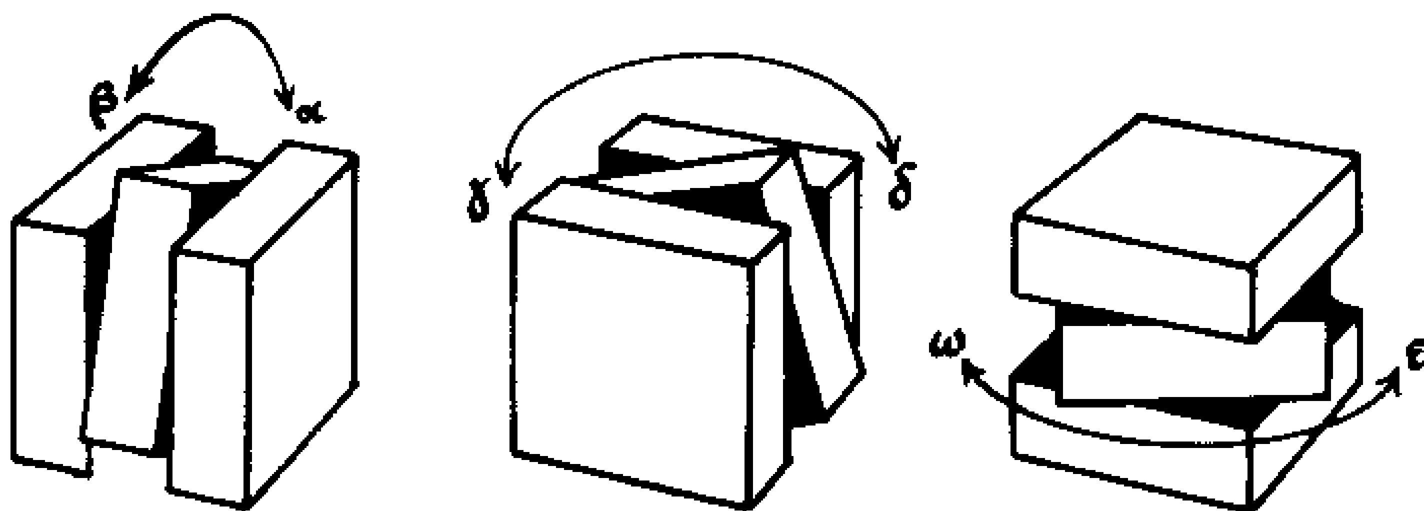


图 34. 夹心动作.

我们的方法有六个阶段,大致相当于图 33(a)中的字母:

A:向上,环绕(调整),向下.
D:顶上边块的安家落户.
B:底层角块.
E:顶上角块的交换.
C:中层边块.
F. 最终的翻转与调整.

我们对这些阶段的图形作了集中收录,见图 35 以便参考. 你们应密切注意本书第 371 页上的附图.

警告:在应用这一算法时必须谨慎小心. 要时常想想扭紧或松开螺丝的动作,注意其区别,切勿混淆顺时针方向或反时针方向的动作,即便在背后看时也不能弄错. 手中操持魔方的方式也得注意,在一系列操作的进行途中切勿停下来思考. 应当牢牢记住,你如果犯了一个小小的错误,那就有可能重新返回到阶段 A. 你要知道,

魔方从来不饶人!

---

* 译者注:国际著名魔方专家,英国伦敦的一位大学教授. 在魔方问题上同本书译者有过大量通信联系.

A:向上,环绕(调整),向下

我们的第一阶段(见图 35(a))是将底面的 A 块(即图 33(a)中的 A 块)返回它们的正确神龛.你可将具有底色(主色)的一块翻到顶面(上升运动),然后旋转顶面把它放到正确的侧面,而后者又可以通过侧面的旋转而返回其原来的神龛.这样做,有时可能会重新打乱一个已经归位的底面边块,但在执行最后一步时可以先调整到合适的侧面上去(参看附图).

B:底面的角块

现在,在不打乱底面边块的情况下,你必须把底面角块返回老家.

如果应该处在图 35B 中打上阴线位置的那个角块目前是在顶面上,则先将顶面转动,使这一小块的底色是图中三个数字之一,然后再在以下三个动作中挑选出与之相应的一个动作:

B1:F′U′F　　B2:RUR′　　B3:F′UF · RU^2R'.

如果小块已经落在底面上,但摆放得不对,则可利用其中的一个动作,把任一顶层角块放到它的目前状态,从而把摆得不对的那个小块驱赶到顶层.然后再像上面那样使它落到正确位置上去.对底层的其他三个小块重复同样的步骤.

C:中层边块

这一阶段的动作是整治中层边块而不影响底层.

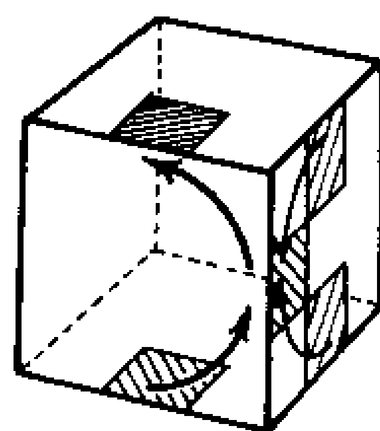
如果指定应落在图 35C 位置上的小块是在顶层,则应转动顶层,使你想要移动的该小块处于图 35C 的两个位置之一(其侧面正好位于同色面块之上),然后执行相适的,下列两动作之一:

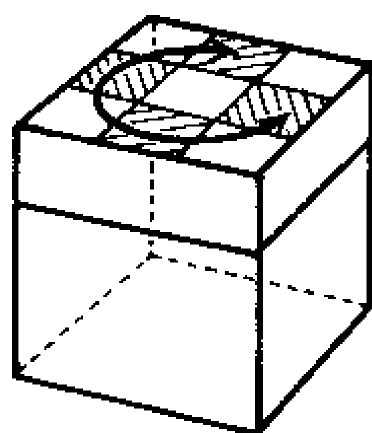
C1:URU′R′ · U′F′UF　　C2:U′F′UF · URU′R′.

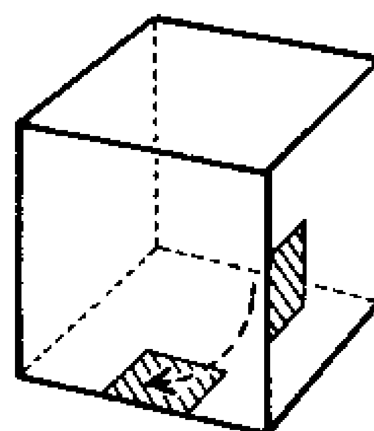
如果小块已落在中层,但摆放的位置不对,则可利用上面两动作之一把它驱赶到顶层.然后再照以上方针行动,对中层其他三只边块重复做上面的动作.

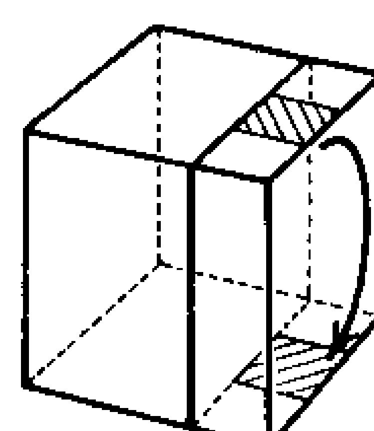
D:上层边块的安家落户

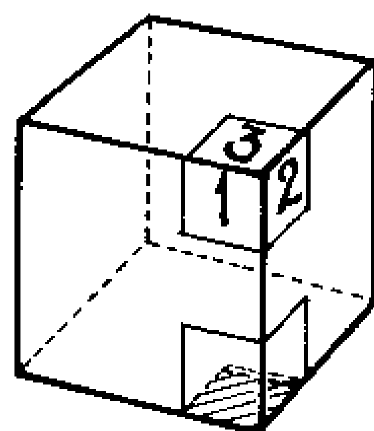
这一阶段之目的就是要把上层边块安放到它们自己的神龛中去而不用担心定向.


上升

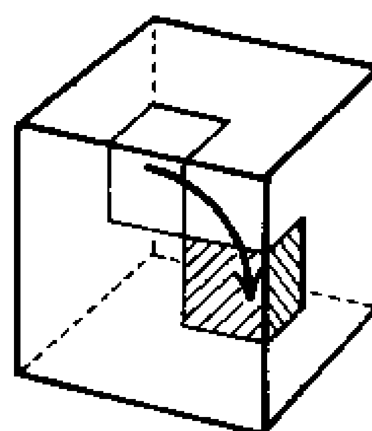

环绕

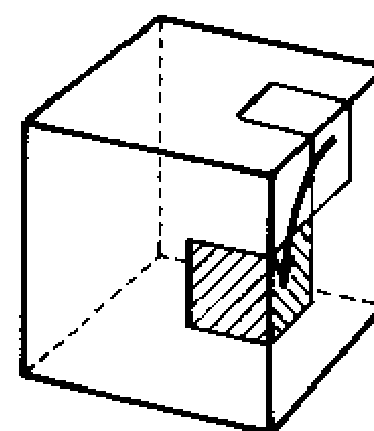

调整

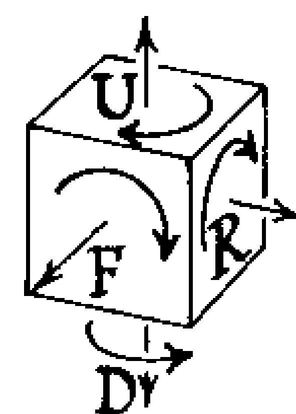

下调

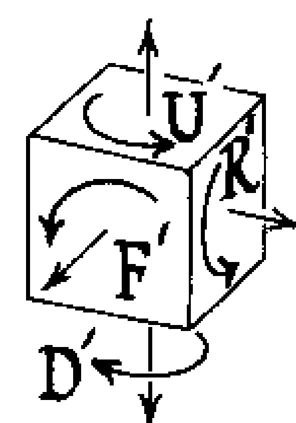


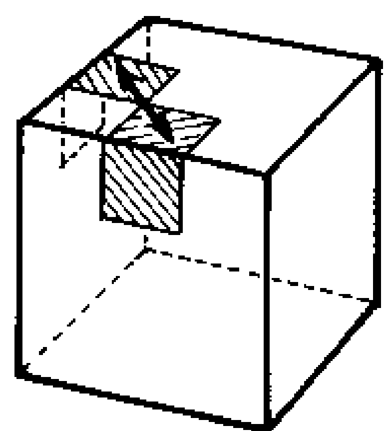
B1: $F'U'F$
B2: RUR'
B3: $F'U'F.RU^2R'$

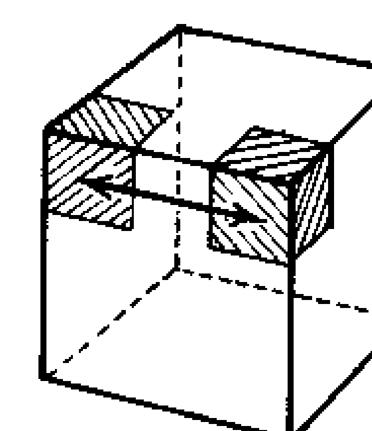

C1: $URU'R'.U'F'UF$

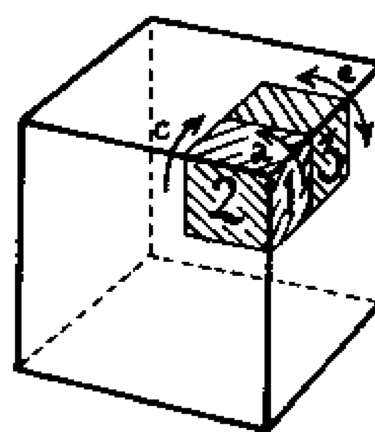

C2: $U'F'UF.URU'R'$






D: $UF.RUR'U'.F'$


E: $FD.F^2D^2F^2.D'F' = M_s$



F1: $(F'RFR')^2 = M_a$
F2: $(RF'R'F)^2 = M_c$
F3: $(\varepsilon R)^4 = M_e$

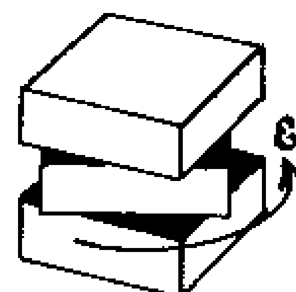


图 35. 彻底治好魔方"乱"病的六个简单阶段.

你可以通过一系列交换两个相邻边块(见图 35D)的动作来加以实现,所需之动作为

$$UF \cdot RUR'U' \cdot F'.$$

当然你也可以先旋转顶层以减少所需的交换步骤.

E:交换顶层的角块

现在你必须把顶层角块通过合适的动作"请"回到自己的神龛中去,这些动作在最后完成之后,将不会影响下面两层,也不打乱顶层的边块.为了做到这一点,一般需要把相邻的角块对调两次,但有时也需要对调四次.

正确的操作需要小心进行.应搞出一对连续交换,把相邻角块进行对调以改善局面.其办法是,转动魔方,使第一次对调的角块处于图 35E 的位置,然后执行我们的**独家经营的对调**

$$M_S = FD \cdot F^2D^2F^2 \cdot D'F'.$$

做过这一步之后,再转动顶层,以便把需要第二次进行对调的角块带到图 35E 的指定位置,接着再做一次独家对调动作.然后再把顶层恢复到它的原来位置.

在单独的 M_S 作用下,下面两层将被打乱,但是,再做一次 M_S 后,原来的状态却恢复过来.重要的是,在两次 M_S 之间,不得改动下面的两层(例如转动魔方).

F:最终的翻转与调整

现在每个小块都已回到了它自己的神龛,唯一的遗留问题是解决翻转与上层角块的扭曲了.为了解决任意一个特定的上层小块,先旋转上层以便把它带到图 35F 中打上阴影记号的两个位置之一,然后,按照其白色表面所处的三个位置

1	2	3

分别执行咱们的

反时针独家扭转	顺时针独家扭转	边块独家翻转
$M_a = (F'RFR)^2$	$M_c = (RF'R'F)^2$	$M_e = (\epsilon R)^4$

此处 ϵ 是一个夹心动作(图 34).

再次要求你们注意,在以上两个动作之间不准转动魔方以改变下面两层,这是因为单独一个独家扭转与独家翻转动作是要影响它们的.然而,作为一个整体,整套动作不仅整治了上面一层,而且也自动地治好了下面两层.

注释

E 阶段之所以起作用是由于我们的独家经营运算 M_S 除了交换两个邻近的角块之外使上层保持不变，而这样的两个变换互相抵销（$M_S^2=1$）*.

所以如下一系列动作：

独家变换，将顶层作顺时针向旋转，独家变换，将顶层转回来

就不会打乱下面两层，所“感觉”到的，只是两个相互抵销的独家对调. 不过，顶层却把两个相邻角块有效地对调了，紧随其后的是右面两角的对调，它们是先通过第一次转动顶层而到这预定位置，然后又被第二个转动顶层而复原.

F 阶段的作用也与之类似，因为 M_a，M_c 与 M_e 对顶层来说确能达到预期目的，它们具有如下性质：

$$M_e^2=M_c^3=1, M_cM_e=M_eM_c, M_a=M_c^{-1}.$$

于是安妮·司各特的定律能保证下面两层享受到相互抵销的变换组合所带来的好处，然而上层却进行了人们所需要的翻转与扭正.

一些改进

我们的方法易于解释，掌握与记忆，但往往要比魔方专家多走不少步数，如果你愿意承受困难而且记性很好，那么就有可能大大地削减魔方还原的步骤. 譬如说，原先的所谓独家经营的翻转与扭转（来自戴维·西尔与戴维·戈托）就可加以简化！

$$m_e=R\varepsilon R^2\varepsilon^2R \qquad m_e^{-1}=R'\omega^2R^2\omega R'$$

$$m_c=R'DRFDF' \qquad m_a=m_c^{-1}=FD'F'R'D'R$$

但你在执行时必须倍加小心，在一个操作之后接上相应的逆操作.

请研究以下一些操作的效应，其中许多是被人们认为很有用的. 前面的几个操作只对顶层起作用，我们在这些操作前面冠上了首先告诉我们这种做法的学者的姓名. 也许其中许多事实早已被联明的匈牙利人发现过. 至于用希腊字母表示的夹心动作，请参看图 33.

---

* 译者注：按照我国的习惯用法，此处的 1 应改为恒等变换 I，但前已说过，本书的作者们并不介意此种细节.

大卫·本逊的“特殊”运算 $RUR^2 \cdot FRF^2 \cdot UFU^2$

大卫·辛马斯特的“西格姆”运算 $FURU'R'F'$

玛格丽特·邦贝的顶面边块三旋运算 $\beta U^{\pm 1}\alpha \cdot U^2 \cdot \beta U^{\pm 1}\alpha$

两个或更多个顶面边块的三旋运算 $U^2F \cdot \alpha U\beta \cdot U^2 \cdot \alpha U\beta \cdot FU^2$;$FUF'UFU^2F'U^2$

顶面角块的三旋运算 $RU'L'UR'U'LU$

克立佛·巴赫的交叉对调$(\alpha^2U^2\alpha^2U)^2$

喀蒂·弗利特的边块三旋运算 $\beta F^2\alpha F^2$

泰麦斯·伐加的角块三旋运算$((FR'F'R)^3U^2)^2$

两番边块对调$(R^2U^2)^3 \cdot (\alpha^2U^2)^2$

安得鲁·泰勒的 C 阶段操作:$F^2(RF)^2(R'F')^3$;$(FR)^3(F'R')^2F^2$

其他人的 C 阶段操作　$FUFUF \cdot U'F'U'F'U'$;$R'U'R'U'R' \cdot URURU$

在本章增补材料中你将找到一张表格,其中包括了顶层重组或重新定向的最短操作(欢迎你作出改进).它们引自本逊,康威与西尔的算法,它们可以保证至多 85 步就能治好魔方的“乱”病(转半周算作一步,但夹心动作算成两步).毛文·薛瑟斯威脱(Morwen Thistlethwaite)最近建立了一个令人敬佩的算法,不超过 52 步便能治好魔方的“乱”病.

因为走第一步可以有 18 种选择,但继起的步数只有 15 种(不能相互抵销的)选择,所以 16 步之后的局势数至多只能是

$$18\times 15^{15}=7\ 882\ 090\ 026\ 855\ 468\ 750<43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$$

这就证明,还有许多魔方的混乱局势需要 17 步或者更多的步数才能医好.但是我们可以利用估计 $u_1=18$,$u_2=27+12u_1=243$,$u_{n+2}\leqslant 18u_n+12u_{n+1}$,把 LR=RL 这类关系式都考虑进去,从而把结果改进到 18 步. *

爱莲娜的补充

爱莲娜·康威(Elena Conway)希望把她的魔方转出许多美丽花样.下面列出一些操作方法,其中绝大多数是她自己发现的.

---

* 译者注:这个结论非常重要.但迄今毛文·薛瑟斯威脱算法仍是最权威的方法,所以这方面的缺口很大,大有可为.许多群论专家估计,在 21 世纪前半叶彻底解决可能是极为渺茫的.

“4 窗”	“6 窗”	“棋盘图案”	“哈里坤”*
$\alpha\gamma^2\beta\delta^2$	$\alpha\gamma\beta\delta$	$\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2$	$\alpha\gamma\beta\delta\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2$
“多条纹”	“之字形”	“4＋字”	“6＋字”
$(L^2F^2R^2)^2\cdot LR'$	$(LRFB)^3$	$(LRFB)^3(FBLR)^3$ 或 $(\gamma^2L'\gamma^2R)^3$	$(\gamma^2L'\gamma^2R)^3(\alpha^2B'\alpha^2F)^3$

她还在试验“6＋字”同前面几种图案的组合.

你是否醉心于偏执的魔方玩法

只利用魔方的一部分操作,究竟能干点什么？这是一项很有趣,很有意思的课题.或许你想把自己的操作局限在一些特定的面,转半周,夹心动作,以及 LR 之类的像转动作.在数学上这些动作与一些子群对应,它们是 2 面,3 面,4 面与 5 面群,正方形群,夹心群以及像转对称群.

初学者最好同夹心群打交道,因为它们不易搞乱.从任何状态出发,你可以用 3 个夹心动作来治好边块,从而得到 4 窗或 6 窗图案再搞 4 个夹心动作就归位复原了.弗朗克·奥·哈拉(Frank O'Hara)已经证明,实际上至多 5 个夹心动作就够了.夹心群的阶数为 $4^3\cdot 4!/2=768$,而像转群的阶数为 $2^{11}\cdot 3=6144$.

两面体群曾经被毛文·薛瑟斯威特进行过广泛而深入的研究.有趣的是其中蕴含了“幸运之七”游戏(在移动边块时)以及列克·威尔逊的“狡猾的六”游戏(在移动角块时).

罗迦·彭罗斯(Roger Penrose)首先证明了只要利用五个面,就能完成一切行动.戴维·本逊对此有一个简单的证明：

$$RL'F^2B^2RL'\cdot U\cdot RL'F^2B^2RL'=D.$$

其他“匈牙利”玩具

2×2×2 的小魔方及 2×3×3 的“骨牌”也已经制造出来了.它们的工艺设计甚至更加奇妙,但作为游戏,玩起来却要容易得多.人们当然也可以去仿造匈牙利四面体,八面体,十二面体以及二十面体等.但迄今据我们所知,这些东西既未制造,其原理也并未完全解决.安得鲁·泰勒

---

* 译者注:原为 16 世纪意大利喜剧中的丑角,后传入英国,演变为哑剧中的角色,其服饰五颜六色,炫人耳目,通常是一件紧身服装,上面的装饰是亮丽的钻石图案,另外佩带着一把小小的木头短剑.——据《麦克米伦当代英语辞典》.

已经找到一个简洁的证法(不论选取何种主面与主色),证明:

边块与角块的总置换是偶置换,

边块的翻转是偶数,

角块的扭转同余于零,其模为角的价数*.

"令人泄气的骨牌"**的摆弄者只要记住下面的三套操作就行,括弧里是它们所产生的效应:

X=EhEhEh	Y=EcEhNcE	Z=cYcYc
(28)	(13)(26)(1′3′)(2′6′)	(13)(26)

其中 c 为顶面的一个顺时针方向 $\frac{1}{4}$ 转,而 h,E,N 分别为顶面,东面与北面的 $\frac{1}{2}$ 转.

滑块游戏三重奏

老爸的玩具(见图 36)几乎是唯一能在玩具店里买得到的滑块玩具,不过它却有着各种不同名称.它要求通过滑动,使那块 2×2 方块到达左下角位置,但任何一块组件都不准拿出盘外.五十年以前,这游戏旨在表明老爸搬家具碰到了困难,那个 2×2 方块就代表钢琴;但它经常变花样,时而为运动比赛中的三角锦旗,时而又变成一辆汽车或一座大山,一间宇航密封舱,可是万变不离其宗,游戏的实质没有改变.可能有一百年之久.某些眼光较好的制造商则把它做成一套十一件的玩具,其中拥有一个 2×2 方块,四个 1×1 块以及六个 2×1 块,使它既可以玩老爸游戏,又可以玩下面更有趣的玩意儿.

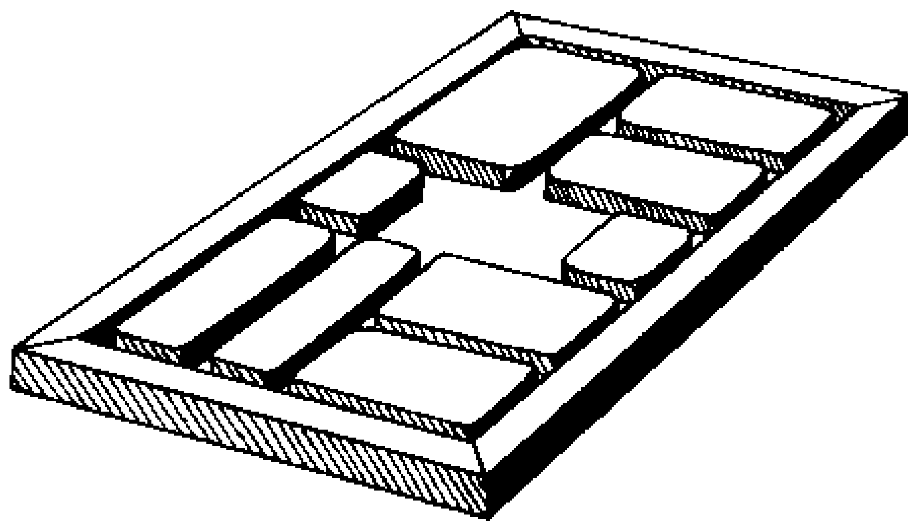


图 36. 老爸的玩具.

在**笨驴**游戏***中,开局状态的安排如图 37(a)所示,要求把 2×2 方块移到下面一排的中央部位,据说本游戏的名称来自法国版的一幅插图,上面画着一只红色的**笨驴**(这种游戏的法国版

---

* 译者注:因这是一般结论,而五种正多面体中,有些多面体的顶角不一定是三面角.

** 译者注:即上文所说的 2×3×3 变种魔方.除港、澳、台外,中国大陆上未曾公开出售过此种智力玩具.

*** 译者注:此种游戏历史悠久,据新四军离休干部扬州梁青同志考证,它的名字叫做"华容道",但其开局状态与本书的图示略有差异.1980 年代,它又重新流行于中国,并成立了民间研究社团"华容道研究会",首任会长为我国前辈科普作家,西北工业大学姜长英教授.

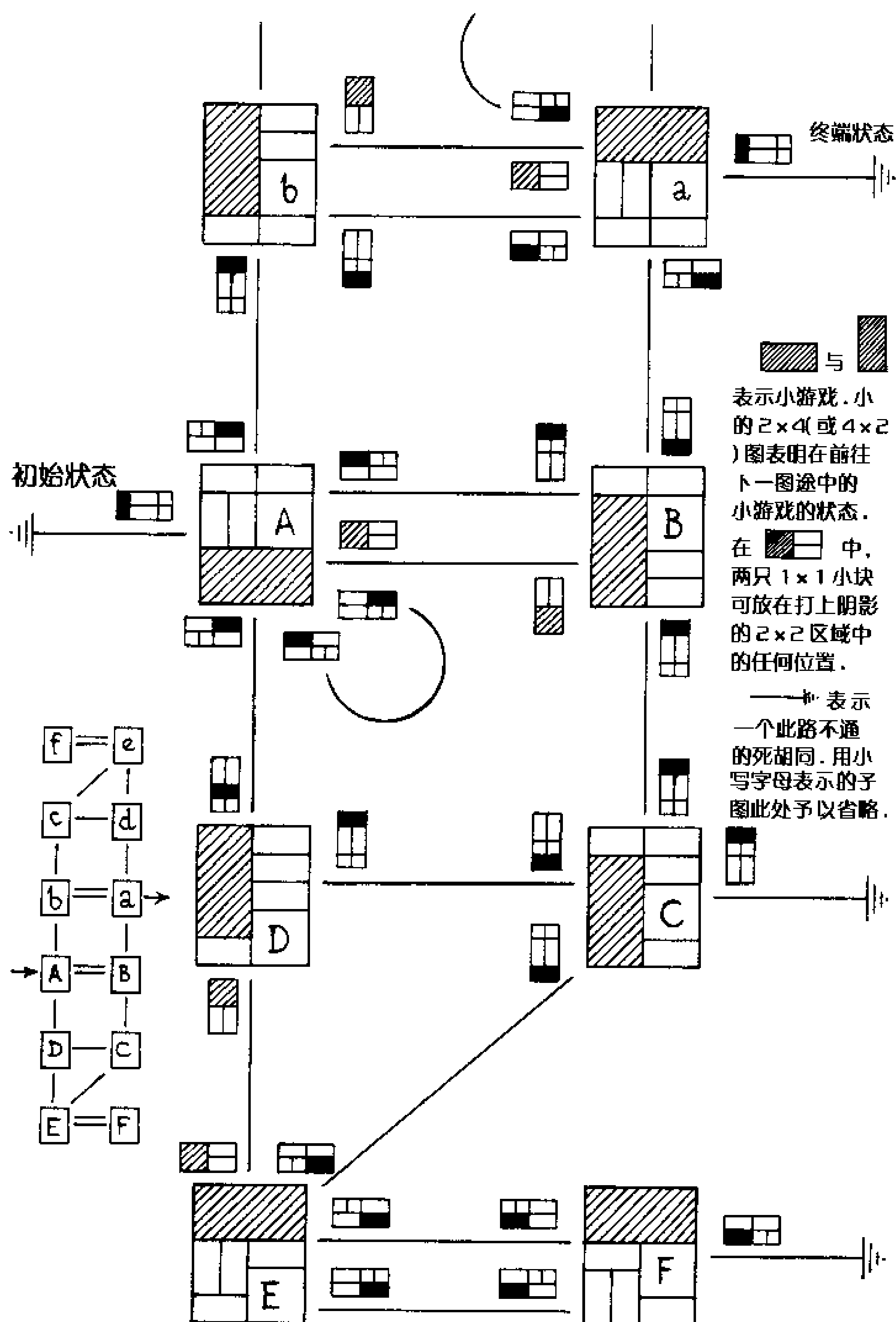


图 39. 老爸游戏的解剖全图.

图 39 给出了"老爸游戏"的完全图景，其中包含了由多多少少带点强制性的通道连接起来的一系列小游戏. 利用这张解剖全图，你将能自由自在地从一处通往别处.

在笨驴与世纪游戏中有一些小型与微型游戏：你可以看一看图 40 的范围内可以采取什么行动. 世纪与笨驴游戏决非易事，但如果你成为小游戏的行家里手，那就大有裨益. 图 41 就是笨驴游戏的解剖全图. 局势是根据 2×2 方块的位置来区分的，在大多数情况下我们只画出左右互为镜像对称的一对图形中的一个. 某些不重要的死胡同用记号卌来表示. 含有(?)的矩形则表示联接左、右肩的一些局势. 箭头表示肩部的其他连接. 左、右对称局势则用粗体字框出.

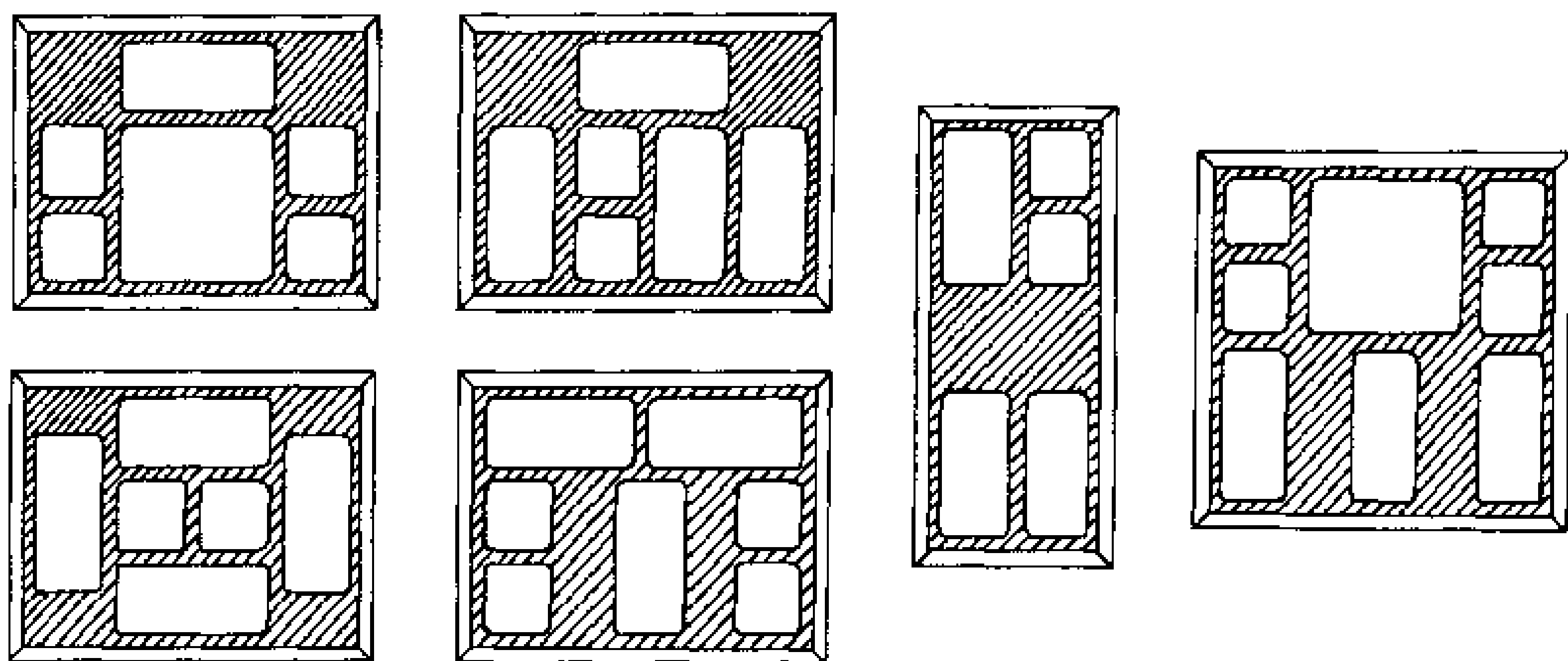


图 40. 笨驴与世纪游戏中的小游戏与微型游戏.

世纪游戏的全图要更加大得多，我们需要更多的简化以便在合理的图幅中把它画出来. 局势的最好分类办法是根据大方块的所处位置以及两个水平横块的摆放情况：究竟是放在方块的上面还是在下面. 我们要注意，图 42 中两个水平横块都被视为在方块的**下面**而不问其外观情况. 因为移动这些滑块的唯一办法是使水平横块向下而方块向上.

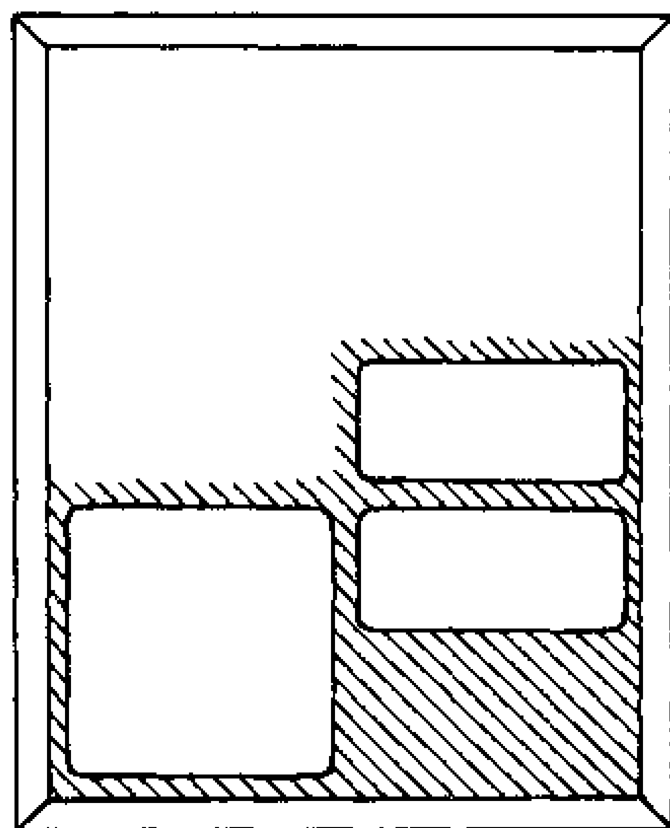


图 42. 两个水平横块视为在方块之下!

问题的关键是要在图形中找出两座可能的**狭桥**之一，以便使第一个水平横块改变其状态，从方块之下转到方块之上. 实际上，最好先想一想这种情况可能发生的图形，并通过逆推的办法去前后寻找. 能够从初始状态出发，稳步向前，最后解决问题的人为数甚少. 图 43 中给出了一个经过大大简化的图形.

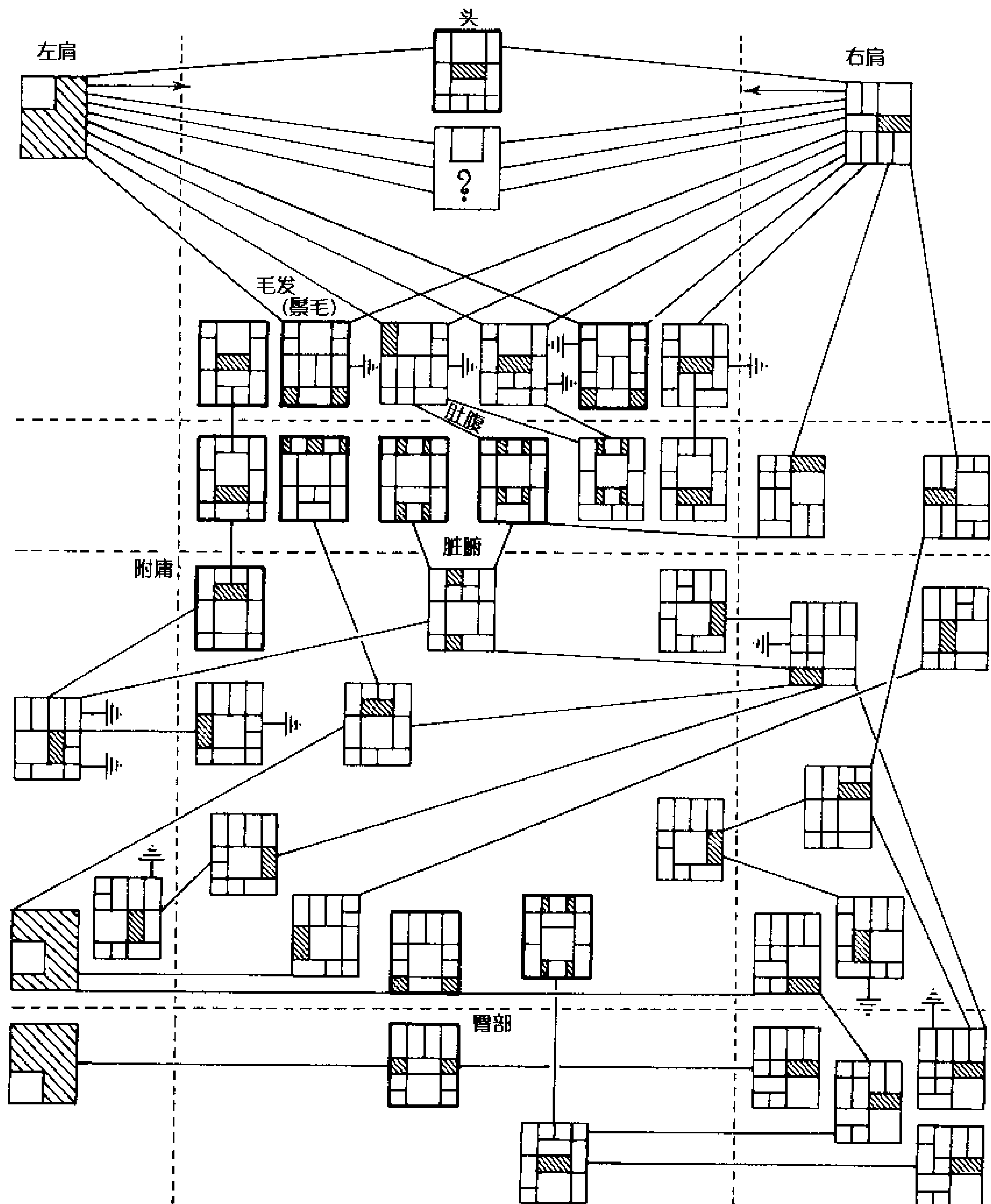


图 41. 笨驴游戏的图解.

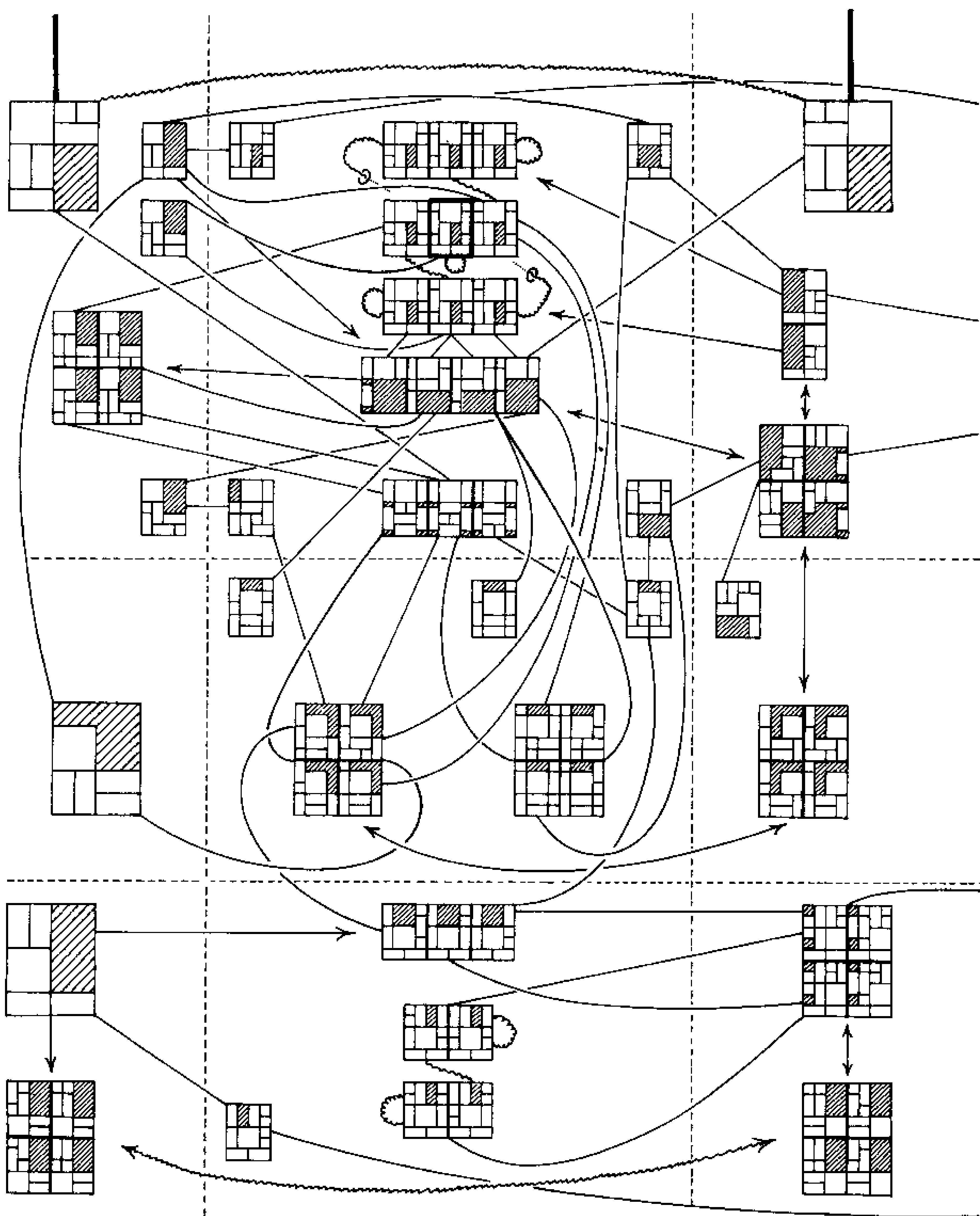
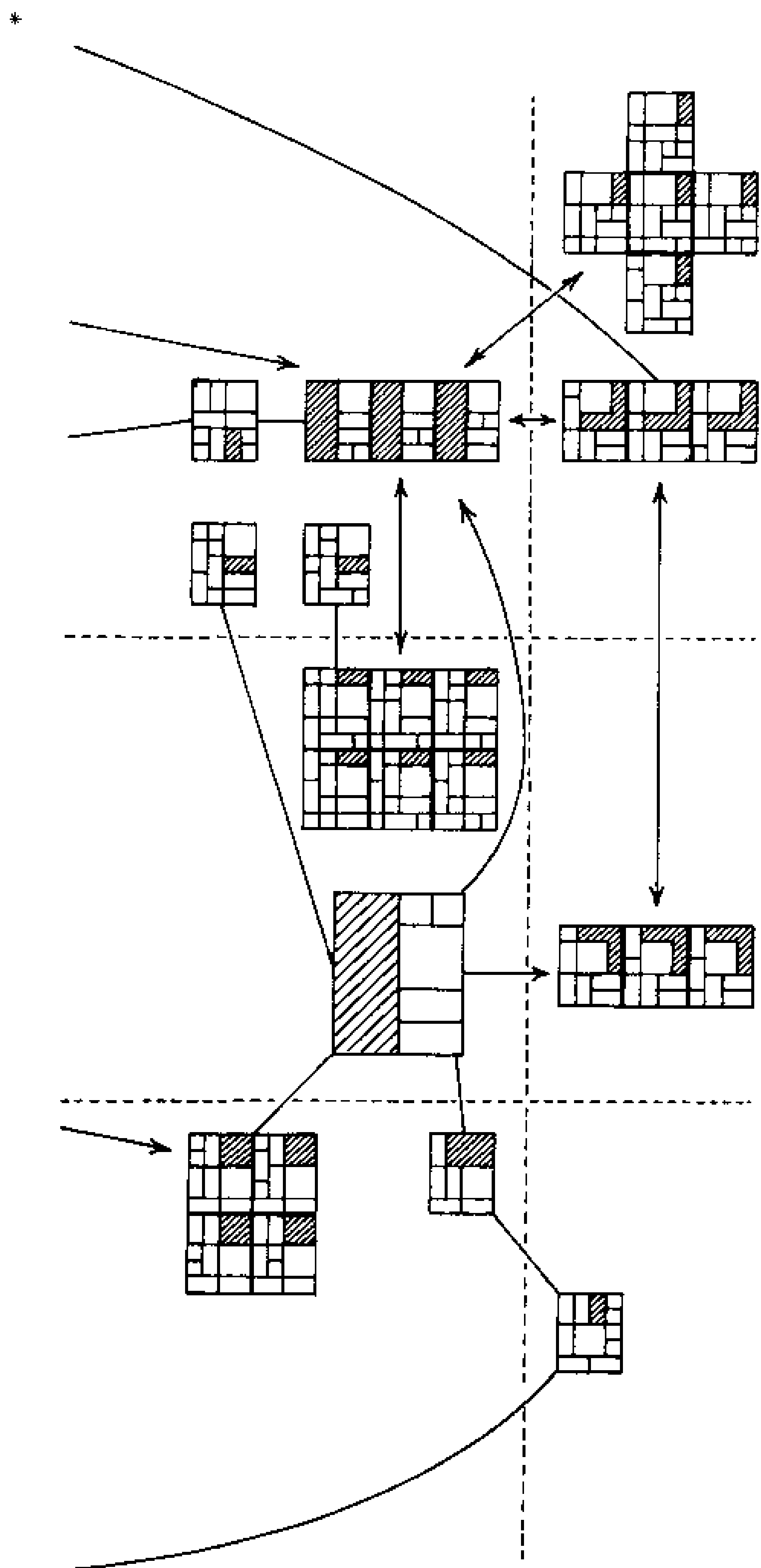
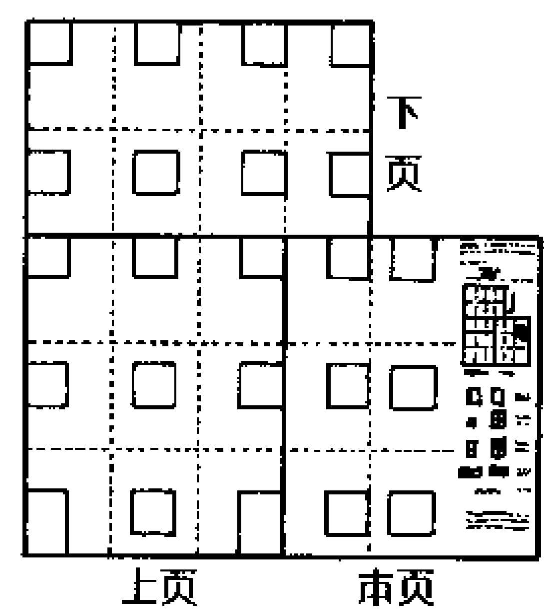
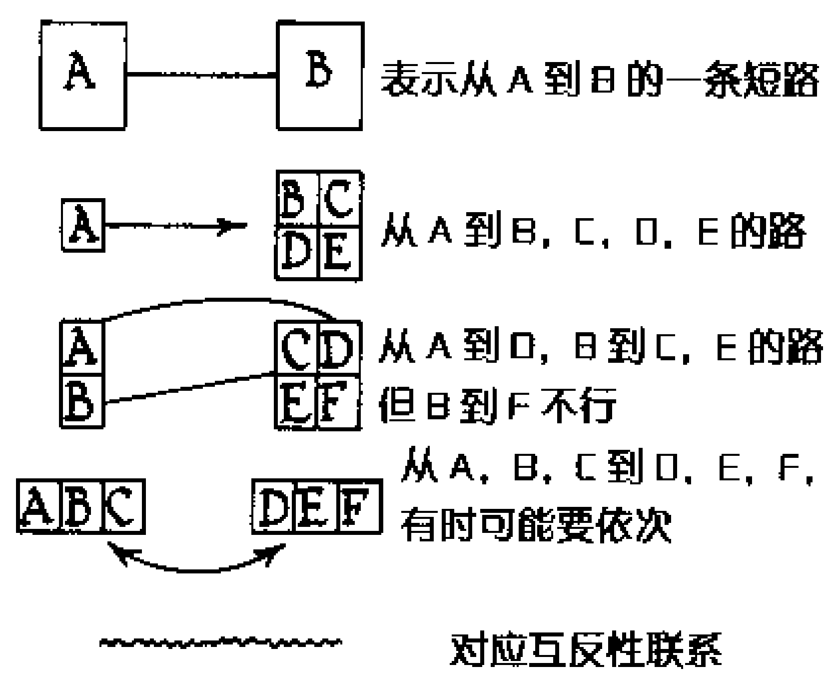


图 43. 世纪游戏全图之一.



初始状态用粗线框出：见上页的中间一列，接近顶部．局势的分类如下：下一页：夹在水平横块之间的方块．上一页：两垂直块在左，一块在右．末页：三垂直块在左．它们再按照方块的所处位置作进一步分类：



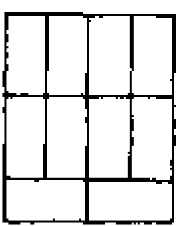


“狭桥”是指上页顶部与下页左方*之间的粗线联系．

图 43. 世纪游戏全图之二.

* 译者注：原文如此，实际上粗线是在下页的右方，但该图应该横过来看.

提示：如果游戏进行到近似的状态，



“自由正方形”

则你仍然停留在起点附近．这时若除去一条纵线，把两条纵线融线融合起来，就可以得出一个大的正方块，而另外两个横块则可分为四只小方块．

图 43．世纪游戏全图之三．

为了制备这个解剖全图，我们得到了埃萨克斯大学的戴维·弗兰茂林(David Fremlin)的许多帮助，他用计算机作了大量工作.他还发现笨驴游戏的各种滑块在盘子里共有 65 880 种放法，而世纪游戏则有 109 260 种放法.尽管世纪游戏可以到达上下倒置的状态(这就是我们的世纪又半问题)，但弗兰茂林的计算机发现笨驴游戏做不到这一点.倘若能有一个意思表达得更为清楚的证明，那就太好了.

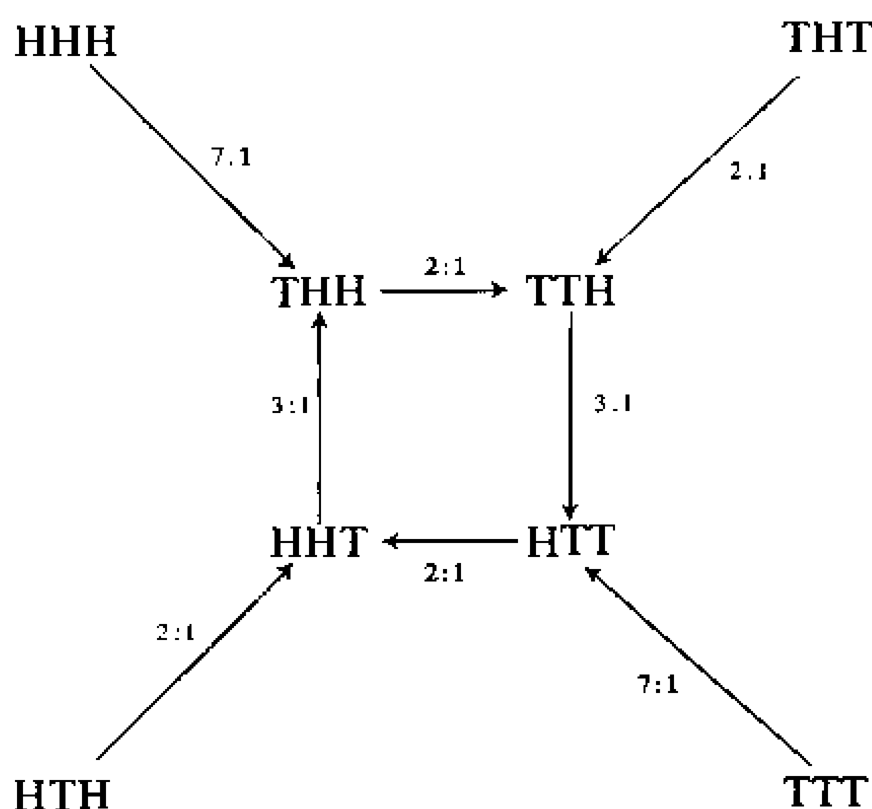
计算你的步数

习惯上按照马丁·加德纳的意见，把涉及一个滑块的任何行动都只算作一步.解决老爸游戏需要 58 步，而解决笨驴游戏则需 83 步.试问：你需要用多少步来解决世纪游戏？而对世纪又半游戏，又得用多少步呢？

自相矛盾的钱币

请告诉我，你所喜爱的三个钱币正反面的组合，我也说出我所喜欢的.然后我们来抛掷钱币，直到它在连续的三次抛掷中首次出现你或我所偏爱的组合为止.我将同你打赌：我将以 2 对 1 的比分来赢你！

下面的图形



表明我将要选取的序列以对付你可能挑选的各种序列，再添上我赢你的比分. 你将看到，比分至少是 2 对 1，于我方有利.

以下说一说计算比分的办法. 设有两个具有同等长度 n 的正、反面序列 a,b，现在我们来算出**领前数** aLb，办法是如果 a 的最后 k 个字母同 b 的最先 k 个字母吻合(k 当然是正数)，则对每一个这样的 k，打上分数 2^{k-1}. 采用此种办法之后，我们可以证明在"自相矛盾的钱币"游戏中，b 打败 a 的比分应该是

$$aLa-aLb \text{ 对 } bLb-bLa.$$

李奥・吉拜斯(Leo Guibas)与安第・奥德里兹科(Andy Odlyzko)已经证明，给定 a 时，b 的最优选择是砍去 a 的最后一位数，而在前面添上一个新的数字作为第一位的两种序列之一. 请注意，在长度为 3 的本游戏中，居然有着下列自相矛盾的结论：

THH 能打败 HHT 能打数 HTT 能打败 TTH 能打败 THH.

神奇的骰子

可以利用下面的幻方

	D	E	F
A	6	1	8
B	7	5	3
C	2	9	4

来做出具有类似性质的三只骰子. 每只骰子的面上，刻着幻方一行上的三个数(骰子共有六面，相对的两面刻着同一数). 于是出现了奥妙的事情：

A 打数 B 打败 C 打数 A，

而且全都以 5 对 4 取胜. 若利用幻方的三个列来做骰子 D，E，F，情况也相似. 其他神奇的三数组只有一组，它们仍可从 A，B，C 得出，但 3 与 4 要互相交换位置，而 6 与 7 也要这样做. 这种交换以后，胜负比分也改善了. *

有可能改变两只骰子上的数字，使它同传统的刻法不同，但其概率却完全一样，此种新刻法只有唯一的一种. 从代数观点来看，这个问题可以归结为把多项式

$$x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$$

---

* 译者注：原文如此. 但调换数字后，已不再能构成幻方.

分解为 $f(x)g(x)$的形式并满足条件 $f(0)=g(0)=0$ 与 $f(1)=g(1)=6$.

下面就是两种分解式

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 \text{ 以及}$$
$$(x+2x^2+2x^3+x^4)(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8),$$

所以一对新式的骰子,其点数应为

1,2,2,3,3,4　与　1,3,4,5,6,8.

幻方的补充知识

有一个古老的问题,要求把 1 至 n^2 的连续自然数排成一种正方形,使所有的行,列及两条对角线具有的和相等,这个和等于$\frac{1}{2}n(n^2+1)$. 唯一的 3×3 幻方(见上节)称为“洛书”,是中国人在许多朝代以前发现的,我们在第 22 章中也用过它. 1693 年,弗兰尼克·德·贝赛(Frenicle de Bessy)造出了所有的四阶幻方,共有 880 个之多. 在本节中我们将告诉你怎样把这些幻方统统求出来.

将所有的数字统统减 1 较为方便,因为 0 至 15 各数对尼姆加法是方便的. 在这种约定之下,幻方和数等于 30. 我们将把幻方称作**完全**的. 如果我们将幻方中所有数字按尼姆加法进行而仍能得出幻方时;如果这种加法只有一半可行,则称之为**半完全**幻方,如此等等. 由于按尼姆加法去加 15 同取 15 的补数是一样的,它总是能保持幻方的性质. 这表明任一幻方至少是$\frac{1}{8}$完全的. 我们也可以按照幻方中互补对的配置来加以分类,如图 44 所示.

它们实质上是只有三种办法来书写 0 到 15 的加法表:

0	1	2	3		0	1	4	5		0	2	4	6
4	5	6	7		2	3	6	7		1	3	5	7
8	9	10	11		8	9	12	13		8	10	12	14
12	13	14	15		10	11	14	15		9	11	13	15

然后你可以对这些行、列自由地进行排列组合. 譬如说,得出下面的阵列:

15	11	14	10
13	9	12	8
7	3	6	2
5	1	4	0

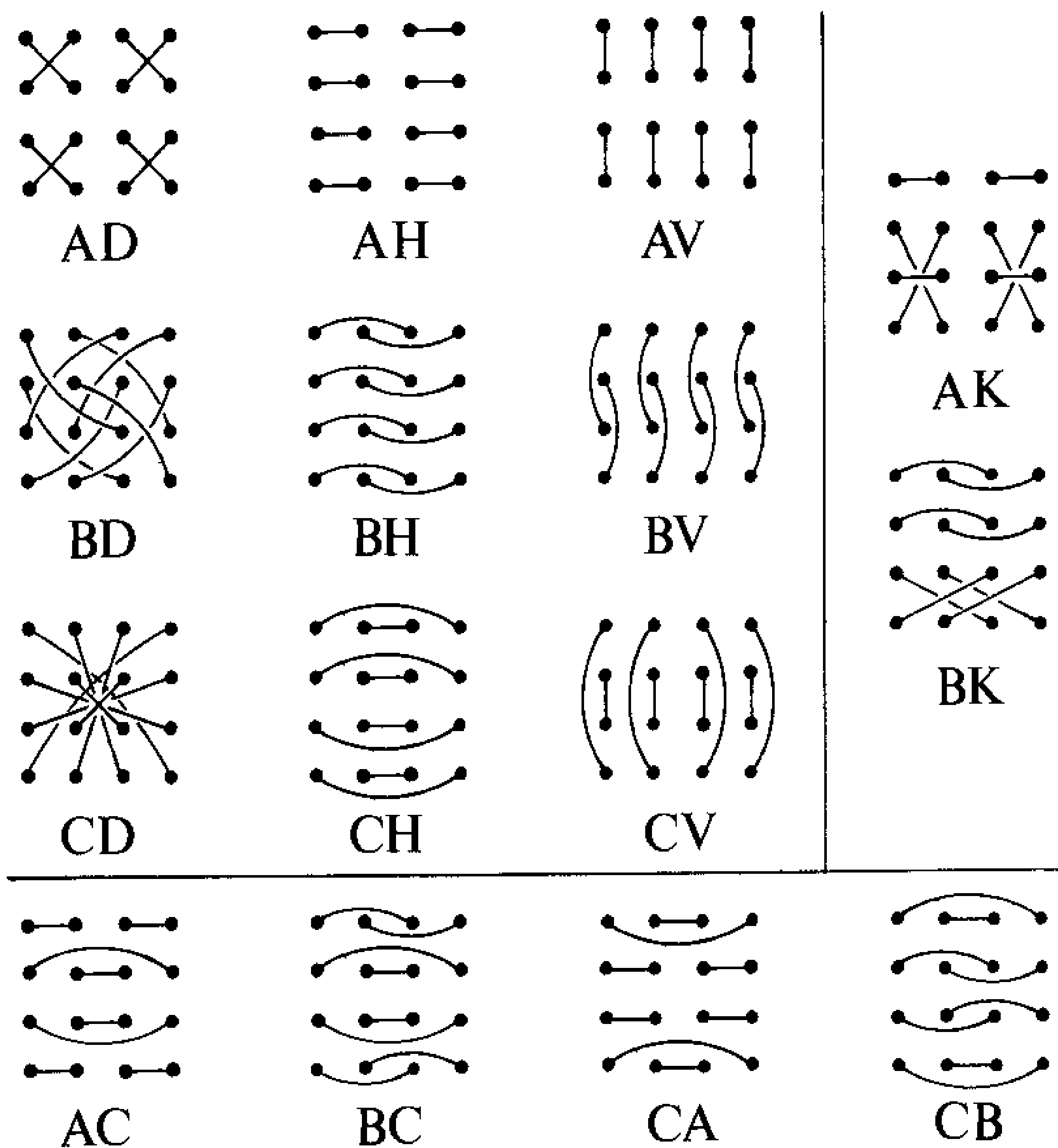
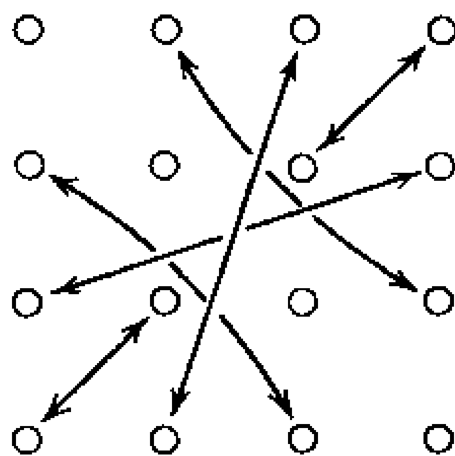


图 44. 根据互补对的幻方分类.

然后按照下面的图示,进行**四四奇形变换** * 来对调数字

* 译者注:这种变换办法很像中国象棋中士,相的步法,再加上"日"字的斜角,故可称为"士,相,日变换"法.



这样一来，就得出了左图的幻方：

15	2	1	12		16	3	2	13
4	9	10	17		5	10	11	8
8	5	6	11		9	6	7	12
3	14	13	0		4	15	14	1

加上 1 之后，我们就得出右图的幻方，它是文艺复兴时代的画家阿尔伯莱希特・丢勒(Albrecht Dürer)的自画像"忧郁 1"所表现的特征，此处方框中的数目字指出了作品的创作年代(1514 年)．这幅图中互补数字是遵循图 44 中所谓的中央模式的，所以这种幻方就叫做中央幻方．

把四四奇形变换用到加法表的其他形式，我们可以得到 432 种实质上不同的完全幻方．互补对将帮助我们分作以下各种类型：

48 种邻接对角线(AD)，

48 种折断对角线(BD)，

48 种中央对角线(CD)，

96 种邻接水平线(AH)或邻接垂直线(AV)，

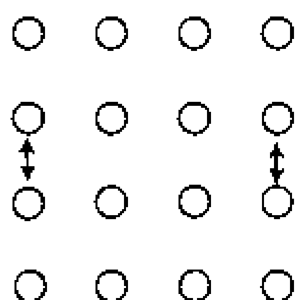
96 种折断水平线(BH)或折断垂直线(BV)，

96 种中央水平线(CH)或中央垂直线(CV)．

如果图形可以通过反射或旋转来互相转化，则我们并不认为它们有什么不同，由此之故，我们必须把邻接水平线与邻接垂直线幻方视为同一类型．你可以用下法判断你的幻方属于哪种类型：在进行四四奇形变换之前，看一看加法表中占据第一个位置的数的补数：

*	○	○	○
○	**AD**	**CH**	**BV**
○	**CV**	**BD**	**AH**
○	**BH**	**AV**	**CD**

现在让我们取一个上述的 96 个中央水平线幻方,并对它施行对调运算



这时你又能得到 96 个中央水平线幻方. 至此所得之一切幻方都是完全的.

尚有 112 个中央水平线幻方只是$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{8}$完全的,它们可从以下七个幻方的任一个:

6	10	5	9
13	12	3	2
0	7	8	15
11	1	14	4

a_8 ↔

14	2	13	1
5	4	11	10
8	15	0	7
3	9	6	12

10	1	14	5
13	8	7	2
4	15	0	11
3	6	9	12

↓ d (第一个幻方)

12	5	10	3
11	9	6	4
0	14	1	15
7	2	13	8

↓ d (第二个幻方)

13	4	11	2
10	8	7	5
1	15	0	14
6	3	12	9

$\frac{1}{4}$-完全

c ↗

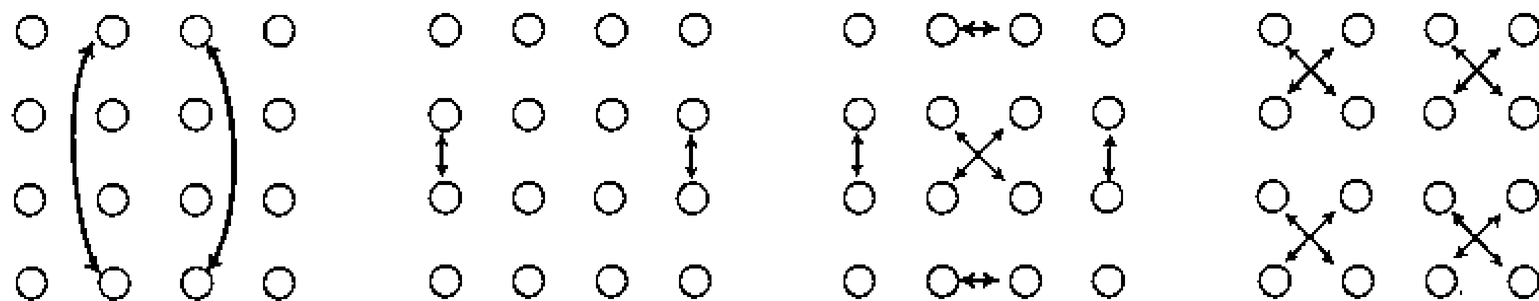
0	13	2	15
11	8	7	4
14	3	12	1
5	6	9	10

c ↖ ↓ c

12	11	4	3
1	8	7	14
2	5	10	13
15	6	9	0

$\frac{1}{8}$-完全

再应用四种运算之一而导出.
这四种运算是:



现在取图 45 的 14 个幻方,再应用求补运算与后面三种运算的结合,于是可得出 224 个幻方,下面四种类型各有 56 个:

邻接中央型(AC),
折断中央型(BC),
中央邻接型(CA),
中央折断型(CB).

6	9	4	11		14	1	12	3		2	13	0	15		10	5	8	7
8	14	1	7	a_8 ↔	0	6	9	15	b ↔	12	6	9	3	a_8 ↔	4	14	1	11
3	5	10	12		11	13	2	4		11	1	14	4		3	9	6	12
13	2	15	0		5	10	7	8		5	10	7	8		13	2	15	0
	↓d					↓d					↓d					↓d		
12	3	8	7		13	2	9	6		4	11	0	15		5	10	1	14
1	13	2	14	a_1 ↔	0	12	3	15		9	12	3	6	a_1 ↔	8	13	2	7
6	10	5	9		7	11	4	8		7	2	13	8		6	3	12	9
11	4	15	0		10	5	14	1		10	5	14	1		11	4	15	0
	↓d					↓d					↓d					↓d		
9	6	1	14		11	4	3	12		8	7	0	15		10	5	2	13
2	11	4	13	a_2 ↔	0	9	6	15		3	9	6	12	a_2 ↔	1	11	4	14
12	5	10	3		14	7	8	1		14	4	11	1		12	6	9	3
7	8	15	0		5	10	13	2		5	10	13	2		7	8	15	0

$\frac{1}{2}$-完全

14	1	8	7
2	12	3	13
5	11	4	10
9	6	15	0
	↓d		
13	2	1	14
4	9	6	11
10	7	8	5
3	12	15	0

$\frac{1}{4}$-完全

图 45. AC,BC,CA,CB 等型的四阶幻方.

这样就只剩下 16 个较为不规则的四阶幻方尚待检出. 你可以对两个$\frac{1}{2}$完全的幻方施行求补运算与最后两种运算的组合以求得之:

1	14	9	6		2	13	3	12
10	3	4	13	$\xrightarrow{d}$	5	6	8	11
7	8	15	0		14	1	15	0
12	5	2	11		9	10	4	7

它们分别属于以下两型,而每型各有 8 个幻方:

邻接马步型(AK),
折断马步型(BK).

有时，从一个幻方到另一个幻方，可以经过 16 个数字之间的不同置换而导出，这些置换是：

a_n：数 n 的尼姆加法，例如 a_6＝(0 6)(1 7)(2 4)(3 5)(8 14)(9 15)(10 12)(11 13)，

b：大对调(0 12)(1 13)(14 2)(15 3)，

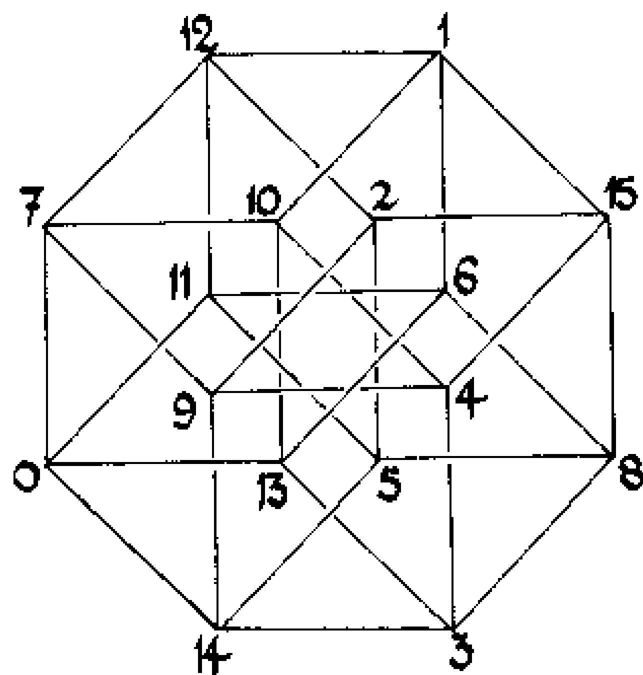
c：轮换(0 10 12)(1 11 13)(14 4 2)(15 5 3)，

d：翻倍后取模 15 同余数(1 2 4 8)(3 6 12 9)(5 10)(7 14 13 11).

其中有些置换，我们已在附图中予以标明.

神奇的镇纸方块*

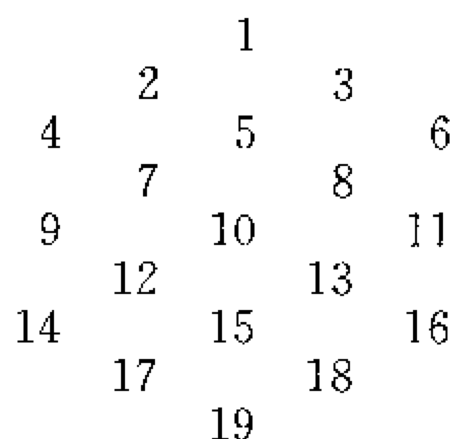
我们让你去重新发现 48 个 BD 幻方之间的种种奇妙关系. 这些幻方有时人们也称之为**泛对角线**或**纳西克**幻方. 在我们的**神奇镇纸方块**中，每个正方形角上四个顶点的数字和为 30. 如果按三个不同方向进行投影，那么你将得出三个幻立方，它的每个平面上的数字之和等于 14. 它们其实就是安德列斯与考克塞特所发现的三种八面体骰子的对偶图形. 在神奇镇纸方块中相邻顶点上的数是伪奇数与伪偶数. 如果你将每个伪奇数用它的对立数(与 15 的尼姆和)取代，你就能看到这个镇纸物的制造方法.



* 译者注：西方人常用的一种吉祥物，目前在一些涉外旅游商店中亦能见到. 一般是用兽骨、象牙、小块大理石、水晶、玛瑙等做成的小方块.

亚当斯的神奇六角形

从下面的模式



出发，把 1 到 19 各数重新排列一下，你能不能用少于 47 年的时间*，发现一个神奇六角形，使三个不同方向上所有五排数字之和统统相等.

逗你乐

这种挑逗得你干着急的玩意儿不时改头换面，以一个新的化名出现于世. 我们已为它选了一个较老的名字. 在美国，它的一个早期版本就是“真头痛”游戏，但最近却冒出了一个新名称，叫做“立即疯”. 制造商们看来极善于制造新名字，但他们却从来不想改变它的基本原理. 现在的问题是要放置图 46 中的四只立方体（在图中，写在外面的字母表示隐匿之各面），把它们摆成一个垂直的 1×1×4 长方柱体，使其每垛墙都显示出 A，B，C，D 四种颜色. 如果你在玩这种游戏时并没有立即疯，但是你也已经伤透脑筋，被它们搞得精疲力尽了.

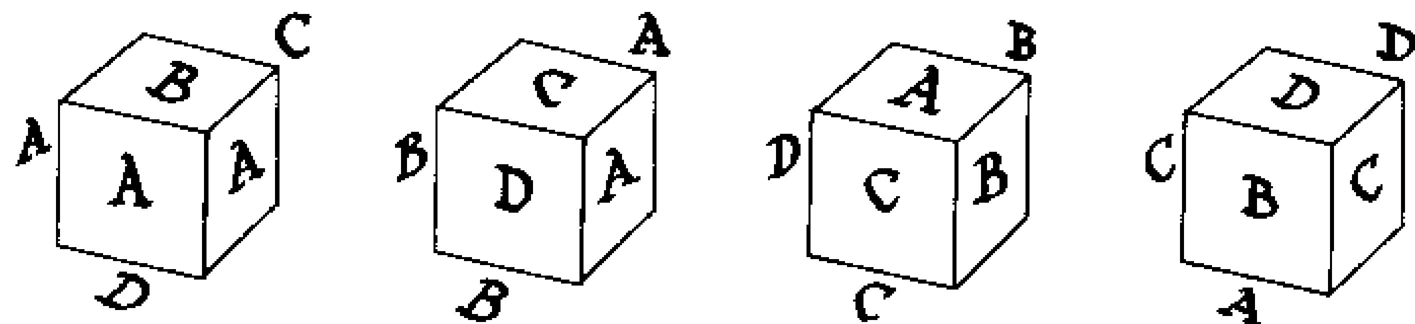


图 46. 逗你乐游戏的四只立方块.

---

* 译者注：据美国数学科普大师马丁·加德纳报道，神奇六角形是由一位业余数学爱好者发现的，他为此耗费了整整 47 年.

汤姆·H·奥皮奈看来是发表一种普遍解法来对付这种问题的第一人，我们认为他的解法仍然是最好的. 让我们设想问题已告解决，并集中观察该柱体的北墙与南墙（见图 47）. 则 X，Y，Z，T 当为 A，B，C，D 的某一排列，x，y，z，t 的情况也与之类似. 把 A，B，C，D 四个字母写在一张纸上，并连接

X 与 x，Y 与 y，Z 与 z，T 与 t.

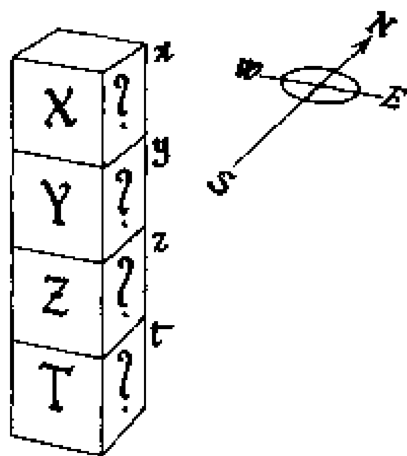


图 47. "逗你乐"解决了吗?

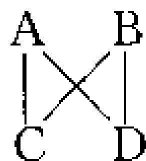
你得到的可能是把 ABCD 连成一条通路，但也有可能是几条通路，其中的字母只出现一次，譬如说，如果

X Y Z T x y z t

为

A B C D D C A B,

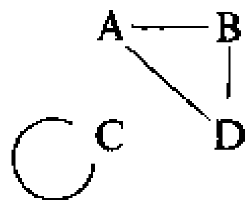
则我们得到的是单独的通道



但若它们为

A B C D D A C B,

那么你们将得出两条不同长度的通路



对摞成柱体的东墙与西墙，情况也类似. 有看一条或几条通路. 无论何者，其中每个顶点都出现一次，每个方块都有一条边相连.

现在，利用下列图形来解决趣题就易如反掌了.（见图 48）. 图中的顶点代表 A,B,C,D 四种颜色，而第 i 个方块所形成的三条边（它们都用 i 标记）分别联结的顶点对应于方块的三对相对面的颜色. 你所要做的事情只是从此图中选出两组分开的通路，而它们对四个字母与四个数字正好各用一次就行.

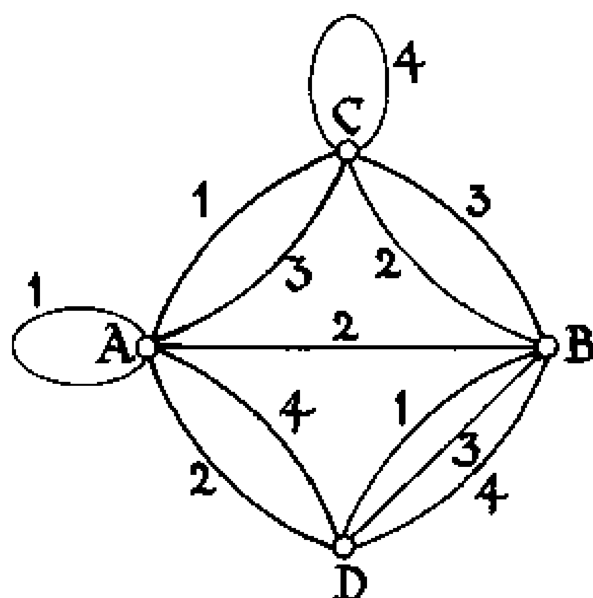
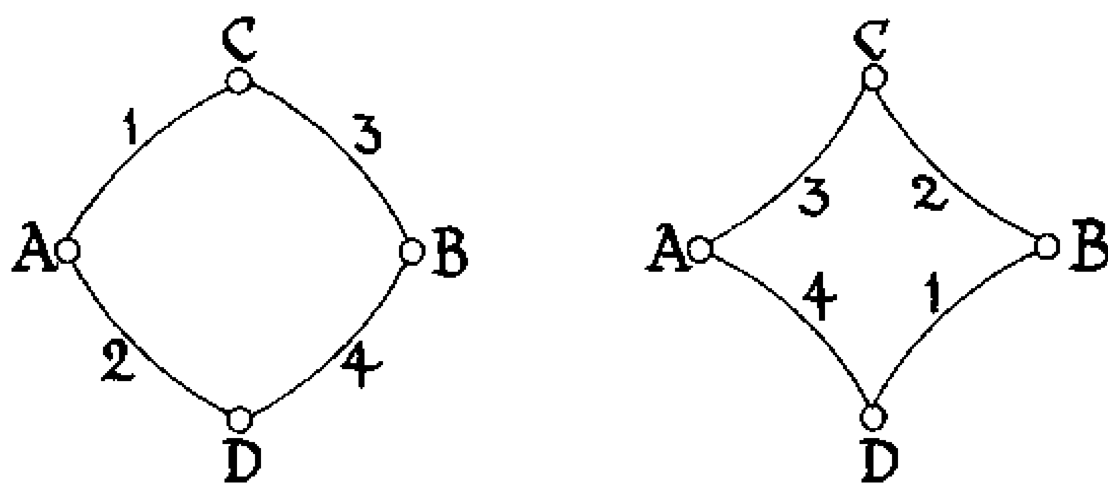


图 48. 解决了"逗你乐".

在这个例子中，通路体系的可能性究竟怎么样呢？考虑通路长度的各种可能性：

1 1 1 1,2 1 1,2 2,3 1,4

你将迅速得出结论：所有的两个通路体系必然具有一个单独的 4 字母通路，而字母的轮回顺序只能是 ACBD. 实际上只有一种选法才能使任一边只用一次：



所以，"逗你乐"这种智力玩具只有唯一解（把立方块重新编号，将摞成的柱体加以旋转或上下颠倒都不算是本质不同的解法）. 你可以把图 46 的四只立方块从左至右地靠拢在一起，解就立即出现了，即使推倒重来也不会有多大困难.

奥皮奈先生对此类游戏的典型例子是一个五只方块的趣题，其历史可以追溯到第一次世界大战（见图 49），他利用了当时五个协约国的旗帜，这五个国家是比利时，法兰西，日本，俄罗斯与

联合王国(英国). 读者们也许会乐于验证他所作出的断言:这个问题有两个实质不同的解答.

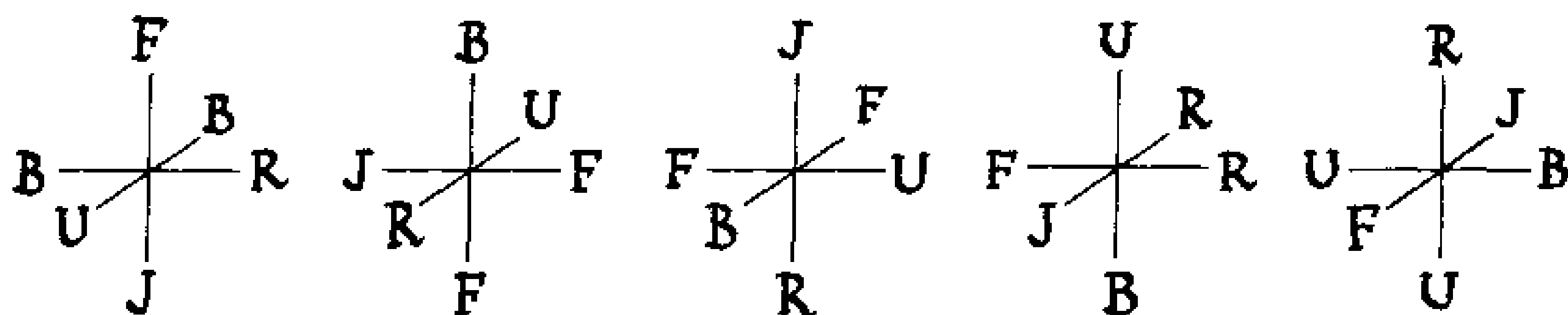


图 49. "协约国的旗帜"趣题.

多连米诺,多连蒙特及其搜索策略

两个单位正方形合在一起可以做成一张骨牌(多米诺),于是 S・W・果隆姆(Golomb)提出建议,3 个,4 个或更多个单位正方形合在一起而做成的骨牌可以相应地叫作三米诺、四米诺等等. 他甚至对五米诺及多连米诺(n 个单位正方形)还注册了专用商标. 不幸的是,他所建议的这些玩意儿内蕴的奥秘不多,探究之道,除了一再摸索(或系统搜索)之外,所剩无几. 正如露斯鲍尔在《数学游戏与欣赏》的早期版本中对七巧板的评语中所说的那样:"这种智力玩具的数学味道不足,我只能勉强地提它一下,就感到满足了."

下面讲一下它的玩法,如果连旋转与反射一起算进去,共有 12 种五米诺,你可以在本书的第 25 章中找到我们的命名法. 这些五米诺加在一起,总面积为 60 个平方单位. 在候选的四种矩形

$$3\times20,4\times15,5\times12,6\times10$$

种,究竟哪一个矩形可以用它们来填满呢? 图 50 中给出了一举解决两个问题的办法. 如果这些

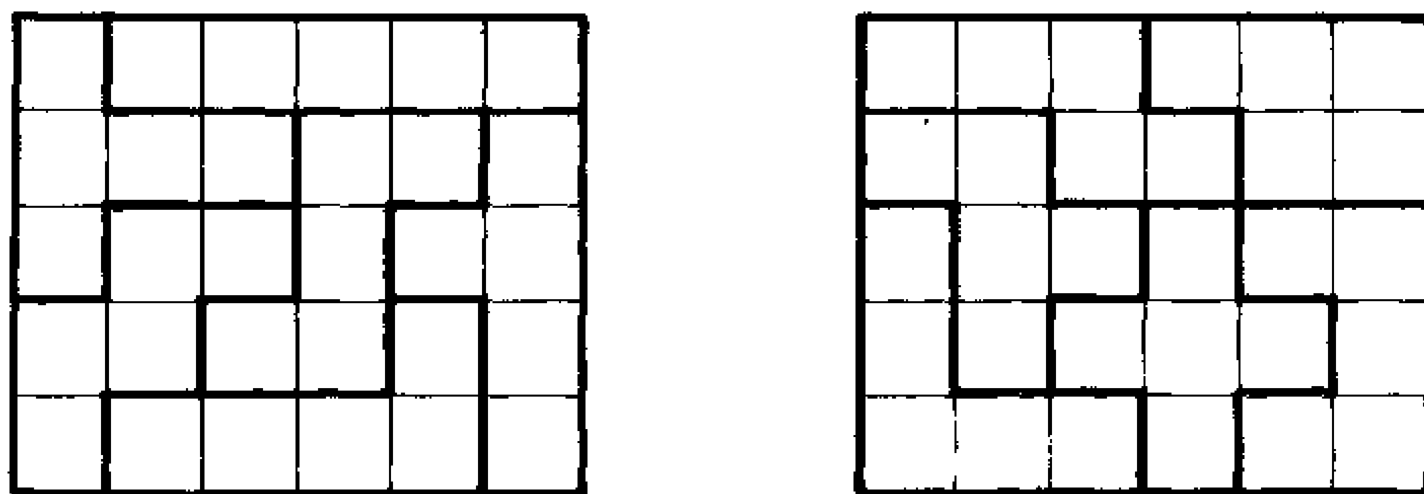


图 50. 用五米诺填满矩形.

五米诺方块都是由五个立方体做成的,那就是填满 2×5×6 盒子(它们也可以填满一只 3×4×5 的盒子)的办法.这类问题对于闲着没事可干的计算机最适合不过,6×10 矩形的填法就是用这种办法加以处理的首批事例,而 C·B·哈赛尔格罗(C. B. Haselgrove)在 1960 年发现了它的 2 339 个解答.

由两只等边三角形可以形成一个菱形.T·H·奥皮奈于是建议用三蒙特,四蒙特……来称呼由三个、四个、……或更多等边三角形所组成的图形.如果反射图形视为与原来的图形不一样,则六蒙特共有 19 种之多,它们的命名法见图 51 所示.用这些六蒙特可以填满图 52 所示的图形,而不同的填法竟达数千种之多.图上所示的填法可能是对子南北纵线最为对称的一种.我们自然也想看到关子东西横线对称的一种类似填法.

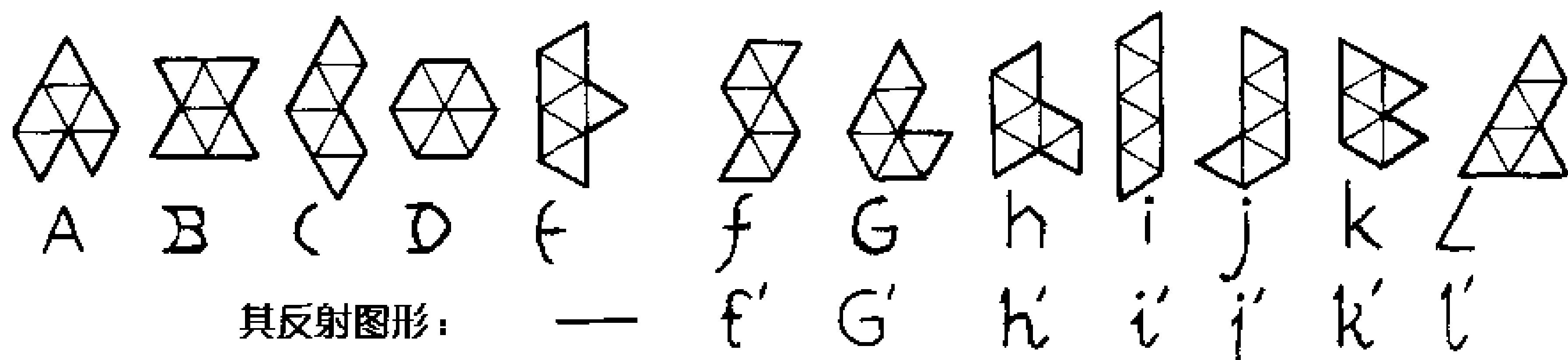


图 51. 十九种六蒙特图形.

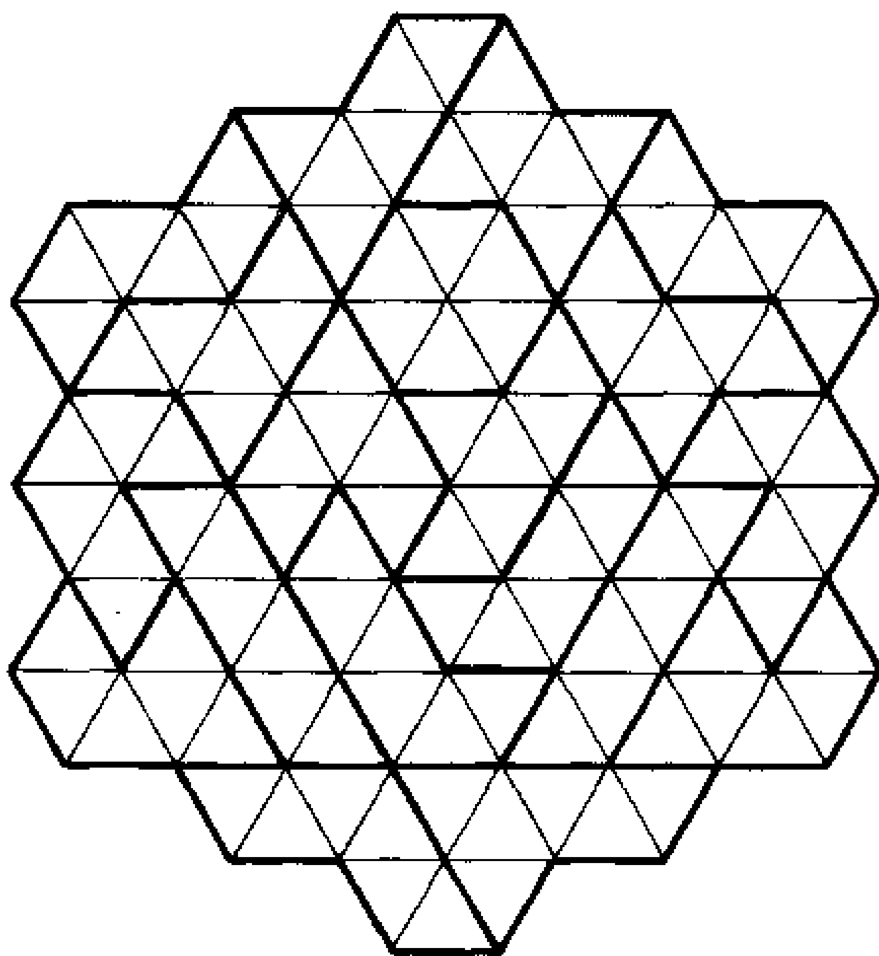


图 52. 这是最对称的"六蒙特"解答吗?

这就提醒人们：对付一种数量极其庞大，无法详尽讨论的趣题，在寻找其搜索策略时，即使你手中有着大型计算机可以派用场，事前对此有些想法还是明智的. 在考虑问题时，对称性往往是一项重要因素. 譬如说，六蒙特游戏中近乎左-右对称的对称解答，人们一般公认它们只能形成搜索空间的一个小角落. 但它像是一个很有出息的解答，因为棋盘上与之相对各边的限制条件同时得到了满足. 尽管如此，对称性并不是唯一的考虑因素. 在分析一种游戏时，最好能够找到该游戏的深水层“大鱼”（隐藏得很深的“秘密”）. 例如，对付较小棋盘上的法国军阵游戏（即本书第 21 章“野兔与猎狗”——译者注），你可以用穷举法加以分析，不必了解它的运行细节. 但要是你能发现它的要害，即局中人实质上是为争夺“对立态”而战时，你就可以把策略推广到极大的棋盘上去，而对于后者来说，即使用计算机来作完整分析也是很难做到的.

这本《稳操胜券》书里头的许多分析大体上说来都是如此. 仅当我们认识到造房子游戏主要应考虑奇偶性而不是计算房屋间数时，我们才有可能取得进展. 在伐木游戏大杂烩中要想确切计算中等规模的局势也是复杂得要命，但当我们认识到原子量也许是唯一真正重要的因素时，我们才算有了真正的起步. 在独粒钻石游戏中隐藏得极深的秘密是平衡概念（在第 23 章中由 α，β 来表示）.

即便在多米诺问题中也许不存在隐藏得很深的秘密，有些人还是要比另外一些人高明得多，因为他们能够在更有可能的场合下进行潜意识搜索. 有经验的多米诺专家们在露一手时，并非总是反来复去地从头开始，几乎任何时刻都是在手头摆弄少数几块. 当他们发现了一个解答时，他们通常能够用类似操作，将其转换成别的解答. 譬如说，在图 50 中，你可以把 R，S 两块五米诺部件重新拼装而得出另外的解答，在图 52 中，我们可以交换两对（f，h），或者把中央的六边形（A，D，E，j，j′）加以旋转.

出给专家做的题目：请把 n^2 块形状像字母 A 的六蒙特拼成一个放大 n 倍的复制件 A. 试问，n 的值应该是多少？

艾伦·休恩的割圆部件*

艾伦·休恩（Alan Schoen）取得了一系列智力玩具的专利权，这些玩意儿来自著名的正 $2n$

* 译者注：此词由“割圆术”演变而来，详见华罗庚先生的科普著作“从刘徽割圆术谈起”，由于圆是正多边形的极限，所以此种玩具其实是从正多边形中截取而来的.

边形的分割问题，即把它分割为$\binom{n}{2}$个菱形，其内角分别为$\pi k/n$，$1\leqslant k\leqslant n-1$（见图 53）. 他从$\lfloor n/2\rfloor$种形状的菱形中每种取出一个来，同你所取的各种菱形，尽一切可能拼成一个六边形. 六边形中不能有平角，因为他观察到，在正 $2n$ 边形中没有一种菱形的拼装能包含一对平行边，除去那种拼装时能在每一组对边之间形成梯子的"横档"者之外. 这一非凸性条件同皮特·海因在设计索马块时所加条件很类似，但这里却出现得相当自然. 反射后得出的解答不认为相异. 这些菱形的集合与六边形（割圆组件?）可以拼装出原先的正 $2n$ 边形. 实际上，

对 $n=2,3,4,5,6$，实质不同的拼装法

有　　1，1，3，14，超过 150 种.

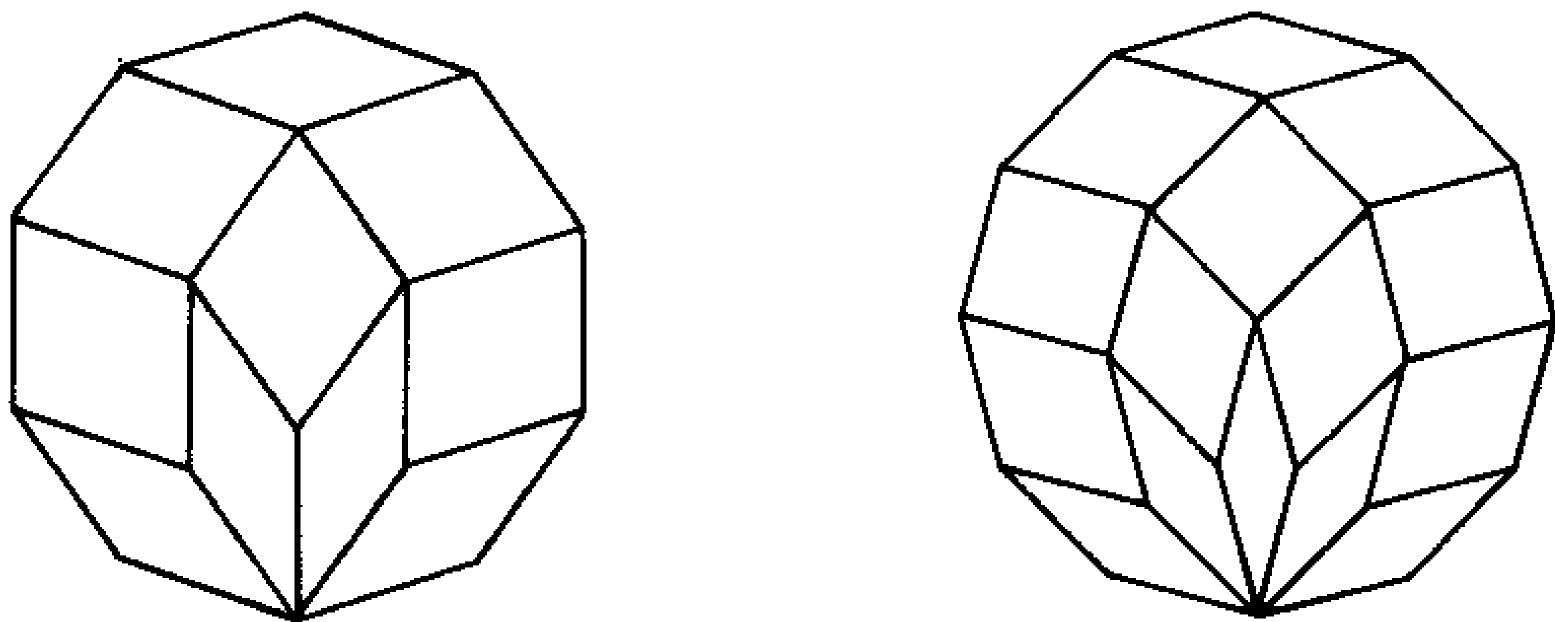


图 53. 把 $2n$ 边正多边形分解成菱形，$n=5$ 及 6.

休恩给了我们三人中的一人一套 $n=8$ 时的组件，我们终于把这 16 块东西拼成了正十六边形，见图 54. 我们用 k 的值给这些组件命名，其中的 $\pi k/n$ 为菱形的较小内角. 当组件的两个形状是由同一对菱形组成时，反射角较为平直的那一个按自然顺序排列其编号数字.

解法可以由彼及此地逐个得出来，很像 O·皮奈的六蒙特游戏，或者像我们设计的索马游戏. 图 54 中，组件 4 与 22 可进行旋转，或者同 2，24 交换，西后者又可旋转或反射. 在交换过以后，用 2 与 11，34 接触，我们就有了一个可旋转的十边形，1，2，34，11，32，3，4，其中的后面四块又可形成一个可旋转的八边形. 由于 3 与 4 相邻，于是它们可同 34 交换，此后，4，1 与 2，3 又相邻，于是又可同 14，23 互换. 在原来的交换之后，2 与 13 将有两条公共边，面这两者可以旋转. 在此之后 21 与 12 又可以交换，如果把 1，2 拿走，代之以 12 的话. 再接下去，2 可同 23，24 相接触. 于是在 34 交换后，2，3 可同 32 交换，于是 2 与 11 可形成一个对称的六边形. 就这样一步步地做下去，即可得出一百多个解答.

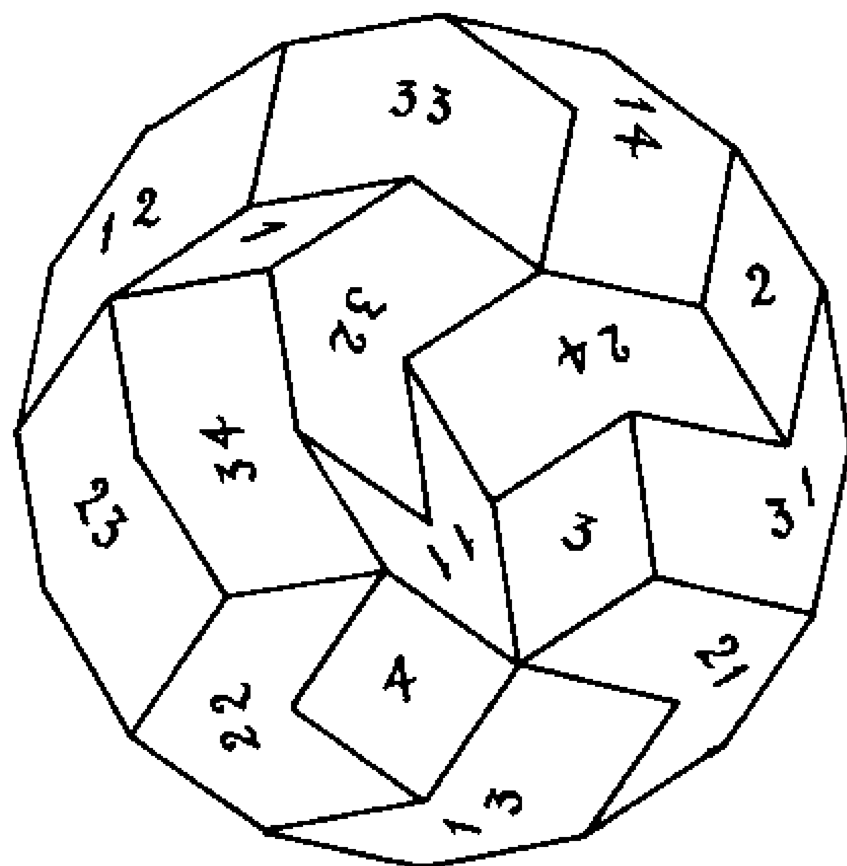


图 54. 用休恩的 16 块拼成一个正 16 边形. 解法多得不可胜数.

一套割圆组件* 究竟有多少块呢? 这要看 n 是奇数还是偶数. 当 $n=2m$ 时,有 m^2-m 个凹六边形块,而当 $n=2m+1$ 时则有 m^2 个凹六边形块,无论哪一种情形都有着 m 个菱形块,所以一共有 m^2 或 m^2+m 块. 你可以利用这套组件来做各式各样的动脑筋游戏,从简单的、七巧板式的图形(见图 55),直到难度极大的拼装游戏. 要断言后一种游戏是否含有什么隐藏得很深的秘密尚属为时过早(不过艾伦·休恩已指出了涉及"平行边"的一项性质);说不定它有着较好的机会,因为比起多米诺或多蒙特,它在形状方面有着更多规律性.

可以得出许多令人悦目的模式,譬如说,用 r^2 集合的组件可以拼成层层嵌套的同心正 $2n$ 边形,其边长分别为 $1,2,\cdots,r$.

这一系列智力玩具的"指数式增长"难度提醒我们在进行电脑搜索时要增加一点注解. 一种典型的组合玩具或者大小为 n 的搜索,需要完成的工作量将有如于 $n!$,比起 c^n(不管你把底数 c 取得如何之大)来,它更像是 n^n. 但从另一方面来看,解的个数仅仅是 c^n,因而当数字变得越来越惊人时,找出其中一个解的概率只是 $(c/n)^n$,当 n 大于 c 时,它将迅速地变得非常之小.

---

* 译者注:英语前缀 cyclo,有"圆口动物、圆口的"等意义,我们知道,圆内接正 n 边形,当 $n\to\infty$ 时,其极限为圆,猜想此词当由此演变而来. 但此处实际指的仍是多边形的菱形或凹六边形组件,各组件的边与圆弧相差甚远,也拼不成圆,希阅者鉴之.

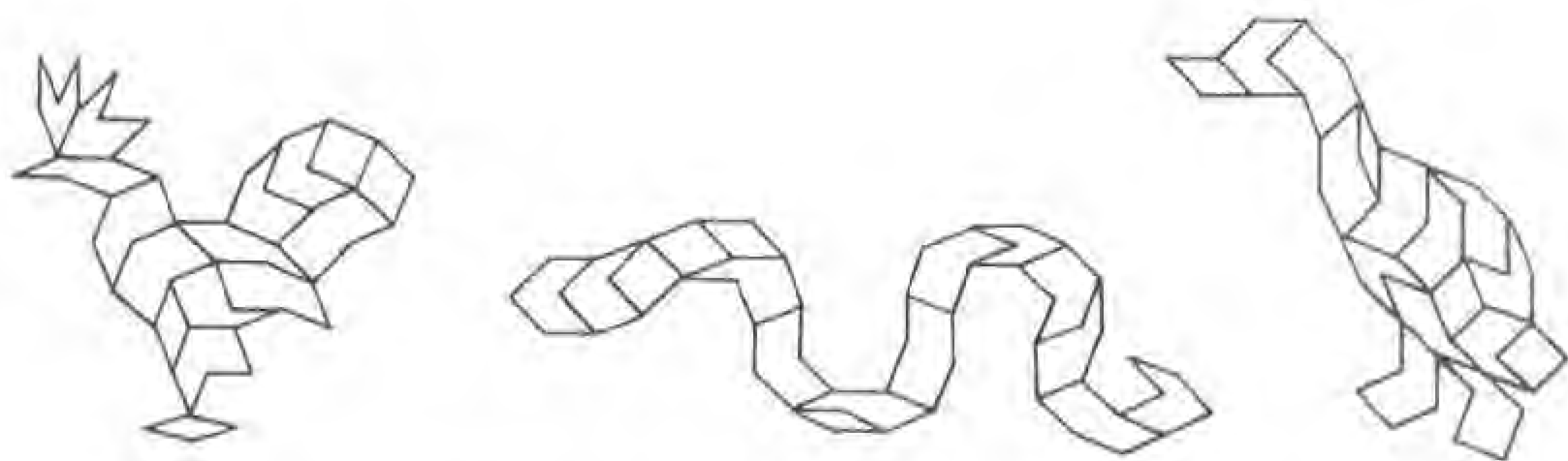


图 55. 用休恩的"十六巧板"拼出来的图形:公鸡、蛇与小鹅.

麦克马洪的超级多米诺

在其著作《新数学消遣》一书中,麦克马洪提出了一个广义多米诺游戏的新品种,他是从正多边形的有色分割三角形而导出来的.我们将讨论其中的两个实例.如果我们只用四种颜色,那么正好有 24 种超级多米诺着色法,而其中的一个标准问题就是要把它们拼成一个正六边形.使周长全部为黑色,其他同样颜色的零件也尽量拼凑在一起,见图 56.

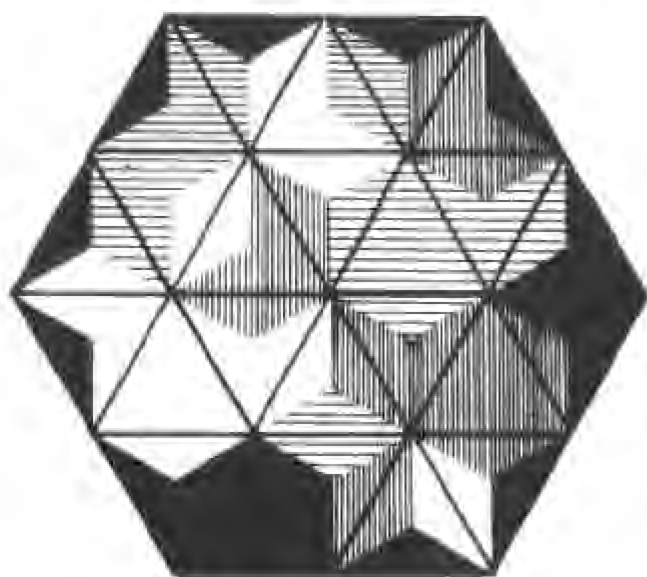


图 56. 麦克马洪的四色三角形超级多米诺.

对本游戏来说,很难把秘密隐藏得太久.环绕一周的黑边在数量上刚刚足够,并无多余,一旦你找到了一种合适的配置,剩下来的事情就相当容易了.

当我们研究 24 块三色正方形超级多米诺块时,通常的问题是在类似条件下把它们拼成一个 4×6 矩形,但此时的黑边问题就要奥妙得多.可以证明,此问题的每一个解中,都有着四个正方形的一纵列,其中的每一水平边都是黑色(所谓"**梯子**")在图 57(a)中,梯子占据了第二列,而

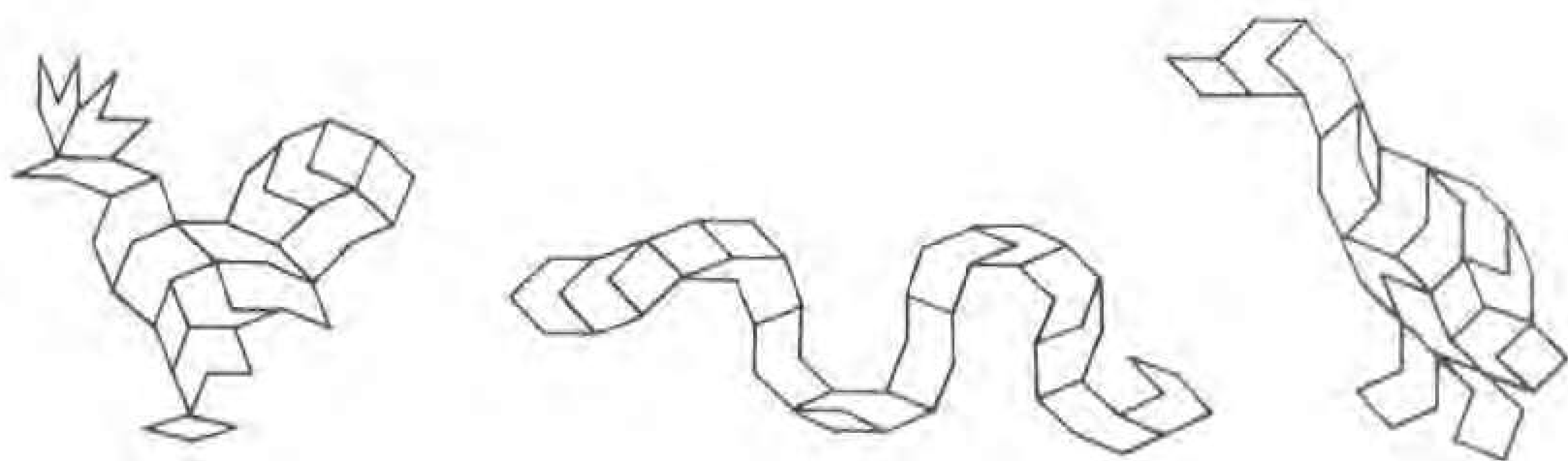


图 55. 用休恩的"十六巧板"拼出来的图形:公鸡、蛇与小鹅.

麦克马洪的超级多米诺

在其著作《新数学消遣》一书中,麦克马洪提出了一个广义多米诺游戏的新品种,他是从正多边形的有色分割三角形而导出来的.我们将讨论其中的两个实例.如果我们只用四种颜色,那么正好有 24 种超级多米诺着色法,而其中的一个标准问题就是要把它们拼成一个正六边形,使周长全部为黑色,其他同样颜色的零件也尽量拼凑在一起,见图 56.

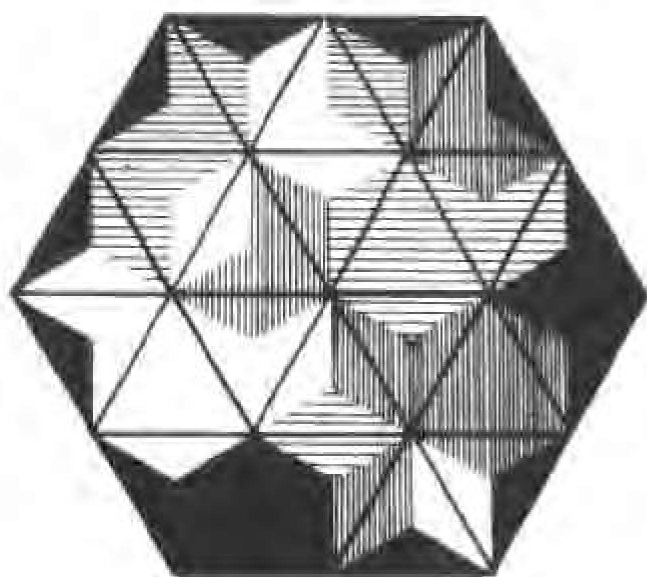


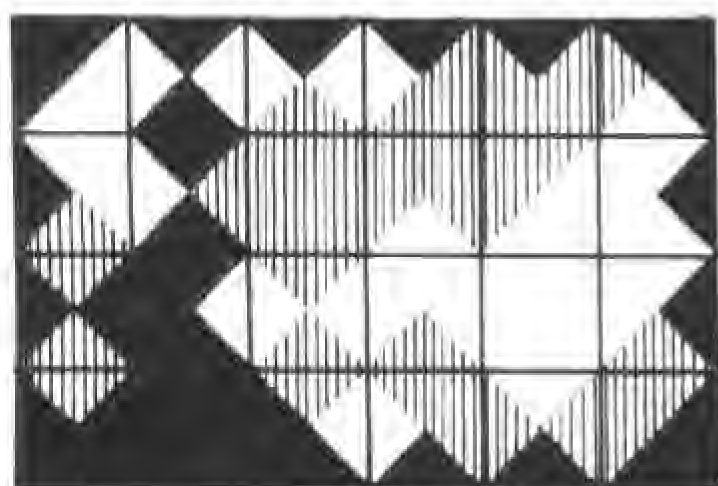
图 56. 麦克马洪的四色三角形超级多米诺.

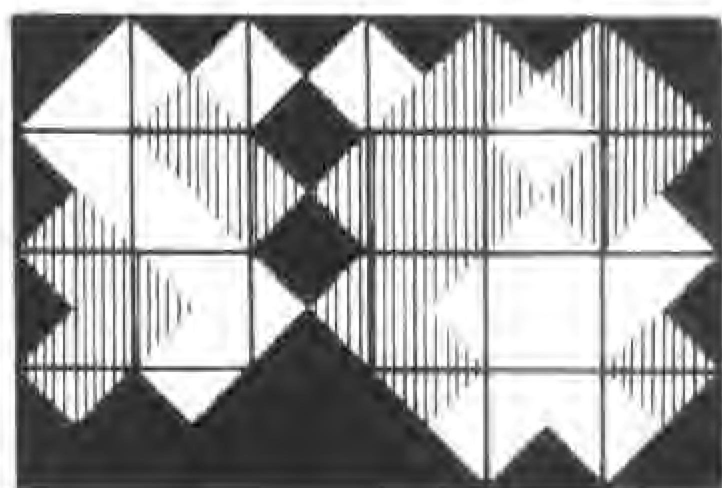
对本游戏来说,很难把秘密隐藏得太久.环绕一周的黑边在数量上刚刚足够,并无多余,一旦你找到了一种合适的配置,剩下来的事情就相当容易了.

当我们研究 24 块三色正方形超级多米诺块时,通常的问题是在类似条件下把它们拼成一个 4×6 矩形,但此时的黑边问题就要奥妙得多.可以证明,此问题的每一个解中,都有着四个正方形的一纵列,其中的每一水平边都是黑色(所谓"**梯子**")在图 57(a)中,梯子占据了第二列,而



在图 57(b)中，它占据了第三列. 在本章的增补材料中你将能找到黑边的每一个可能构形.





(a)　　(b)

图 57. 三色正方形超级多米诺游戏解答中显示出来的"梯子".

利用不同形状的边来取代颜色，可以把麦克马洪超级多米诺问题改造为锯齿形智力玩具. 例如在他的三色正方形问题中，人们可以用图 58(a)所示的三种形状的边或者图 58(b)的凹、凸办法(后者改变了匹配条件).

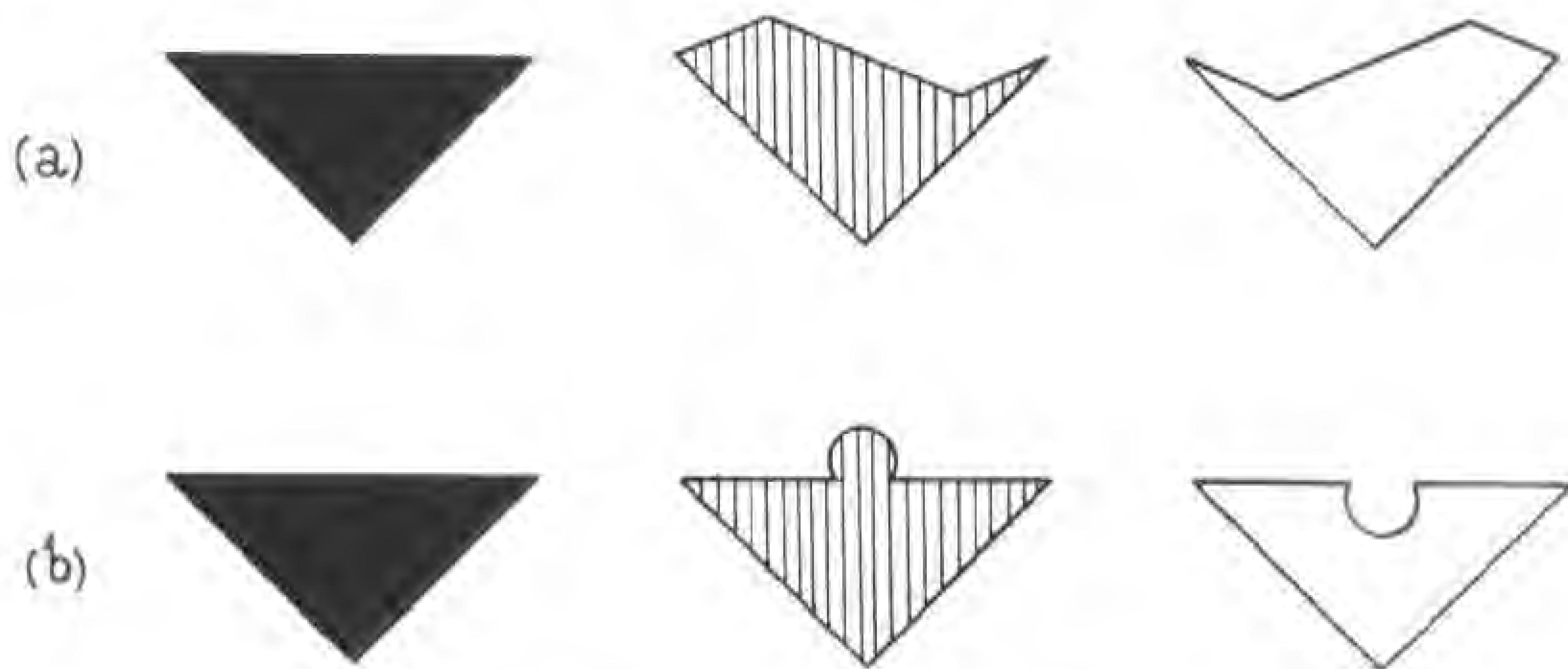
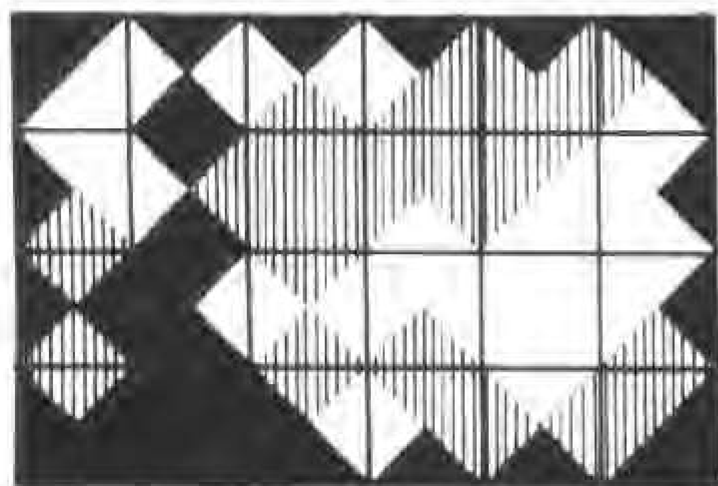


图 58. 制造麦克马洪锯齿形玩具的两种办法.

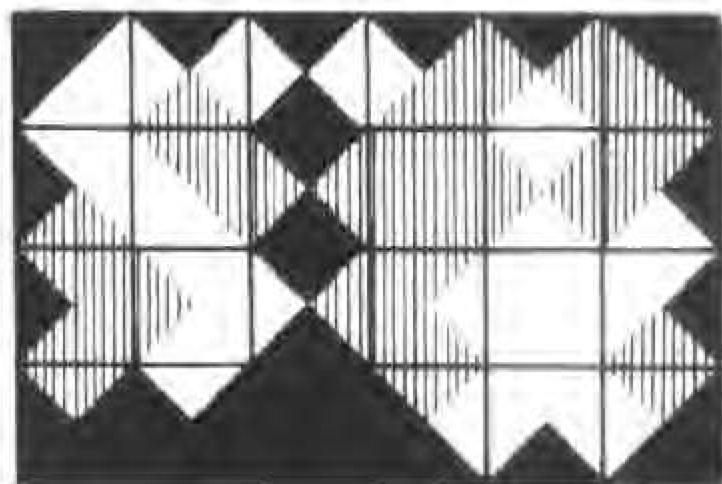
若干年以前，我们中间的一人曾经设计出一种圣诞贺卡(见图 59)，其原理就根据图 58(b)中的锯齿形玩具. 但请注意，图 59 中的拼法不能算作一个解答，因为其中有着头与手直接相连，而头颈又同手臂连接起来了. 你能不能把它改造成为解剖学上完全正确的解答呢? 图 60 给出了帕德逊(M. S. Paterson)的修正方案，他用的是另一种形状体系. 你也必须把这些拼板重新排



在图 57(b)中，它占据了第三列. 在本章的增补材料中你将能找到黑边的每一个可能构形.



(a)



(b)

图 57. 三色正方形超级多米诺游戏解答中显示出来的"梯子".

利用不同形状的边来取代颜色，可以把麦克马洪超级多米诺问题改造为锯齿形智力玩具. 例如在他的三色正方形问题中，人们可以用图 58(a)所示的三种形状的边或者图 58(b)的凹、凸办法(后者改变了匹配条件).

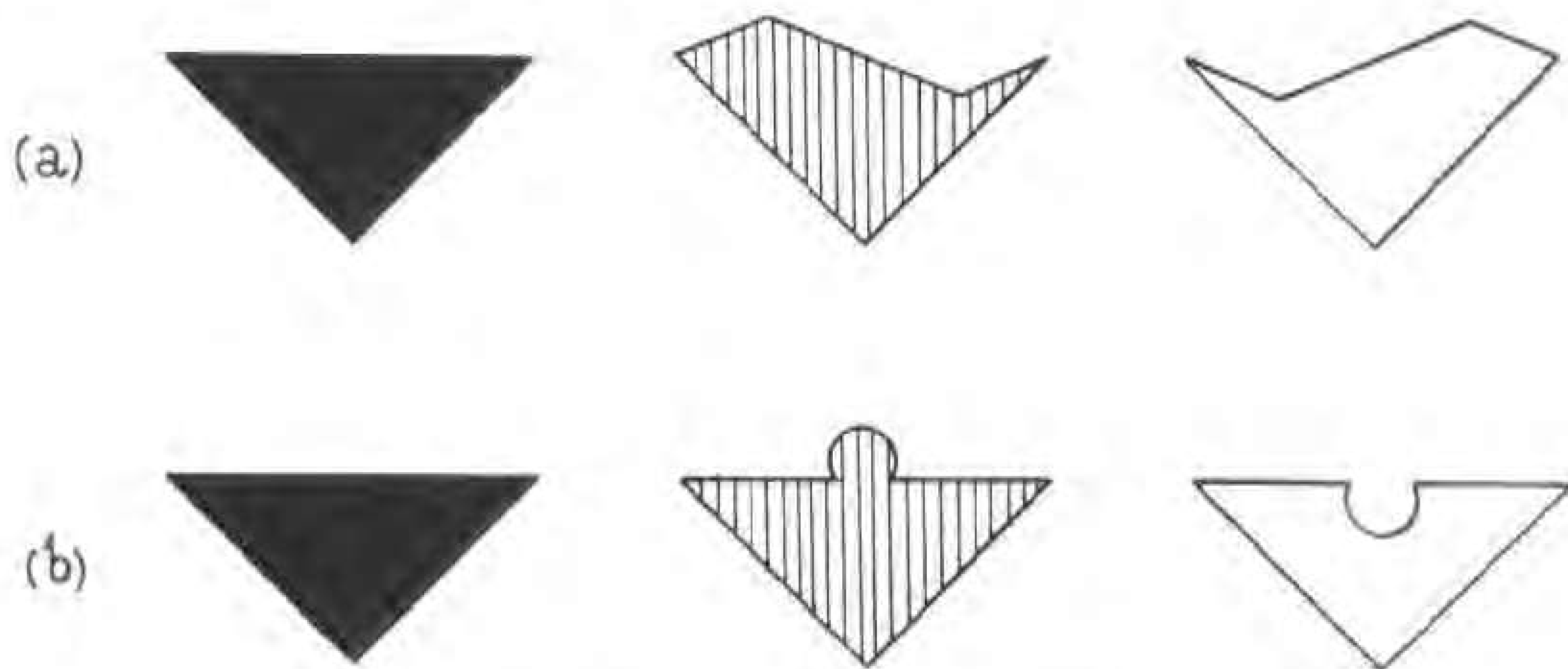


图 58. 制造麦克马洪锯齿形玩具的两种办法.

若干年以前，我们中间的一人曾经设计出一种圣诞贺卡(见图 59)，其原理就根据图 58(b)中的锯齿形玩具. 但请注意，图 59 中的拼法不能算作一个解答，因为其中有着头与手直接相连，而头颈又同手臂连接起来了. 你能不能把它改造成为解剖学上完全正确的解答呢? 图 60 给出了帕德逊(M. S. Paterson)的修正方案，他用的是另一种形状体系. 你也必须把这些拼板重新排

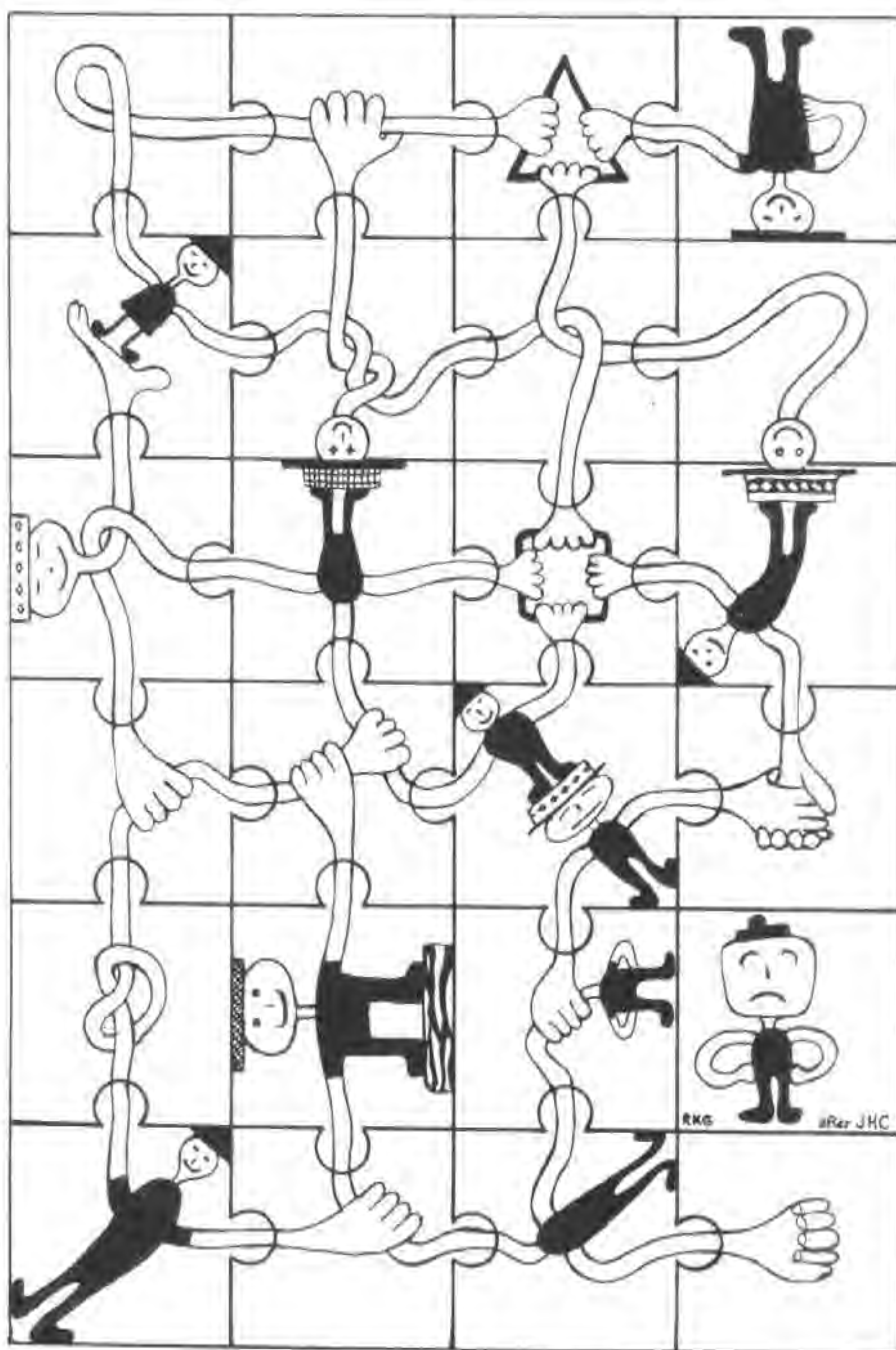


图 59. 康威设计的 1968 年圣诞贺卡.

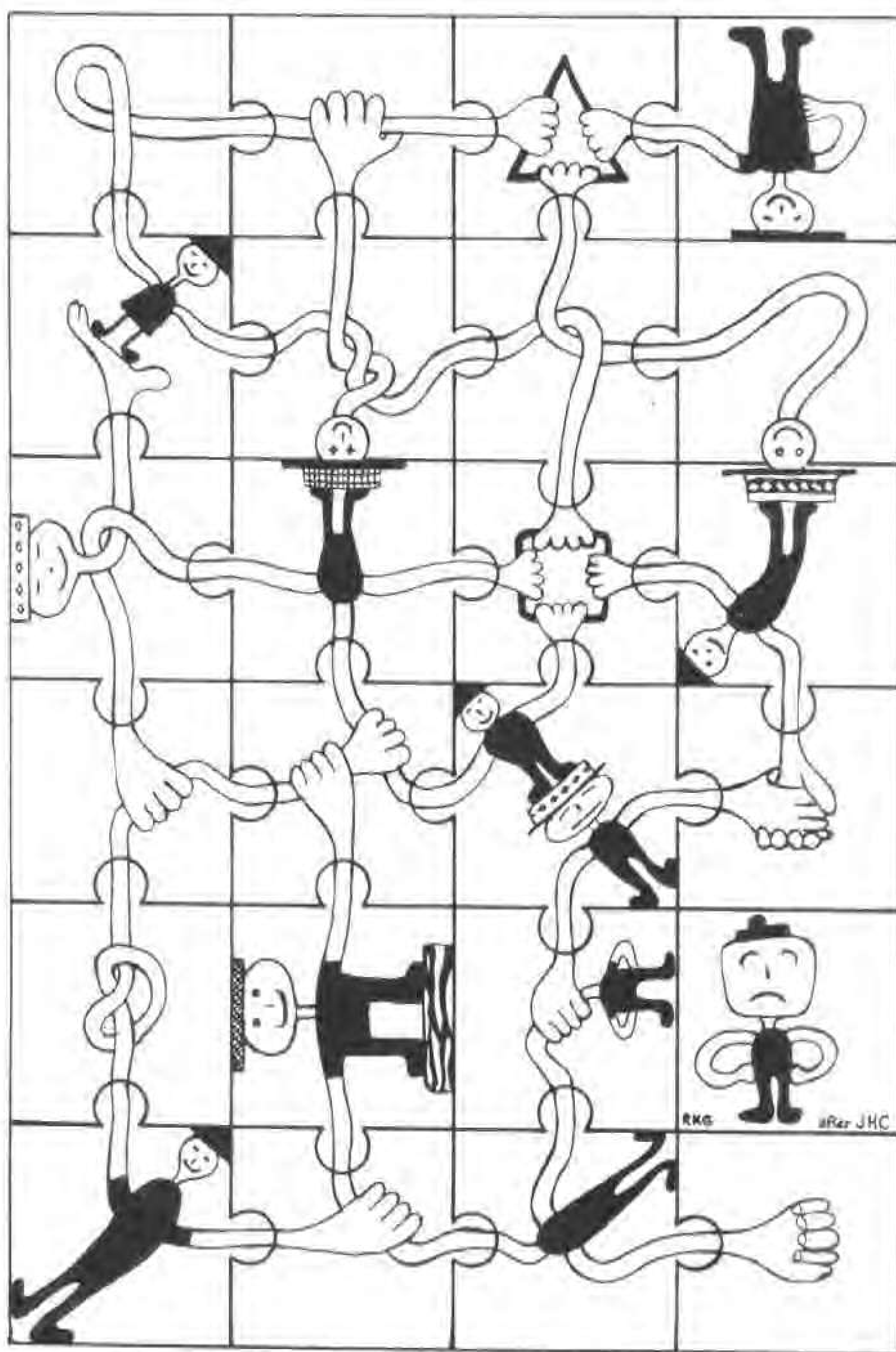


图 59. 康威设计的 1968 年圣诞贺卡.

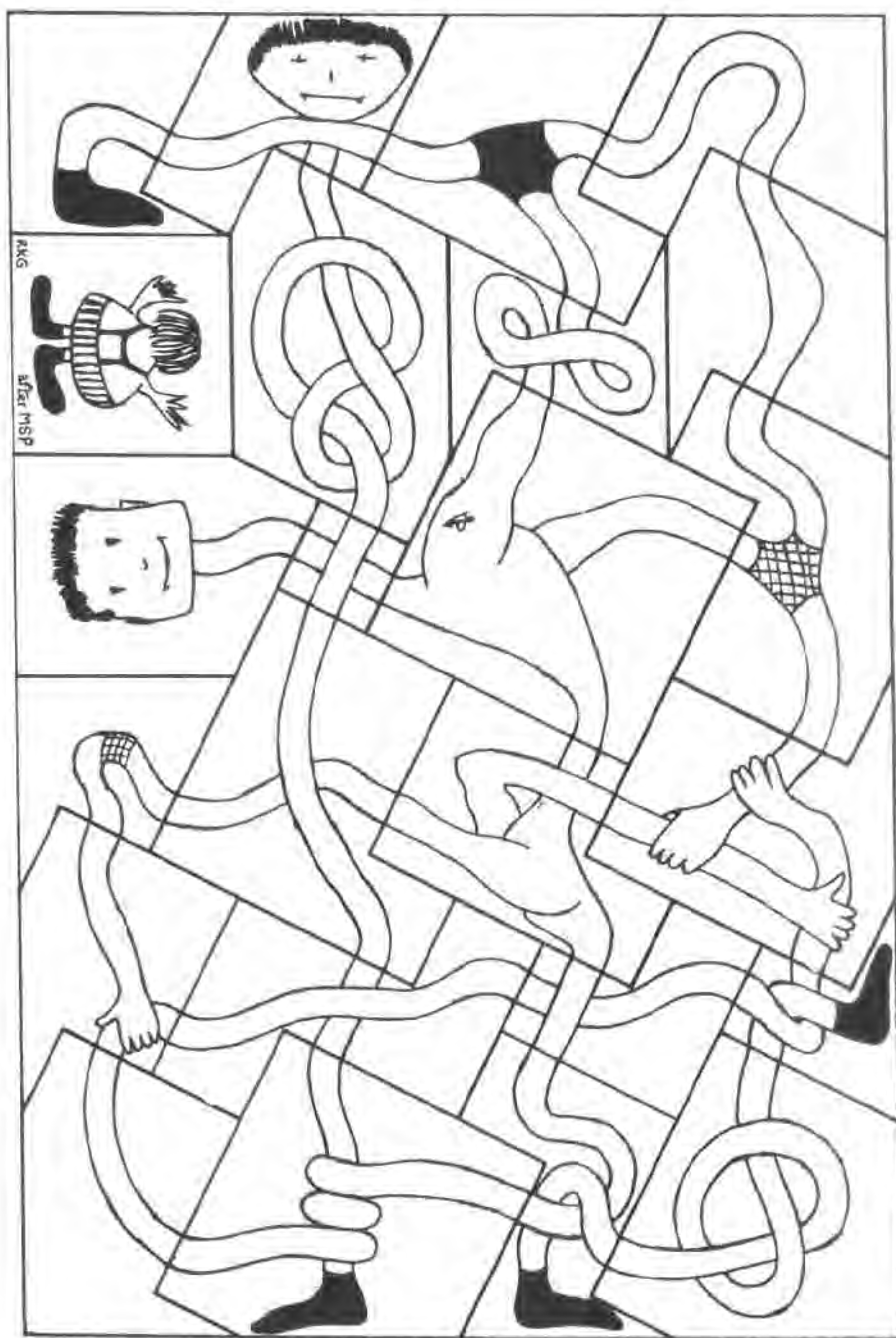


图 60. 帕德逊的摔角比赛.

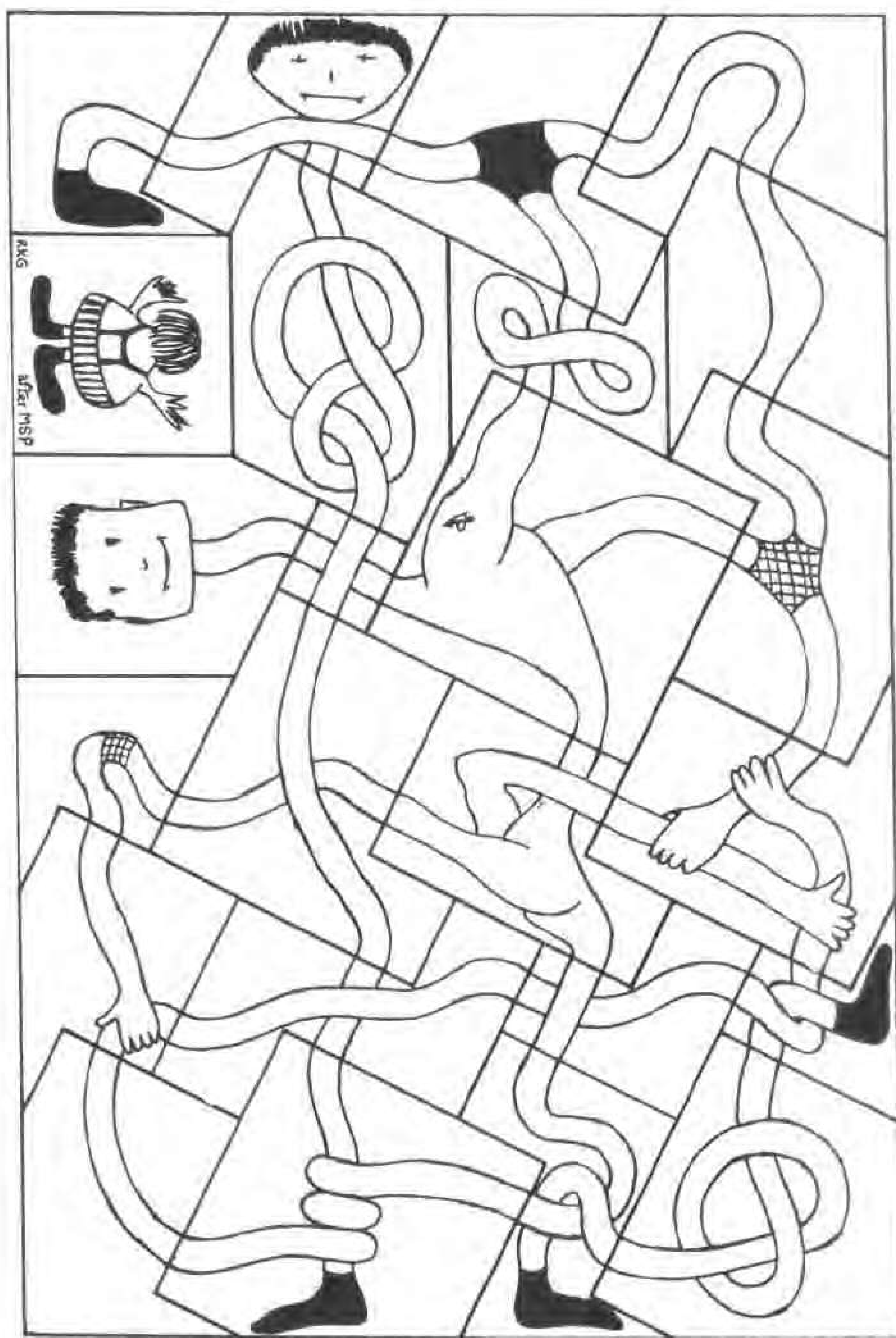


图 60. 帕德逊的摔角比赛.

列,使每位摔角运动员都拥有一个正确安排的身体:一个头,一个身体,一条裤子,两只手臂,两只脚!

五米诺十二面体

五条或五条以上边的麦克马洪超级多米诺玩具还米受到人们的更多注意,这里倒有一个很巧妙的小问题.存在着 12 种不同的五米诺,如果我们在每一个零件上都使用五种不同颜色,并准许把它们翻身.你能不能把它们装配成一个正十二面体的 12 个面(颜色当然要求互相匹配)?

关键日*法则

这里有一个简易办法,可以决定任意一年的任意一天是星期几.在一年中,二月份的最后一天的星期数称为该年的**关键日**.譬如公元 1000 年,**关键日**(2 月 29 日)是星期四.在任一年,下列日子都是关键日:

2 月 28/29　　　1 月 31/32**

(闰年用后面的日期),在双月,关键日为

4 月 4 日,6 月 6 日,8 月 8 日,10 月 10 日,12 月 12 日

(月数与日数恰好相同),而单月的关键日为

3 月 3+4,5 月 5+4,7 月 7+4,9 月 9−4,11 月 11−4

(记忆法:有 31 天的大月,加 4;有 30 天的小月,减 4.)下面给出一个记住它的简要办法.

1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
31/32	28/29	7	4	9	6	11	8	5	10	7	12
最后一天	最后一天	大 3	偶 4	大 5	偶 6	大 7	偶 8	小 9	偶 10	小 11	偶 12

你可以用此办法迅速求出每月的其他关键日,只要加减 7 的倍数就行,例如,由于

7 月 11 日是一个关键日,所以 7 月 4 日(美国独立日)也是关键日,

又因　　12 月 12 日是关键日,所以 12 月 26 日(节礼日***)也是.

---

* 译者注:原文 Doomsday 的词义为世界末日,最后审判日.现按照本算法的实际意思改译.

** 译者注:1 月本无 32 日,这是一个虚拟的日子,以便推算.

*** 译者注:节礼日是圣诞节的次日,为英国法定假日,按民间风俗,此日要向邮递员等赠送节礼.

现在问你一个问题，在公元1000年，五一节是星期几？由上法可知，5月9日，5月2日都是关键日，而公元1000年的关键日为星期四，所以五一节是星期三.

加减日数时容易出错，所以我们建议你用以下的记忆办法：

○日	一日	二日	三日	四日	五日	六日	七日
星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日

设我们要求公元1000年的米迦勒节*(9月29日)是星期几，则可计算如下：

9月5日(9月是小月)，9月26日是关键日，故为星期四，由此再加三天，所以9月29日是星期日.

要想求出某个世纪中任意一年的关键日，你应加上世纪年的关键日，即

该年减1000后，除以12的商数，

加上余数，以及余数中4的个数.

例如，对公元1066年，我们的算法如下：

星期四，	5个12，	6	与	1	
	(60)	(余数)		(6中有一个4)	
4	+5	+6	+	1	=2，mod 7，

所以1066年的关键日是星期二，故知赫斯廷斯之战**(该年10月14日)发生在

星期四之后二天，即星期六.

再来看看本世纪的两个重要日子，设1900年的关键日为星期三.

8月4日，	19 ———— 14	
减4	星期三，	1打，2(加0)=2天(星期二)***
11月11日，	19 ———— 18****	
加4	星期三，	1打，6(加1)=15天=1天(星期一).

当然，在计算时，完整的星期数是可以省略的，所以，在

(4加3)　1，　(6加1)

中，括号里的数可以忽略不计，于是，答数就马上出来了.

---

* 译者注：米迦勒节又名紫菀花节，是英国四大结帐日之一.

** 译者注：英国历史上的一次重大战役，详见司各特的名著《艾凡赫》(旧译《萨克逊劫后英雄略》).

*** 译者注：此处之算法为3+1+2−4=6−4=2. 因8月份要用8月8日为参照数.

**** 译者注：第一次世界大战发生于1914至1918年.

在儒略历(由罗马政治家朱利叶斯·恺撒创立)中,每一世纪的首日要比前一世纪的首日提早一天,

所以,公元

0	100	200	300	400	500	600
700	800	900	1000	1100	1200	1300
1400	1500	1600	1700	……		

的关键日依次是

星期日　星期六　星期五　星期四　星期三　星期二　星期一

但在现行的格里哥利历(由教皇格里哥利十三世下令更改)中,公元

…………………………………………			1500
1600	1700	1800	1900
2000	2100	2200……………	

的关键日却分别为

星期二　星期日　星期五　星期三

这是因为:不能被 400 整除的世纪年不是闰年,故而要比它的前一个提前两天.为了便于实际应用,你们可以记住 1900 年的关键日是星期三,此前每回溯一步(1800,1700,1600 年)要加上两天.

譬如说,由于 7 月 4 日是一个关键日,

所以 1776 年 7 月 4 日可按下法计算:

星期日,6̸个"一打",4 再加 1̸=星期四.

不同国家在修改历法时,各有各的做法,"抹掉"的日子是不一样的.例如,

意大利,法国,西班牙,　　删去 1582 年 10 月 5 日至 14 日.

大不列颠及其美洲殖民地,　　删去 1752 年 9 月 3 日至 13 日

瑞典　　删去 1700—1740 年期间所有置闰的日子

在其他各国,则删去的日数在 1583 年(波兰)至 1923 年(希腊)之间选定.

你们还应该注意,每年的第一天未必都是一月一日.在 1066 年之前,元旦是上一年的圣诞节,另有若干个世纪,元旦定为三月二十五日(老式计日制度,在 1752 年废弃).在此处所讲的关键日计算星期数办法中,这些事情是予以忽略的,但应根据不同的国情,有时要考虑及之:

1616 年 4 月 23 日(美国),=星期五,1 打,4 加 1,再减去 2=星期二(莎士比亚逝世日)

1616 年 4 月 23 日(西班牙)=星期二,1 打,4 加 1,再减去 2=星期六(塞万提斯逝世日)

1603 年 2 月 29 日(英国)=正好星期五,0 个"一打",4 加 1=星期三(惠特吉夫德逝世日)

上面的"1603"显然应该是 1604 年(新式计日制度). 惠特吉夫德大主教是女王伊莉莎白一世的"大红人",他是皇家委员会的首任主席,该委员会最终制定了《圣经》的钦定女本.

在 1300 年到 1752 年之间,从一月一日到 3 月 24 日的那些"模糊"日子通常用"双重日期"来纪录,例如,女王伊莉莎白一世的逝世那天是 1602/3 年 3 月 24 日,按照上面的办法,我们可以算出它是"3 加星期五+3",即星期四.

在计算公元前日期的星期数时,我们最好加上 28(或 700)的很大倍数,使之变为一个公元后的日期,但必须记住,公元并无 0 年(公元元年的前一年就是公元前 1 年),所以,如果你想计算公元前 4004 年 10 月 23 日(根据耶休大主教的说法,这一天就是上帝创造万物的日子,称为**创世日**)是星期几,则在儒略历中,我们加上 4200 之后,即得

公元后 197 年 10 月 23 日(不是 196 年,请特别注意),

随后用上法计算,即得:

6 天,8 打,1 加 0,再减去 1=7 天=星期日.

所以上帝的创世日是星期日.

问题　1. 一位将近 48 岁的男子庆祝他的第一个生日. 试问他是在哪个国家,哪一天庆祝的,那天是星期几?

2. 在格里高利历中,哪个月的 13 日出现得最多?*

复活节推算捷法

各种信息渠道告诉我们计算复活节的办法,其法则繁简不一. 这些办法的适用范围很有限,有时难免有错,甚至在声誉良好的著作中也间或有之,这是由于他们忽视了下述简易法则的例外情况所致.

复活节被严格定义为**复活节满月**后的第一个星期日,而后者是天文上满月(望)的某种算术近似值. 复活节满月由下述公式

$$(4\text{ 月 }19=3\text{ 月 }50)-(11G+C)_{\mathrm{mod}\ 30}$$

给出之,但当该公式给出

4 月 19 日时,应当取　4 月 18 日

---

* 译者注:西方国家有许多人认为某月 13 日是大凶的日子,已有许多论大研究这一问题.

而当它给出

4 月 18 日，但 G≥12 时，应当取 4 月 17 日.

在上述公式中，

G(黄金数)＝年份$_{mod\ 19}$＋1(切勿忘记加 1!)

C(世纪项)＝＋3　对一切儒略历的年份

－4　对 15xx，16xx 年

－5　对 17xx，18xx 年

－6　对 19xx，20xx，21xx 年

(以上 －4、－5、－6 三项为：格里高利历的年份)

格里高利历的某年 Hxx，计算 C 的一般公式为

$$-H+\lfloor H/4\rfloor+\lfloor 8(H+11)/25\rfloor.$$

而其下一个星期日即可由上述关键日法则求出之.

例如，1945≡7，mod 19，∴G＝8，由此求出复活节满月为：

3 月 50 日－(88－6)$_{mod\ 30}$＝3 月 50－22＝3 月 28 日.

由于它是一个关键日，所以极易求出它正好是星期三，

即　星期三之后(＋3＋9＋2)天. 当然也是星期三了.

于是 1945 年的复活节便是 3 月 32 日，实际即是该年的 4 月 1 日愚人节.

对 1981 年来说，由于 1981≡5. mod 19，公式给出

4 月 19－(66－6)$_{mod\ 30}$＝4 月 19，

故而复活节满月是

4 月 18 日＝1981 年的关键日＝星期六，

所以 1981 年的复活节就是 4 月 19 日.

下面是儒略历中的一个例子：

1573 年的复活节满月＝3 月 50 日－(176＋3)$_{mod\ 30}$＝3 月 50 日－29＝3 月 21 日＝星期六，所以 1573 年的复活节是 3 月 22 日，由于这一日期按照老式计日制度还是 1572 年，所以我们可以说，该年居然含有两个复活节！

如果你想了解东正教会怎样纪念复活节，那么即使时至今日，你仍然可以使用儒略历.

例如，儒略历 1984 年的复活节满月为：

4 月 19 日－(99＋3)$_{mod\ 30}$＝4 月 7 日.

下一个关键日是 4 月 11 日，它当然仍是儒略历的日期，计算如下：

星期二，　7 打＝星期二，

(儒略历 1900 年)

所以 1984 年的东正教复活节为儒略历 4 月 9 日，由于目前儒略历的日期要滞后 13 天，所以该日为格里高利历的 4 月 22 日.

儒略历与格里高利历的日数相差如下：

15xx，	16xx，	17xx，	18xx，	19xx，	20xx，	21xx，	…
10 天，	10 天，	11 天，	12 天，	13 天，	13 天，	14 天，	…

月龄的计算

如果你站在地球上，遥望太阳和月亮，你将发现，它们运行一周，大约分别需要 $365\frac{1}{4}$[365.242199]天与 30$\left[29.530588 \text{ 或 } 29\frac{5}{9}\right]$天. 当然这是就其平均数而言. [括号内的数字表示更准确的近似值].

从以上这些事实出发，你们可以推算出，自从上次满月以来，已经过去的日数大致如下：

(日数)+(月数)+(年数)+(世纪数)，

结果自然要按模 30$\left[29\frac{5}{9}\right]$取余.

在上式中，

日数指该月的日期.

月数照下面的附表来取：

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
3	4	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[$2\frac{2}{3}$	4	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{8}{9}$	$4\frac{4}{9}$	6	$6\frac{5}{9}$	8	$9\frac{5}{9}$	$10\frac{1}{9}$	$11\frac{5}{9}$	$11\frac{8}{9}$]

(也可以这样去记：单数月份，大月约滞后$\frac{1}{2}$天，小月约提前$\frac{1}{2}$天).

年数的最后两位数字应先按模 19 取同余，然后查下表：

0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9
0	±11	±22	±03	±14	±25	±06	±17	±28	±09
[0	$\pm10\frac{8}{9}$	$\pm21\frac{7}{9}$	$\pm3\frac{1}{9}$	±14	$\pm24\frac{8}{9}$	$\pm6\frac{2}{9}$	$\pm17\frac{1}{9}$	±28	$\pm9\frac{1}{3}$]

[附加数为：

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

它们对应于下列年份：

$4n$(在置闰日后)	$4n+1$	$4n+2$	$4n+3$	$4n+4$(在置闰日前)*]

格里高利历的**世纪数**如下：

	15xx	16xx	17xx	18xx	19xx	20xx	21xx	22xx	23xx	24xx
为	$16\frac{1}{3}$	12	$6\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	-4	$-8\frac{1}{3}$	$-13\frac{2}{3}$	-19	$-24\frac{1}{3}$	$-28\frac{2}{3}$

而儒略历的世纪数为：

8xx	9xx	10xx	11xx	12xx	13xx	14xx	15xx	16xx	17xx
27	$22\frac{2}{3}$	$18\frac{2}{3}$	14	$9\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$+1$	$-3\frac{1}{3}$	$-7\frac{2}{3}$	-12

记住日数是很容易的，

记住月数也不难，但应注意一月为 3，二月为 4.

年数中的十位数是年份的个位数按模 3 取余.

14xx 的世纪数为 +1，19xx 的世纪数为 −4；短世纪（36524 日）要滞后 $5\frac{1}{3}$ 日，而长世纪（36525 日）则滞后 $4\frac{1}{3}$ 日，（因为 1273 月大致相当于 $36529\frac{1}{3}$[36529.337]日）.

从而 1984 年圣诞节的月龄，可利用这些大略数据算出如下：

$$25+12+(+28)-4 \pmod{30}=1 \text{ 日}.$$

这是由于 $84\equiv8$，mod 19 而 $8\equiv2$，mod 3 之故. 但若利用该公式去算 1985 年元旦的月龄，则可得出

$$1+3(!)+(+09)-4=9 \text{ 日}.$$

然而从圣诞节到元旦，其间隔仅为 7 天. 要知道，月球的真实运动是极其复杂的，如此简单的公式所给出的答数，误差在一天之内，就算很不错了. 如果你在夜间观察月亮，为时甚晚，则请记住，深夜 11 时距明天比它距今天更近，因为我们的法则是按一天的始点（0 时）来计算调整的.

众所周知，下面的月龄

$$0,\qquad 7\frac{1}{2},\qquad 15,\qquad 22\frac{1}{2}$$

---

* 译者注：所谓置闰日，指阳历闰年的 2 月 29 日.

对应于

朔， 上弦， 望(满月)， 下弦

喜欢心算的人可记住该年份的总数，例如，

1982 年， 日数＋月数＋2，

1983 年， 日数＋月数＋13，等等.

1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
−6	+5	−13	−2	+9	−10	+1	+12	−7	+4	−15

犹太教新年(罗什·哈萨那)*

格里高利历公元后 Y 年的第一天(即犹太纪年 $Y+3761$ 年的元旦)是在九月份的 N 日，其中

$$\{\lfloor Y/100\rfloor-\lfloor Y/400\rfloor-2\}+\frac{765433}{492480}(12G)_{\bmod 19}+\frac{1}{4}(Y)_{\bmod 4}-\frac{313Y+89091}{98496}=N+\text{分数}$$

式中，G 是黄金数，但它必须从

星期日	星期三	星期五	星期二	星期一
			若分数 $\geqslant\frac{1367}{2160}$	若分数 $\geqslant\frac{23269}{25920}$
			以及 $(12G)_{\bmod 19}>6$	以及 $(12G)_{\bmod 19}>11$

推迟到

星期一	星期四	星期六	星期四(不是星期三)	星期二

(若为儒略历的年份，则计算时可略去公式中的{ }项).

* 译者注：古希伯来文名词.

增　　补

盒中的积木块

这个智力玩具的窍门是：除了三根竖杆(直棒)3×1×1 之外，其他任一积木块在每一片中都占据了为数一样的“黑”单元与“白单元”. 因而必须把三根竖杆安排好，以便使得在所有十五个层面上同时校正黑、白色差. 人们发现满足这一要求的只有唯一的一种安排. 图 61 上也给出了 2×2×2 立方块以及 2×2×1 扁平块的仅有的三种配置方式. 只要这五块积木安排就位，其他事情就相当容易了.

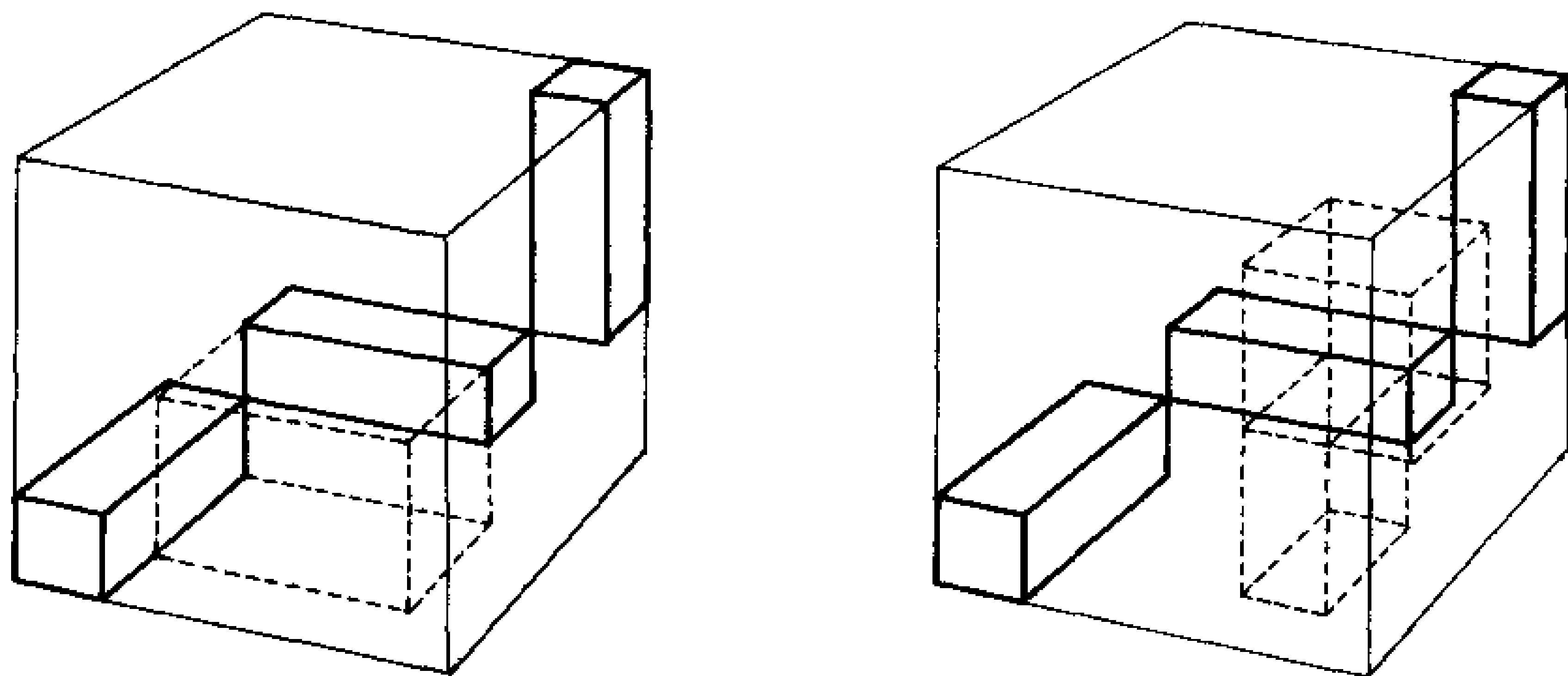


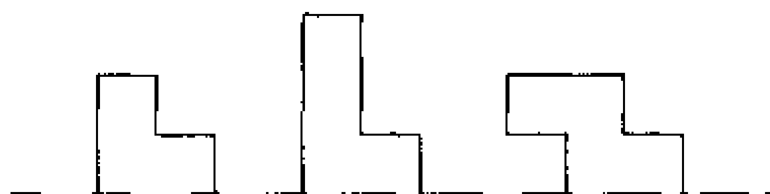
图 61. 你有木事把积木装进盒子里去吗?

较此难得多的问题是：要把 41 块 1×2×4 平根(另有 15 只 1×1×1 的洞)放进一只 7×7×7 的立方体盒子里去(参看木章所附文献中 Foregger 与 Mather 的论文，后看证明了 42 块木板

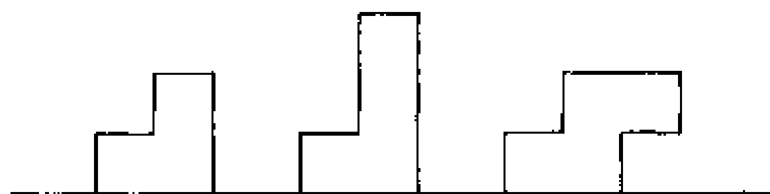
就不行*).

索马谱

索马构件 1=W,2=Y,4=O,它们的形状是较为对称的,它们可以在立方体的表面上右摆



或左摆



因而只要给出它们的数字和(我们将称之为解的*右置数*)你就可以说出这些构件中,哪些是向右摆放的.

记号

DC	DC	DC
na	nb	nc

指的是有着不足构件 D,中央构件 C,以及右置数 n 的解.单个大写字母则表示同一构件既是不足构件,又是中央构件.譬如说

RL	RL	RL	RL
5a	5b	5c	5d

所表示的四个解答中,红的是不足构件,蓝的是中央构件,1 与 4 是右摆的(1+4=5),

而

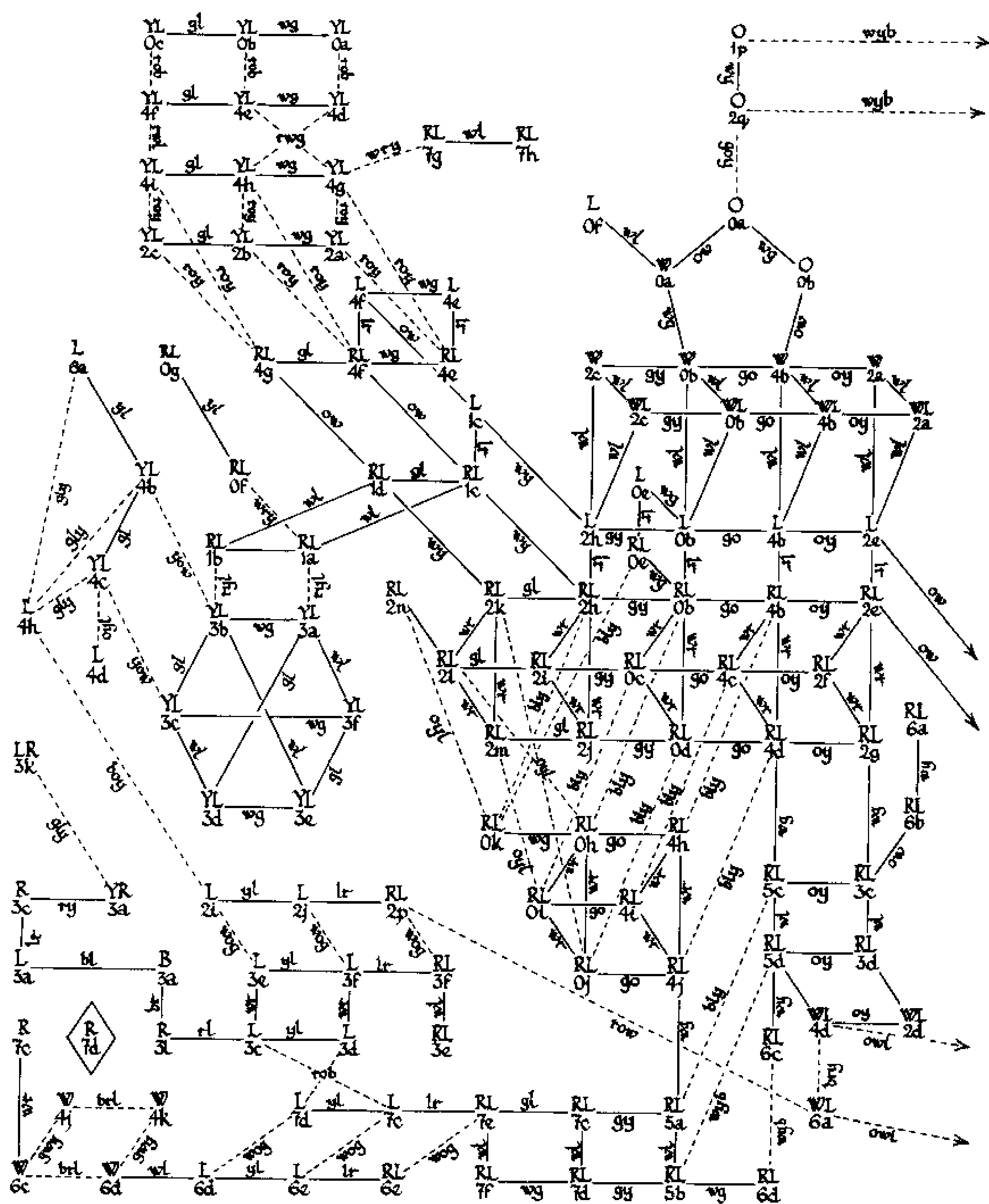
B	B	B	…
6a	6b	6c	…

的意思则是,在这些解答中,黑的既是不足构件,又是中央构件,2 与 4 是右摆的.

图 62 中的解还存在着反射解,其名称(代号)可由交换 R 与 L,并将数 n 进行变换而求得.变换的办法是,在以下三种情况下把 n 代之以:

---

* 译者注:即 E2524 号难题,见《美国数学月刊》1975 年与 1976 年,我国许多大学的图书馆中均收藏此刊,不难查到.



图上用方框表示的 R 7d 犹似孤悬海中的蓬莱仙岛，可望而不可及！

图 62. 索马谱全图.

†注意：W2f 及其反射图像 W4f 都已同时在图上标记出来．

图 62．索马谱全图(续)．

O 中央构件	W 中央构件	其他
$3-n$	$6-n$	$7-n$

如果改变两个构件 P,Q 而得出两解时,则在图中用实线 PQ 来表示. 类似地,某些三构件的改变将用虚线表示. 于是,留给你去干的所有事情就仅仅是在索马谱全图上按图索骥地找到一个合适的解,并由它带路,引导你去找到所有其他解答,唯一的例外是 R7d.

算术—几何平均数趣题的解答

图 63 说明我们怎样在此问题中用字母 a,α 等指示层面的办法,主要是根据其摆法的定向,用 a 表示一个高度为 a 的积木块,其他依此类推. 采用此种记法,霍夫曼问题的 21 个解答都已收录在表 1 之中,适常是只记录中层,其他层面用一个字母 S 与之分开,面剩下的一层则是图 63 的特殊层. 表 1 中其他字母的意义如下:

R:特殊层经由图上虚线的反射像;
S:交换(对调)两个非特殊层;
S′:在不同方向交换两个相邻层面;
T:改变一个 2×2×2 角落,不包括特殊层;
T′:改变一个 2×2×2 角落,也包括特殊层.

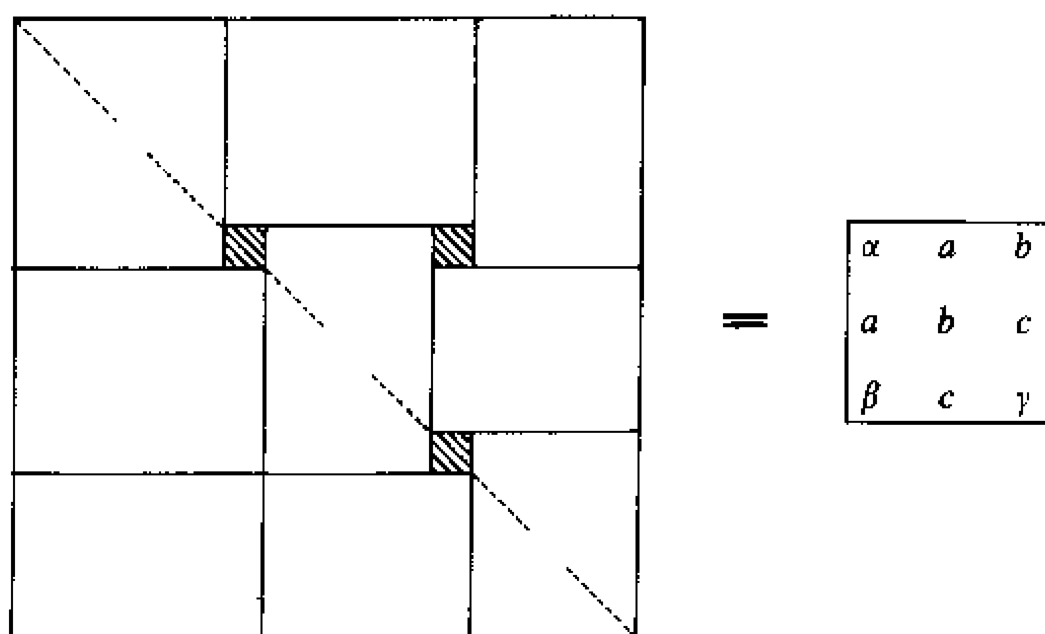


图 63. 特殊层.

我们让你自己动手,彻底搞搞清楚,为什么正好能得出 21 个解,再来验证一下,其中 17 个解有它们的**对偶解**,只要用 c,b,a 取代 a,b,c 即可得出. 正好有一个解(哪一个?)是自身对偶的.

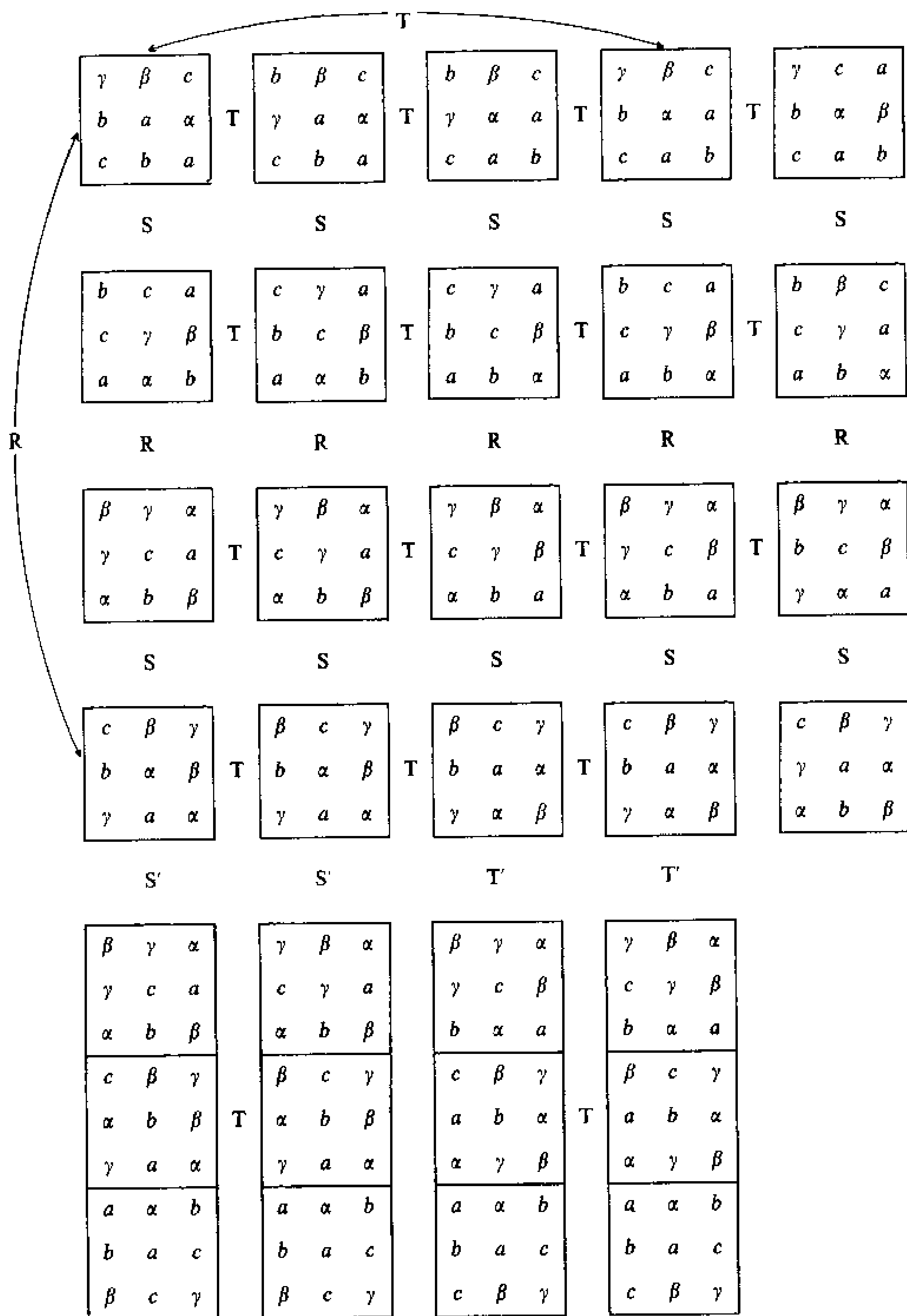


表 1. 霍夫曼问题的 21 个解答.

此解的显著特性是可以通过输送两个特殊层面中的任一个到它的对面面反复进行(变为它自身的旋转!).

拉斐尔·罗宾逊(Raphael Robinson)与戴维·面尔(David Seal)已发现了将各种维数空间中算术—几何平均数趣题的解组合起来以得出高维空间解的一些办法. 例如,若

$$a=a_1+a_2+a_3, b=b_1+b_2+b_3,$$

我们已经知道怎样把 27 块

$$a_1\times a_2\times a_3 \quad 或 \quad b_1\times b_2\times b_3$$

积木块装进一只

$$a\times a\times a \quad 或 \quad b\times b\times b$$

立方体箱子的办法.

而这些东西的笛卡尔积则告诉了我们把 $27^2=729$ 个六维超积木块

$$a_1\times a_2\times a_3\times b_1\times b_2\times b_3$$

装进一只六维长方体箱子

$$a\times a\times a\times b\times b\times b$$

的办法. 而图 7 的三个复制品的笛卡尔积则告诉我们一种办法,可以把这些六维超积木块(共有 $4^3=64$ 块)

$$a\times b\times a\times b\times a\times b$$

装进一只六维超立方体 $(a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)$.

一般地说,此种方法可由 m 维解与 n 维解的组合以得出一个 mn 维的解答. 我们希望本书的热心读者们将来信告诉我们怎样来对付 5 维、7 维、11 维等素数维空间中的同类问题.

着色问题有解

0	0	2		1	1	0		1	0	0
0	0	2		1	2	1		1	2	2
2	2	1		0	1	1		0	2	2

此外还另有一个解. 你能求出来吗?

提示:把 $x+y+z$ 相加.

龟兔问题

走法如下:(黑体字表示"跳")

H,T,T,H,H,H,T,T,T,H,H,H,T,T,H.

你如果能找到一个窍门:在移动另一种动物之前,尽可能只移动原先的那一种动物,那么你就能迅速地发现将 57 只兔子与 57 只乌龟对调的办法.

其他硬币问题的解(黑体字代表正面):

从 012 **345**开始;

走法: 01 至 67,**56** 至**89**,2**3** 至 **5**6;

或 01 至 76,2**3** 至 9**8**,**56** 至**6**5.

从 0123 **4567**开始;

走法: 12 至 89,**45**至 **12**,7**8** 至**4**5,01 至 7**8**;

或 **67**至**98**,01 至 76,**34** 至 **43**,**78** 至 **87**.

M·特拉诺埃(M. Delannoy)已经证明,有着 n 对硬币的第一个问题用 n 步一定可以解决,但根据塔特的说法,在 $n>4$ 时,第二个问题需要 $n+1$ 步. 不知出于什么原因,我们总感到这些小问题很恼人,而且根本记不住它们的解法!

最后一个小问题是我们所知的、有着心理障碍的简单问题之一. 你会注意到四枚硬币已经就位了(见图 64(a)),所以你很不情愿去移动它们中的一枚(见图 64(b)),或移过后又将别的硬币来归位(见图 64(c)),但要想三步解决问题(见图 64(d)),你是非这样做不可的! 如果从三角形配置出发,则存在着一种四步解法.

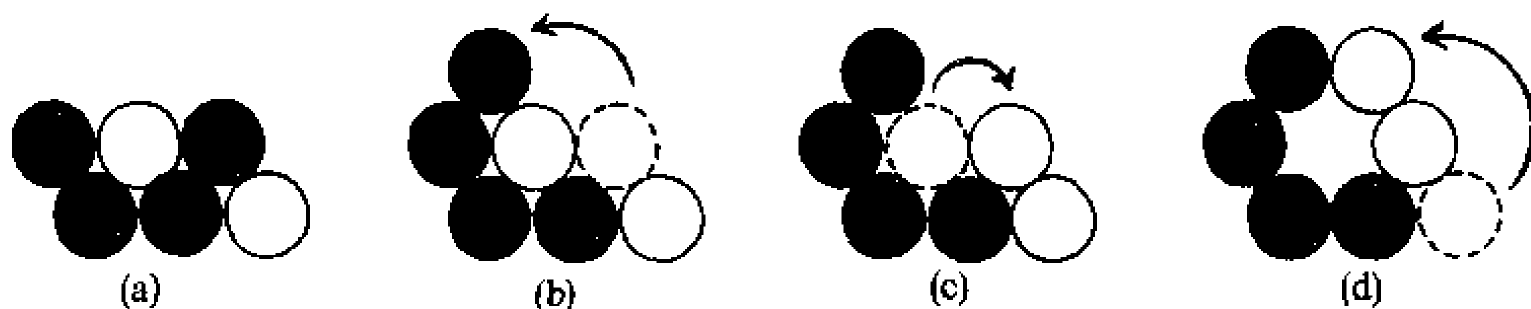


图 64. 怎样激怒你的朋友.

幸运之七问题

问题有一个简单解法,使七个圆盘或碟片交替地自左或自右过桥:

1,7,2,6,3,5,4.

魔方的顶面变换

我们将在以下附表中给出目前已知为最短的顶面翻转与扭曲序列，表 2 包括一切排列，而表 3 则包括了一种组合. 表中的数字是指步数，但不计入最后的顶面旋转(U^k)，它们可以全部省

$n=0$	1	2	3		
				0	U^n
				7	$FUF'UFU^2F'U^{n+2}$ $F'U'FU'F'U^2FU^{2-n}$
				10	$LRU^2R'L'F'B'U^2BFU^n$
				11	$LFUF'U'L^2B'U'BULU^n$
				12	$R'F'UFRBU^2F'UB'U'FU^{n+2}$
				10	$R^2U'RBLUL'B'U'RU^n$
				9	$R'FRUR'U'F'URU^n$ $LF'L'U'LUFU'L'U^{-n}$
				8	$R'U'RURB'R'BU^{n-1}$ $LUL'U'L'BLB'U^{1-n}$
				8	$RU^2R'U^2R'FRF'U^{n-1}$ $L'U^2LU^2LF'L'FU^{1-n}$
				8	$L'BLB'U^2B'U^2BU^{n-1}$ $RB'R'BU^2BU^2B'U^{1-n}$
				7	$FU'B'UF'U'BU^{n+2}$ $F'UBU'FUB'U^{2-n}$
				6	$FURU'R'F'U^n$ $F'U'L'ULFU^{-n}$
				8	$R'F'L'ULU'FRU^n$ $LFRU'R'UF'L'U^{-n}$
				8	$BUB'R'F'U'FRU^n$ $B'U'BLFUF'L'U^{-n}$
				10	$R'F'U'FU'RUR'URU^n$

表 2. 顶面排列的变换序列(成对出现时，下一行序列指的是左-右反射图形).

● ● ● ●　 ● ● ● ●	0	一步都不要了
● ● ● ●　 e ● e ●	12	$F'U'F^2DRUR'D'U'F^2U^2FU'$
● e ● ●　 ● ● e ●	13	$LF'UL'FB'UR'FU'RF'BU'$
● e ● e　 e ● e ●	13	$L^2F^2L^2U^2R'LFL'RU^2L^2F^2L^2U$
● ● a ●　 ● ● ● c	12	$R'U'LU^2R'F^2RF^2U'RU^2L'U^2$ $RU^2L'UB^2L'B^2LU^2R'ULU^2$
● ● a ●　 e ● e c	13	$RU'LU^2R^2F'U'FUR^2U^2R'L'U$ $BFU^2F^2U'L'ULF^2U^2B'UF'U'$
● e a ●　 e ● ● c	13	$R'UL'U^2R^2BUB'U'R^2U^2RLU'$ $F'B'U^2B^2ULU'L'B^2U^2FU'BU$
● ● a e　 ● ● e c	14	$F^2DF'UFD'FL'U'LUF^2U^2F'U$ $LU^2L^2U'B'UBL'DL'U'LD'L^2U'$
● e a e　 ● ● ● c	14	$B^2D'BUB'DB'LUL'U'B^2U^2BU'$ $L'U^2L^2UFU'F'LD'LUL'DL^2U$
● e a ●　 ● ● e c	14	$RUR^2F^2D'R^2BL'B'R^2DF'RF'U^2$ $BLBD'L^2FRF^2L^2DB^2L^2U'L'U^2$
● ● a e　 e ● ● c	14	$LF'D'L'BL'B^2U^2L'BDF'L^2F^2U^2$ $B^2R^2BD'F'RU^2F^2RF'RDBR'U^2$
● e a e　 e ● e c	15	$BU^2BR^2FD^2FLFL^2F^2D^2F'R^2B^2U$ $R^2F^2LD^2L^2B^2L'B'L'D^2L'F^2R'U^2R'U'$
a ● ● ●　 ● ● ● c	11	$R'BD^2B'RU^2R'BD^2B'RU^2$
a ● ● ●　 e ● e c	14	$B'UFU'BU^2F^2L'U'LUF^2U^2F'$ $LU'R'UL'U^2R^2BUB'U'R^2U^2R$
a ● ● e　 ● ● e c	13	$L'UBL'D'BD^2R^2D'B^2L^2UF^2U^2$ $B^2U'R^2F^2DL^2D^2F'DRF'U'RU^2$
a e ● ●　 ● ● e c	13	$R'B^2F'L'DF'L^2FD'LFB^2RU^2$
a ● ● e　 e ● ● c	13	$BR^2LFD'LF^2L'DF'L'R^2B'U^2$
a e ● e　 e ● e c	16	$BUB^2RBR^2URL'U'L^2F'L'F^2U'F'$
c ● c ●　 ● ● ● c	12	$RU'L'UDB^2D'R^2U^2LU'RU$ $B'UF'U^2B^2DL^2U'D'FUB'U$
c ● c ●　 e ● e c	11	$LR'U'R^2B'R'B^2U'B'U^2L'$ $LU^2BUB^2RBR^2URL'$
c e c e　 ● ● ● c	11	$F'U^2R'U'R^2B'R'B^2U'B'F$ $F'BUB^2RBR^2URU^2F$
c ● c e　 ● ● e c	14	$F^2R^2FU'F^2R'F'R^2U'R'U^2F^2R^2F^2$ $F^2R^2F^2U^2RUR^2FRF^2UF'R^2F^2$
c e c ●　 e ● ● c	8	$B'U'B^2L'B'L^2U'L'U^2$ $RUR^2FRF^2UFU^2$
c e c ●　 ● ● e c	12	$BLU^2B'U'B^2L'B'L^2U'L^2B'$ $BL^2UL^2BLB^2UBU^2L'B'$
c ● c e　 e ● ● c	12	$R'F^2U'F^2R'F'R^2U'R'U^2FR$ $R'F'U^2RUR^2FRF^2UF^2R$
c e c e　 e ● e c	12	$L'U'B'UBLBLUL'U'B'U^2$ $FURU'R'F'R'F'U'FURU^2$
a ● c ●　 ● a ● c	14	$R^2B^2R^2U'RL'DL^2U^2LD'L^2U^2R'U$
a ● c ●　 e a e c	12	$LUFU'F'L'R'U'F'UFR$ $R'F'U'FURLFUF'U'L'$
a e c ●　 e a ● c	12	$RBUB'U'R'L'B'U'BUL$ $L'U'B'UBLRUBU'B'R'$
a e c ●　 ● a e c	14	$F'U'F^2UL'U'RLU'R'UF^2U'F'U^2$
a ● c e　 e a ● c	14	$R'U'F'L'R'U'F'UFRLUFR$
a e c e　 e a e c	13	$LU^2F'UF^2LF^2L'F^2UFU^2L'U^2$
c ● a ●　 ● a ● c	15	$R'U^2RU^2R^2B'D'R'FR^2F'DBU'R'U'$
c ● a ●　 e a e c	15	$R'F^2U'D'L'F'LFDULFL'FR$ $R'F'LF'L'U'D'F'L'FLDUF^2R$
c e a ●　 ● a e c	14	$R'UB'R^2U'RUR^2BU^2R^2B'R'BU^2$ $F'LFL^2U^2F'L^2U'L'UL^2FU'LU^2$
c e a e　 e a e c	14	$B'D^2FU^2RF'D^2BLU^2FU^2F'LU$

表 3. 顶面翻转与扭曲变换的序列(成对出现时,下一序列指的是将 a,c 对调后的图形).

略到最后，戴维·西尔已经证明，这些变换中，绝大多数是最优解.

世纪游戏

它之所以得名是由于它正好需要走 100 步，根据法定规则，世纪又半游戏需要 151 步. 但因第一步与最后一步只能算作半步，所以我们可以认为它需要 150 步. 在图 65 中你们可以看到两者的解法. 如果把书上-下颠倒过来看，那么又可以得出世纪游戏的另--种 100 步解法.

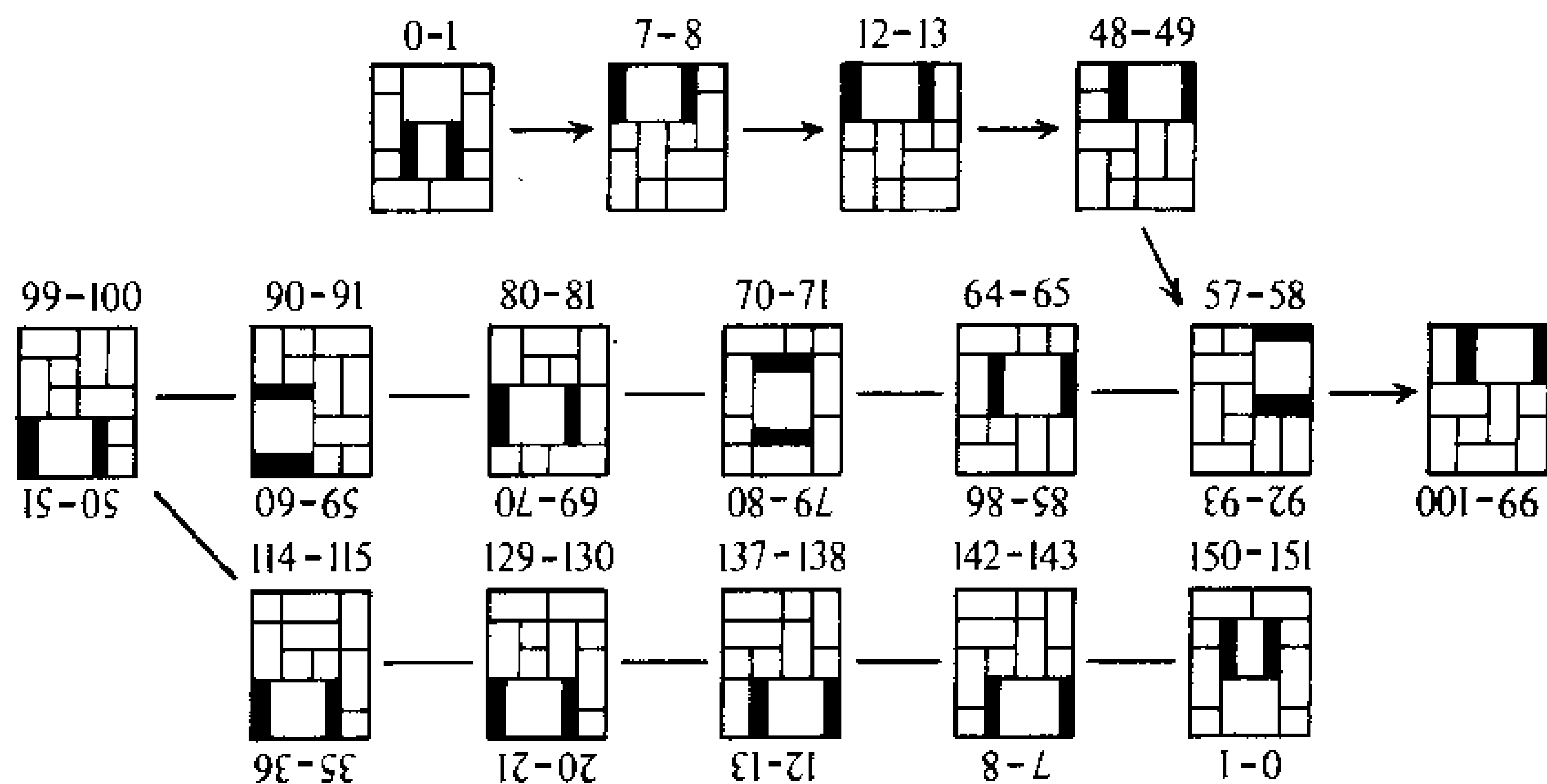
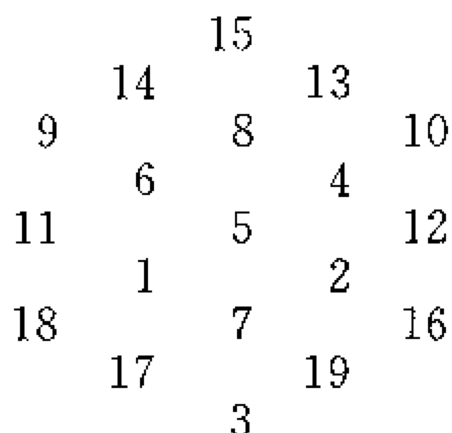


图 65. 世纪游戏与世纪又半游戏的解法.

亚当斯的神奇六角形



在马丁·加德纳的《第六本数学游戏书》中你能读到克利福德·W·亚当斯(Clifford W.



Adams)的神奇发现史以及查尔斯·W·特立格(Charles W. Trigg)的唯一性证明.容易看出，直径为 d 的幻六角形所用的连续自然数必然是从 1 到 $(3d^2+1)/4$，它们的和为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3d^2+1}{4}\right)\left(\frac{3d^2+5}{4}\right)=\frac{1}{32}(9d^4+18d^2+5),$$

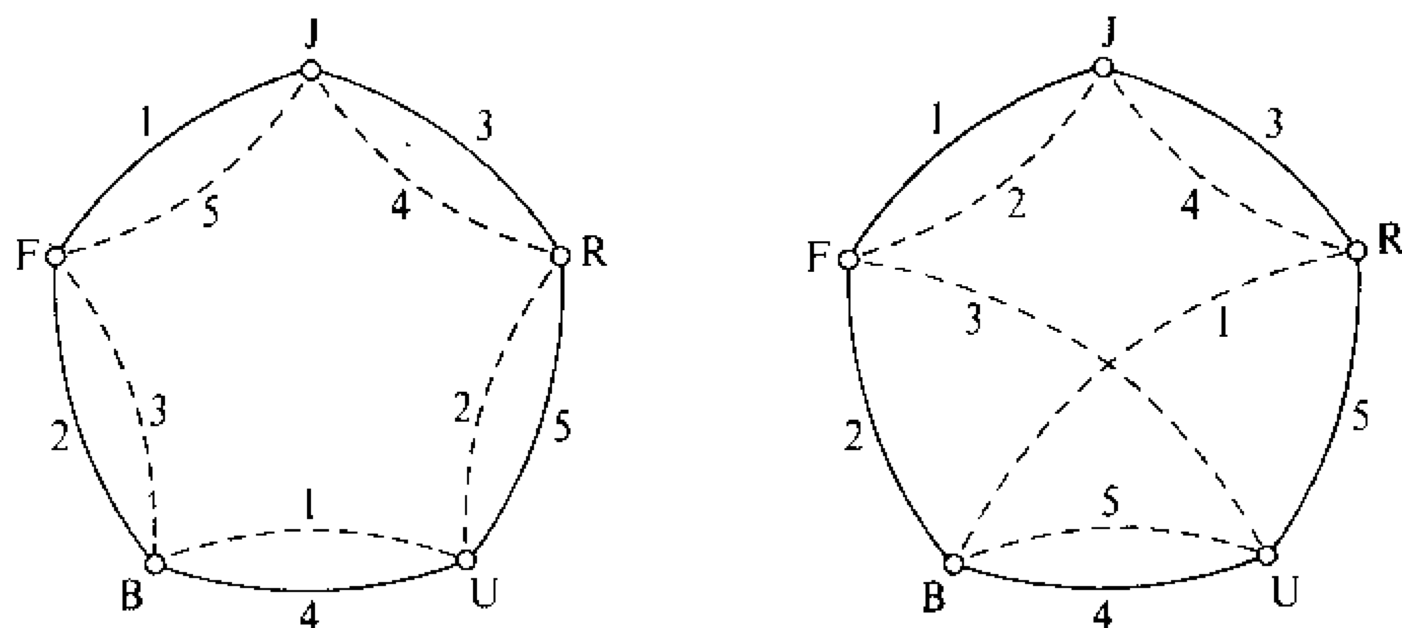
所以它的每一列(共有 d 列)各数之和必为

$$\frac{1}{32}\left(9d^3+18d+\frac{5}{d}\right),$$

仅当 d 能整除 5 时，才有可能是整数.

协约国旗帜问题的解答

如果你应用奥皮奈方法，则可发现 2 对 5-通路



它将导致图 49 与图 66 的两个解答.

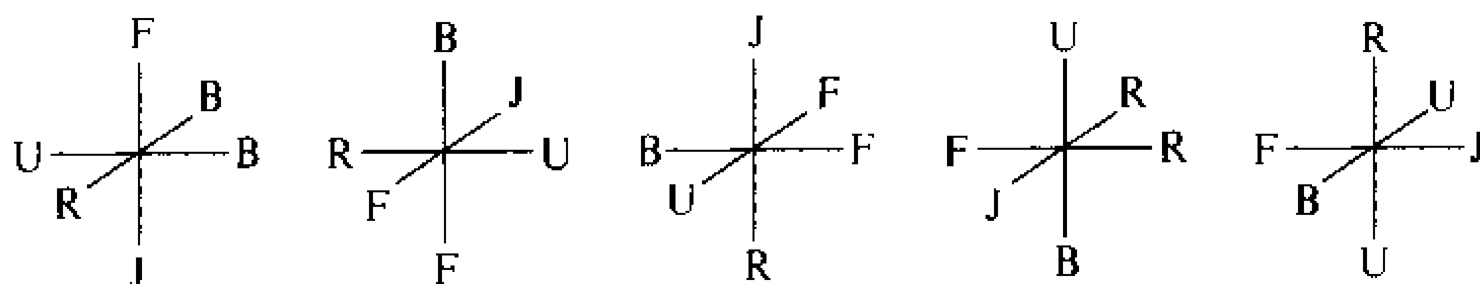
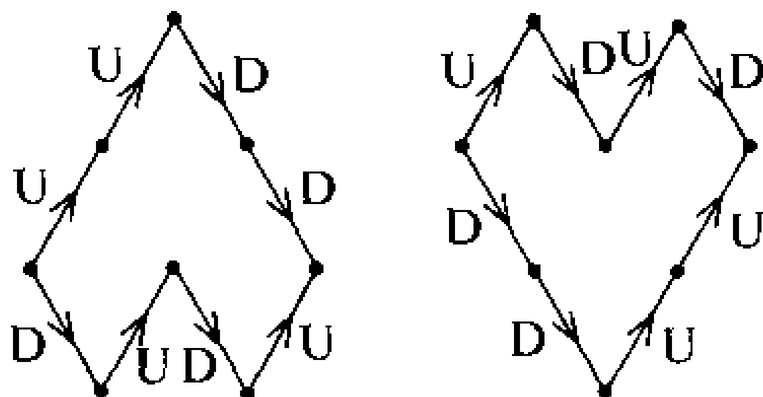


图 66. 协约国旗帜问题的另一解.

出给专家做的题目之答案



我们有一个相当繁复的证明. 在数值很大的情况下,仅当 $n\equiv 0$ 或 $\pm 1 \bmod 6$ 时,才能用 n^2 个六蒙特 A 来复制一个更大的 A 形六蒙特. 我们的证明建立起来的事实是,这些是仅有的值可以使关系式(请看上页的下面一个图)

$$U^2D^2=DUDU \quad 与 \quad D^2U^2=UDUD$$

蕴含关系式

$$U^{2n}D^{2n}=D^nU^nD^nU^n.$$

我们也证明了没有一种通常的着色论证可以排除其他 n 值.

麦克马洪方块的黑边跑到哪里去了?

它们当然环绕在外围,但还有六块在里面,有 20 种不同的安排方法. 在前面两种方法中"梯子"出现在第三列,其他情况中,则是在第二列. 图 67 的最后一行中包含着 6+6+2 种安排:图上的虚线代表第六条黑边的另一种可能位置.

三种五米诺十二面体

由下列记号

12345=A	12354=B	12435=C	12453=D	12534=E	12543=F
13245=G	13254=H	13425=J	13524=K	14235=L	14325=M

可加以复原,请参看附图.

图 67. 麦克马洪方块的二十种黑边安排.

关键日问题的答案

1. 在欧洲大陆上其他国家的历法日期 1696 年 2 月 29 日(星期六)到 1744 年 2 月 29 日(星期六)之间,瑞典在 2 月份并不置闰,即没有 2 月 29 日,所以本问题的答案是瑞典,1744 年 2 月 29 日,星期六. 在此时刻,他是 48 岁差 11 天. 这种办法可以避免"丢失"11 天而引起的骚扰,是

由一位牛津大学天文学教授约翰·格利佛斯(John Greaves)在 1645 年提出的.

2. 通过一种很麻烦的穷举法计算,可以证明在格里高利历法制度中,400 年为一个周期的时段中,不吉利日子的分布规律如下:

	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
平年	43 天	43 天	43 天	43 天	44 天	43 天	44 天
闰年	13 天	15 天	13 天	15 天	13 天	14 天	14 天

由此出发,你可以算出每月 13 日是星期几的月数为:

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
687	685	685	687	684	688	684

这就证明了 B·H·布朗(B. H. Brown)的断言:每月 13 日是星期五的机会要比其他日子稍微多上一点点!

参考文献及进一步阅读材料

W. S. Andrews, "Magic Squares and Cubes", Open Court, 1917, reprinted Dover, 1960.

A. K. Austin, The 14—15 puzzle, Note 63. 5, Math. Gaz. **63** (1979) 45—46.

W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, "Mathematical Recreations and Essays", 12th edn. University of Toronto Press, 1974, pp. 26—27 (calendar problems), pp. 116—118 (shunting problems), p. 121 (sliding coins), pp. 193—221 (magic squares), pp. 312—322 (Fifteen Puzzle, Tower of Hanoï, Chinese rings). See early editions for Tangrams. Pages 141—144 on equilateral zonohedra and the references there, are related to Schoen's Cyclotome puzzles.

C. J. Bouwkamp, Catalogue of solutions of the rectangular 2×5×6 solid pentomino problem, Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A, **81** (1978) 177—186; Zbl. 384. 42011.

Bro. Alfred Brousseau, Tower of Hanoï with more pegs, J. Recreational Math. , **8** (1975—76) 169—176.

B. H. Brown, Problem E36, Amer. Nath. Monthly, **40** (1933) 295 (calendar).

T. A. Brown, A note on "Instant Insanity", Math. Mag. **41** (1968) 68.

Cardan, "De Subtilitate", book xv, para 2; ed. Sponius vol. Ⅲ, p. 587 (Chinese rings).

F. de Carteblanche, The coloured cubes problem, Eureka, **9** (1947) 9—11 (Tantalizer).

T. R. Dawson and W. E. Lester, A notation for dissection problems, Fairy Chess Review, **3** (Apr 1937) 5, 46—47 (polyominoes).

M. Delannoy, La Nature, June 1887, p. 10 (sliding coins).

A. P. Domoryad, "Mathematical Games and Pastimes", Pergamon, 1963, pp. 71—74 (Chinese rings); pp. 75—76 (Tower of Hanoï); pp. 79—85 (Fifteen puzzle); pp. 97—104 (magic squares); pp. 127—128 (sliding coins); pp. 142—144 (cf. Schoen's puzzle).

Henry Ernest Dudeney, "The Canterbury Puzzles", Nelson, London, 1907, 1919 reprinted Dover, 1958, No. 74 The Broken Chessboard, pp. 119—121, 220—221 (pentominoes).

Henry Ernest Dudeney, "536 Puzzles and Curious Problems", ed. Martin Gardner, Chas. Scribner's Sons, New York 1967, No. 383 The six pennies, pp. 138, 343; No. 377 Black and white, pp. 135, 340; No. 516 A calendar puzzle, pp. 212, 409—410; No. 528 A leap year puzzle, pp. 217, 413.

T. H. Foregger, Problem E2524, Amer Math. Monthly, **82** (1975) 300; solution Michael Mather, **83** (1976) 741—742.

Martin Gardner, Mathematical Games, Sci. Amer. , **196** #5 (May 1957) (Tower of Hanoï); **197** #6 (Dec. 1957) **203** #5 (Nov 1960) 186—194, **207** #5 (Nov 1962) 151—159 (Polyominoes); **199** #3 (Sept 1958) 182—188 (Soma); **210** #2 (Feb 1964) 122—126, **222** #2 (Feb 1970) (Fifteen puzzle. Sliding block puzzles); **210** #3 (Mar 1964) 126—127 (Magic squares); **219** #4 (Oct 1968) 120—125 (MacMahon triangles; Conway's "three" puzzle); **223** #6 (Dec 1970) 110—114 (non-transitive dice; quintominal dodecahedra).

Martin Gardner, "The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions", Simon and Schuster, New York 1959, pp. 15—22 (magic squares); pp. 55—62 (Tower of Hanoï); pp. 88 (Fifteen puzzle); pp. 124—140 (polyominoes).

Martin Gardner, "The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions", Simon and Schuster, New York, 1961, pp. 55—56, 59 (sliding pennies); pp. 65—77 (Soma); pp. 130—140 (Magic squares); pp. 214—215, 218—219 (another Solitaire-like puzzle).

Martin Gardner, "Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American", Chas. Scribner's Sons, New York, 1971, pp. 23—24 (magic hexagon); pp. 64—70 (sliding block puzzles); pp. 173—182 (polyiamonds).

Martin Gardner, "Mathematical Puzzles of Sam Loyd", Dover, New York 1959, No. 73 pp. 70, 146—147.

S. W. Golomb, Checkerboards and polyominoes, Amer. Math. Monthly, **61** (1954) 675—682.

S. W. Golomb, The general theory of polyominoes, Recreational Math. Mag. **4** (Aug 1961) 3 - 12; **5** (Oct 1961) 3 12; **6** (Dec 1961) 3—20; **8** (Apr 1962) 7—16.

S. W. Golomb, "Polyominoes", Chas. Scribner's Sons, New York, 1965.

A. P. Grecos and R. W. Gibberd, A diagrammatic solution to "Instant Insanity" problem, Math. Mag. **44** (1971) 71.

L. Gros, "Theorie du Baguenodier", Lyons, 1872 (Chinese rings).

L. J. Guibas and A. M. Odlyzko, Periods in strings, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981) 19 —42.

L. J. Guibas and A. M. Odlyzko, String overlaps, pattern matching and non-transitive games, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981) 183—208.

Bóla Hajtman, On coverings of generalized checkerboards, I. Magyar Tud. Akad. Math. Kutato Int. Köz. **7** (1962) 53 -71.

Sir Paul Harvery, "The Oxford Companion to English Literature", 4th ed., Oxford, 1967, Appendix Ⅲ, The Calendar.

C. B. and Jenifer Haselgrove, A computer program for pentominoes, Eureka, **23** (1960) 16—18.

Kersten Meier, Restoring the Rubik's Cube, A manual for beginners, an improved translation of "Puzzlespass mit dem Rubik's Cube" 4c Hulme, Escondido Village, Stanford CA 94305 USA or Henning-Storm-Str. 5, 221 Itzehoe, W. Germany, 1981:01:20.

J. A. Hunter and Joseph S. Madachy, "Mathematical Diversions", Van Nostrand, New York, 1963, Chapter 8, Fun with Shapes, pp. 77—89.

Maurice Kraitchik, "Mathematical Recreations", George Allen and Unwin, 1943, pp. 89—93 (Chinese rings, Tower of Hanoi); pp. 109—116 (calendar); pp. 142—192 (magic squares); pp. 222—226 (shunting puzzles); pp. 302—308 (Fifteen puzzle).

Kay P. Litchfield, A 2×2×1 solution to "Instant Insanity", Pi Mu Epsilon J. **5** (1972) 334—337.

E. Lucas, "Récréations Mathematiques", Gauthier-Villars 1882—94; Blanchard Paris, 1960.

Major P. A. MacMahon, "New Mathematical Pastimes", Cambridge University Press, 1921.

Douglas R. Hofstadter, Metamagical Themas: The Magic Cube's cubies are twiddled by cubists and solved by cubemeisters, Sci. Amer. **244** #3 (Mar. 1981) 20—39.

J. C. P. Miller, Pentominoes, Eureka, **23**(1960) 13—16.

T. H. O'Beirne, "Puzzles and Paradoxes", Oxford University Press, London, 1965, pp. 112—129 (Tantalizer); pp. 168—184 (Easter).

T. H. O'Beirne, Puzzles and Paradoxes, in *New Scientist*, **258** (61:10:26) 260—261; **259**(61:11:02) 316—317; **260** (61:11:9) 379—380; **266** (61:12:21) 751—752; **270** (62:01:18) 158—159.

Ozanam, "Recreations", 1723, vol. IV 439, (Chinese rings).

De Parville, La Nature, Paris, 1884, part i, 285—286 (Tower of Hanoï).

B. D. Price, Pyramid Patience, Eureka, **8** (1944) 5—7.

R. C. Read, Contributions to the cell growth problem, Canad. J. Math. **14** (1962) 1—20 (polyominoes).

J. E. Reeve and J. A. Tyrrell, Maestro puzzles, Math. Gaz. **45** (1961) 97—99 (polyominoes).

Raphael Robinson, Solution to problem E36, Amer. Math. Monthly, **40** (1933) 607.

Barkley Rosser and R. J. Walker, On the transformation group for diabolic magic squares of order four, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938) 416—420.

Barkley Rosser and R. J. Walker, The algebraic theory of diabolic magic squares, Duke Math. J. **5** (1939) 705—728.

T. Roth, The Tower of Bramah revisited, J. Recreational Math. **7** (1974) 116—119.

Wolfgang Alexander Schocken, "The Calculated Confusion of Calendars", Vantage Press, New York, 1976.

Leslie E. Shader, Cleopatra's pyramid, Math. Mag. **51** (1978) 57—60 (Tantalizer variant).

David Singmaster, Notes on the 'magic cube', Dept. Math. Sci. & Comput. Polytech. of S. Bank, London SE AA, England, 1979, 5th edition, 1980, £2·00 or $5·00.

W. Stead, Dissection, Fairy Chess Review, **9**(Dec 1954) 2—4 (polyominoes).

James Ussher, "Annales Veteris Testamenti", Vol. 8, Dublin ed. 1864, p. 13 ("beginning of night leading into Oct. 23").

Joan Vandeventer, Instant Insanity, in "The Many Facets of Graph Theory", Springer Lectures

Notes **110** (1969) 283—286.

Wallis, "Algebra", latin edition 1693. Opera, Vol. Ⅱ, Chap. cxi, pp. 472—478 (Chinese rings).

Harold Watkins, "Time counts; the story of the calendar", Neville Spearman, London. 1954.

Richard M. Wilson, Graph puzzles, homotopy and the alternating group, J. Combin. Theory Ser. B **16** (1974) 86—96.

第25章

生命游戏是什么?

生命并非总是像数学那样简单的,亚伯拉罕!

——亚伯拉罕·佛兰克尔夫人

生命太重要了,它不能不加以严肃对待.

——奥斯卡·王尔德

……在实际生活中,一犯错误就难以挽回.但是,通过计算机仿真,有意识制造错误,在经济上是花得来的.如果你很精明,你就有可能学到很多东西,远远超过所花的代价.另外,如果你遇事谨慎,考虑得十分周密,那末,除了你本人以外,没有人知道你曾经犯过错误.

——约翰·麦克略特及约翰·奥斯本,《自然界的自动机与用途广泛的仿真》,麦克米伦出版公司,1966年

这本书的大部分讲的是两人博弈,而前两章讲的是一个人玩的游戏,现在则将进入没有局中人的游戏,即**生命游戏**!由于我们的年轻读者们知之不多,所以最好还是来告诉你们一些有关的事实.

生命游戏是在无限大的方形棋盘上玩的.在任一时刻,棋盘上的某些细胞**活着**,而某些细胞**死亡**.在时刻0,那些活着的细胞就明摆在你眼前!不过,你已经无事可干,因为今后任何时刻的状态都已经被它前面的状态按照下列游戏规则无情地规定下来了:

出生　在时刻t死亡的细胞将在时刻$t+1$活着,如果它的八个邻居中正好有三个在时刻t

是活的.

由于过度拥挤而死亡 在时刻 t 活着的细胞,如果它的八个邻居中有四个或更多个在 t 时刻活着,则该细胞将在时刻 $t+1$ 死去.

由于**孤立**而死亡 若在时刻 t,一个活着的细胞只有一个邻居,或者根本没有邻居,则它将在时刻 $t+1$ 死去.

死亡原因只有这两种,从而我们可以取一种更为积极的观点,讲一讲继续生存(存活)的法则.

生存 在时刻 t 活着的细胞,如果它正好有 2 或 3 个在 t 时刻活着的邻居,则它在 $t+1$ 时刻继续活着.

> 正好 3 个邻居——出生,
> 2 或 3 个邻居——存活

一个相当典型的物种生活史纪录在图 1 中. 我们选择一行五个活细胞作为我们的第 0 代. 在图中,一个小圆圈代表一个活细胞.

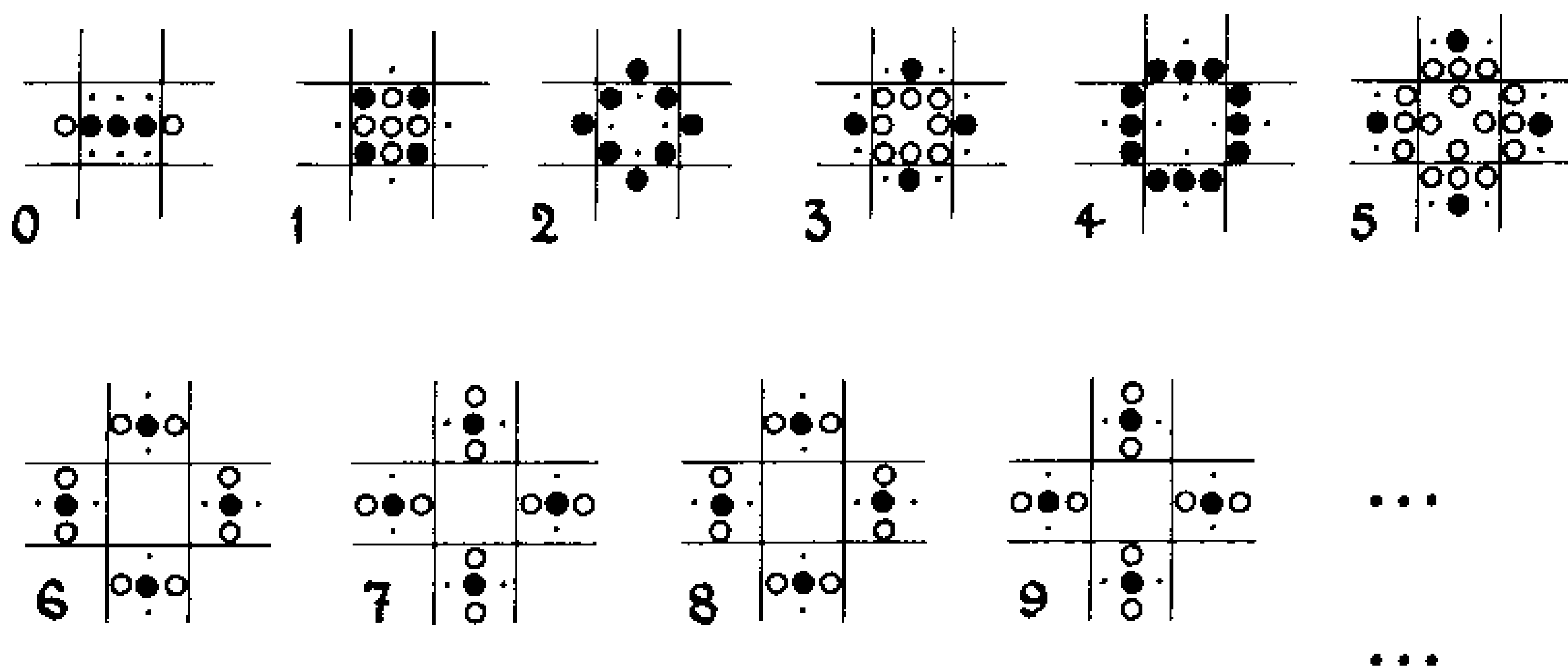


图 1. "一行五个"的物种变成了交通信号灯.

它们之中,有哪些细胞在第一代继续生存呢? 首尾两端的两个细胞由于各自只有一个邻居,从而死于孤立暴露. 但内部的三个细胞因为都有两个活着的相邻细胞而可以继续生存. 这就是我们在图中所填的一个个小圆圈.

在时刻 1 的细胞出生情况又如何呢? 在直线的每一边都有着三个在时刻 0 是死的细胞,可

是它们都恰巧同三个活细胞相邻,因此在时刻 1 它们将要出生. 我们已经在图形中用小点来表示这种行将到来的出生.

于是在时刻 1,细胞群的构形将是一个实心的 3×3 正方形. 让我们来粗略地看看它后来的演变进程.

时刻 1—2:角上的细胞将存活下来,因为它们中的每一个都恰有 3 个邻居,但除此之外,其他的细胞都将因过度拥挤而死去. 有四个新生儿,它们都位于每条边的中心.

时刻 2—3:我们看到一个方形的指环,其中每个活着的细胞都有两个邻居,所以这些细胞全都可以继续存活;此外,里面将有四个新出生的.

时刻 3—4:除了突出在外的四个细胞外,其他细胞统统由于过分拥挤而死去,然而它们的邻居将要出生一个新的环.

时刻 4—5:这个环的一切细胞均可继续存活,另外还有八个快乐的新生儿行将降临人间.

时刻 5—6:过度拥挤再次起作用,只留下四名幸存者. 此时,邻近的新出生者将形成:

时刻 6—7:由四条孤立的三子一线所形成的构形,称为"闪光灯",它们不再相互影响.

时刻 7—8—9—10—:在每一代,闪光灯的尖端因暴露而死去. 但新生者旋即在垂直方向上重新形成四条孤立直线的构形.

由此可知,构形将以周期 2 的方式永远振荡下去. 最后一对图形很常见,理应为它取上一个名字,我们称之为**交通信号灯**.

闪光灯本身相当普通(见图 2a). 但大部分由三个活细胞构成的其他构形则不出两步就要完全消亡(见图 2(b)). 如果开始时的构形是 2×2 块的三个活细胞,则第四个细胞将随即生成,而以后这只木块就将保持稳定而毫无变化,因为此时每个细胞都将与其他三个细胞相邻.

图 2. 若三子能存活,它们将形成闪光灯或木块.

静止的生命

容易找出其他稳定的构形. 这种静如止水般的生命形态，我们已在图 3 中揭示，并附带给出其传统名字. 其中最简单的情况通常是一些环圈，按其局部曲率使其中的每个细胞都具有两或三个邻居. 为了有效地控制出生，环圈的确切形状自然是至关重要的.

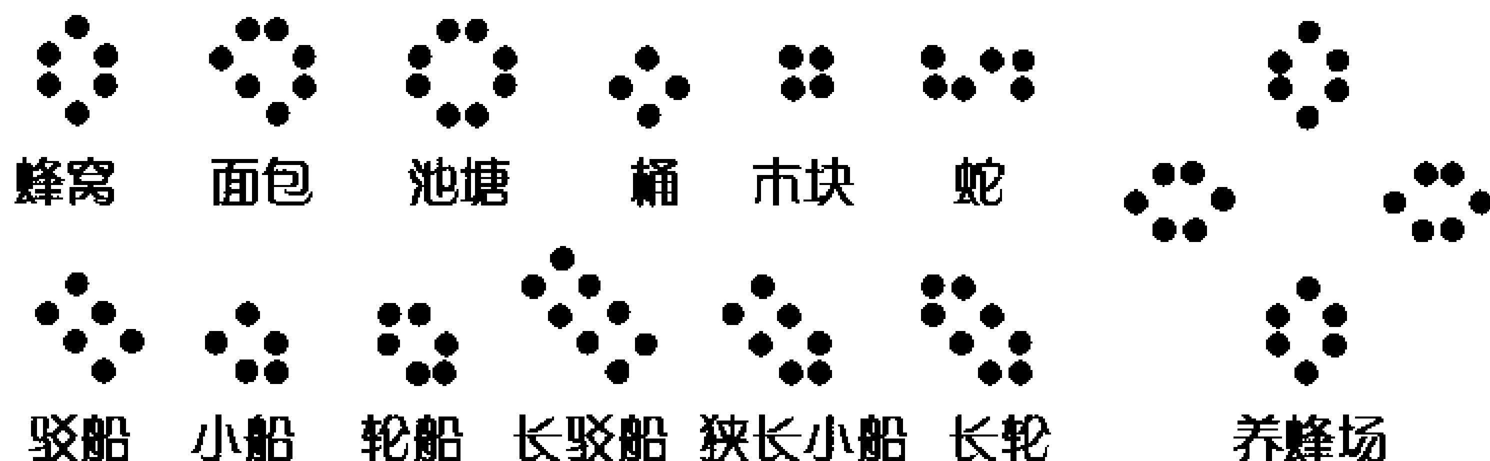


图 3. 静止生命的几种常见类型.

生命循环

上面所说的闪光灯是生命史以大于 1 的周期复制自身的最简单事例. 生命游戏狂热者（由罗伯特・T・威因莱特（Robert T. Wainwright）缔造的单词）们已经发现了许多其他构型，我们将把它们图示在图 4 至图 8 中.

滑行者与其他太空飞船

我们第一次追踪 r 形五连多米诺（你们不久就要听到这个单词）时，某个小伙子突然叫嚷起来："快来看啊！这里有一样东西会自己走路哪！"我们一听到喊声就马上过去看，随即发现了图 9.

你们将看到，第 4 代酷肖第 0 代，但是它却斜行了一步，所以这种构形能够坚走不移地在平面上行走. 由于在 2,6,10,…时段，同它在 0,4,8,12,…时段的联系方式被几何学家们称为*滑动反射*，所以我们将把这种生物取名为*滑行者*. 如果在带有显示设备的计算机上以一走速度来玩生命游戏，那么你将看到滑行者在摇着尾巴向前行进，委实是很有魅力的. 在本章中，我们将会看到相当多的滑行者.

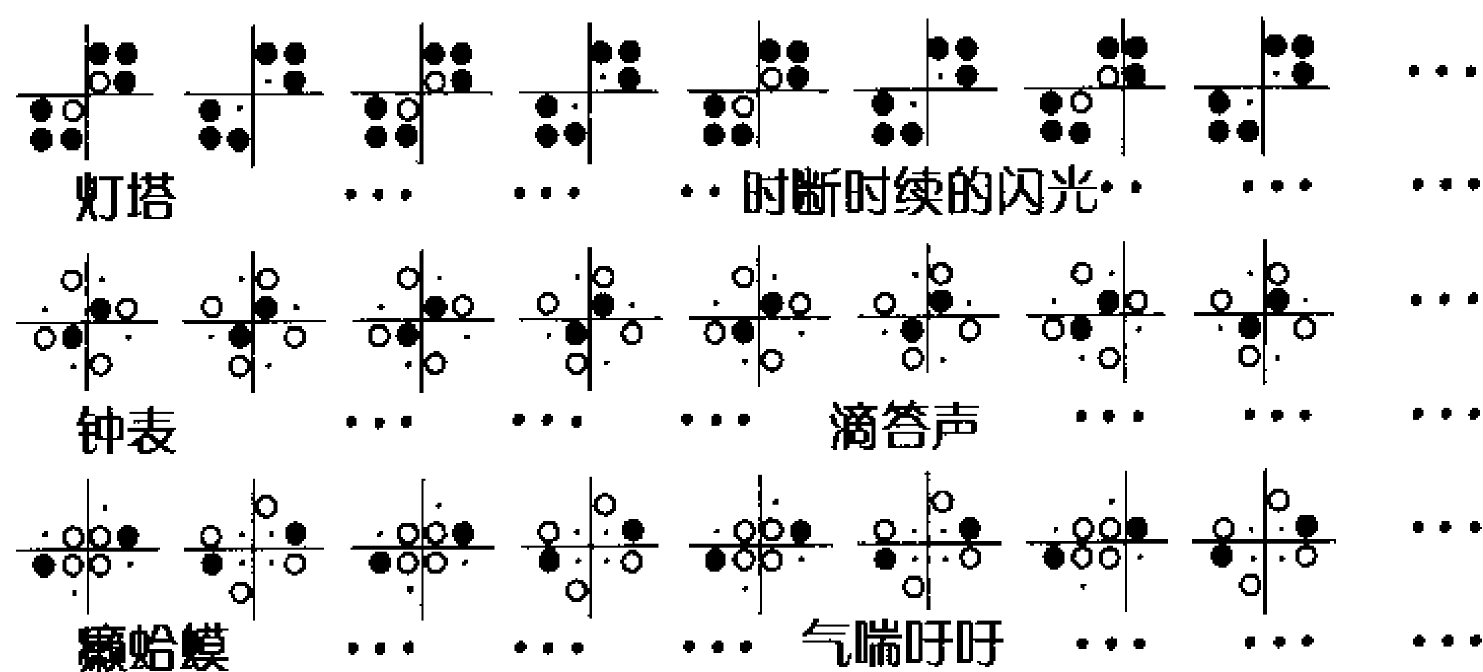


图 4. 周期为 2 的三种生命循环.

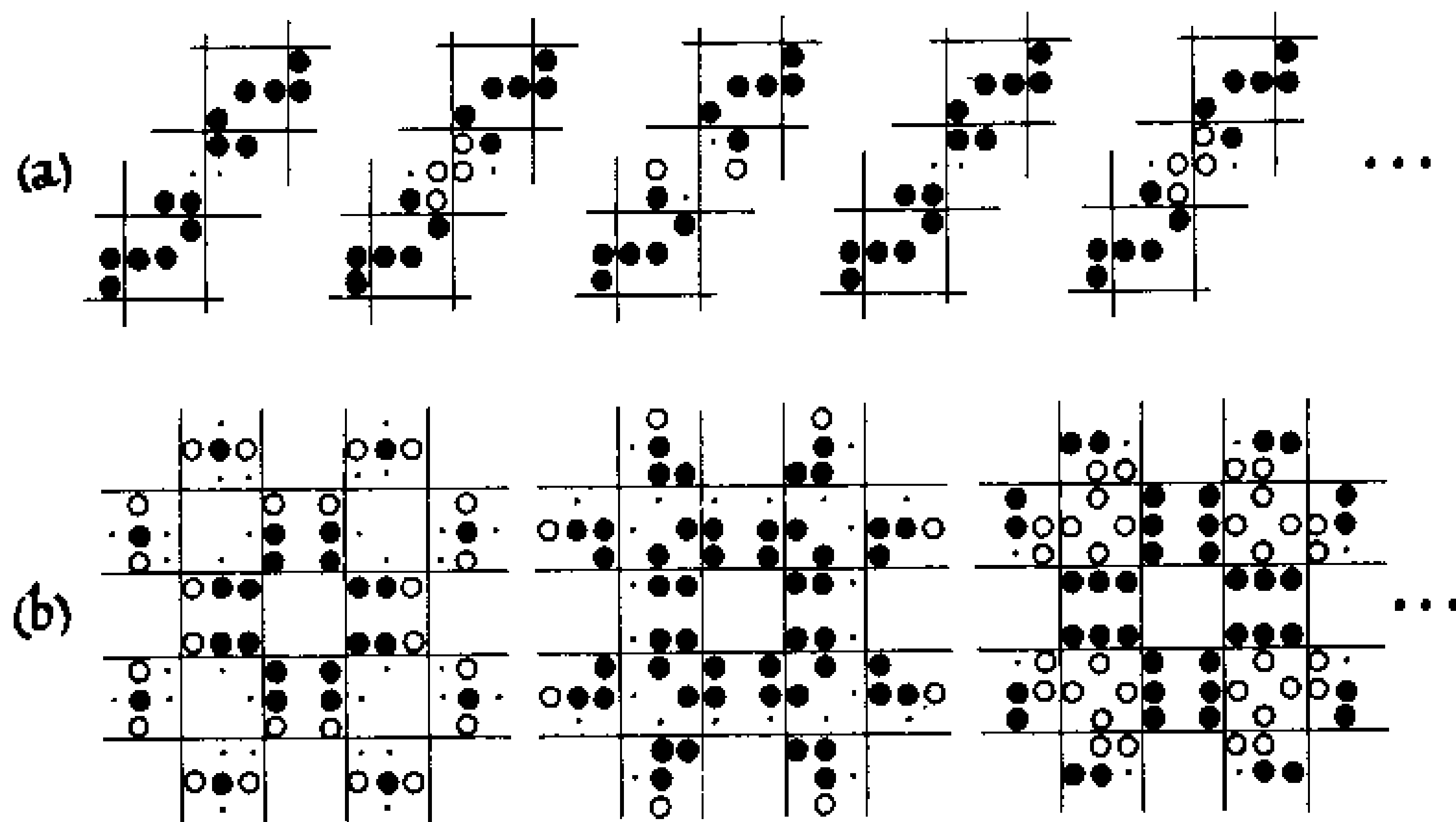


图 5. 周期为 3 的两种生命循环.

(a) 两只食人怪兽互相啃咬.

(b) 剑桥脉冲星 CP 48—56—72.

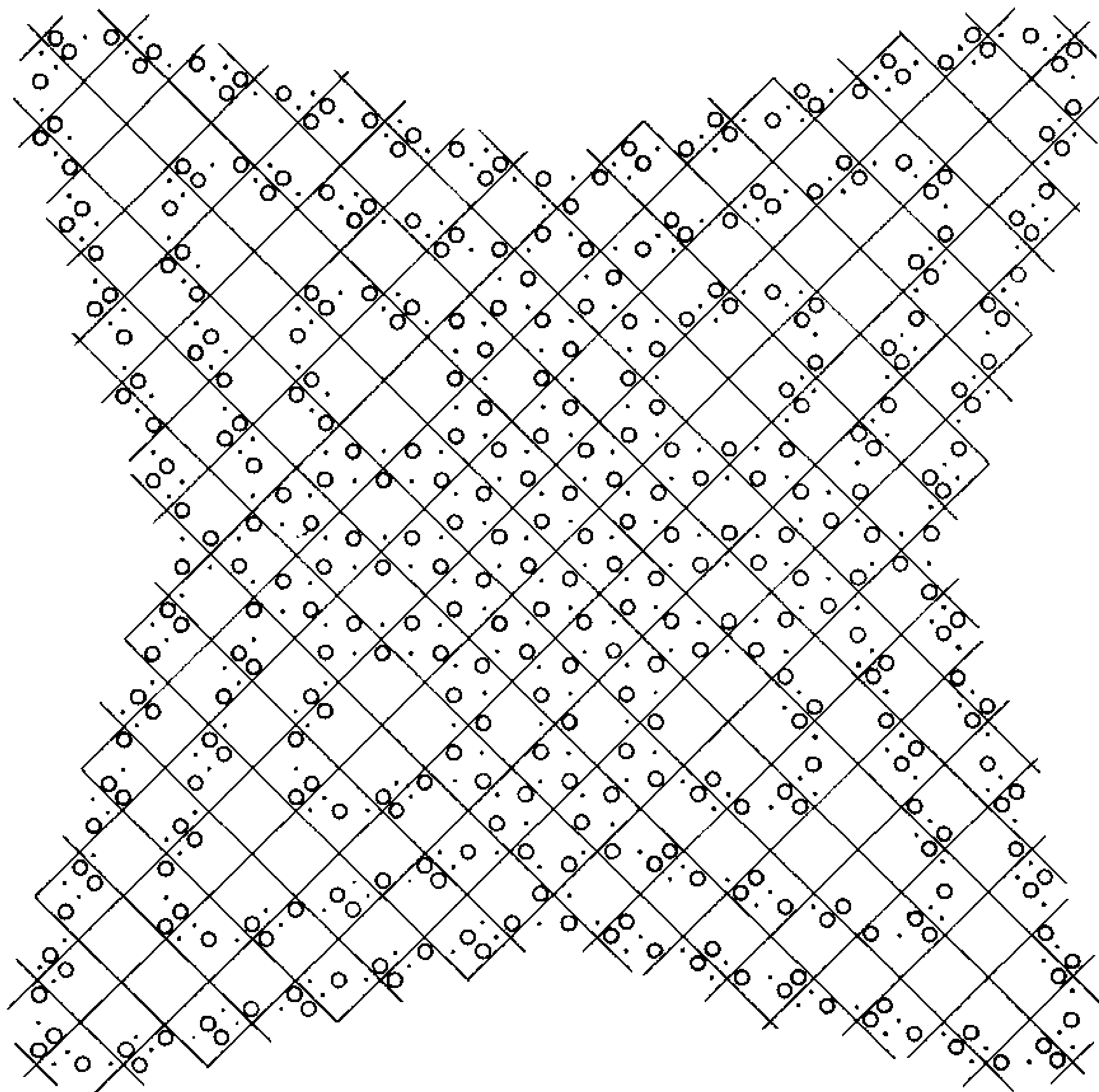


图 6. 高斯柏集团的双稳态多谐振荡器.



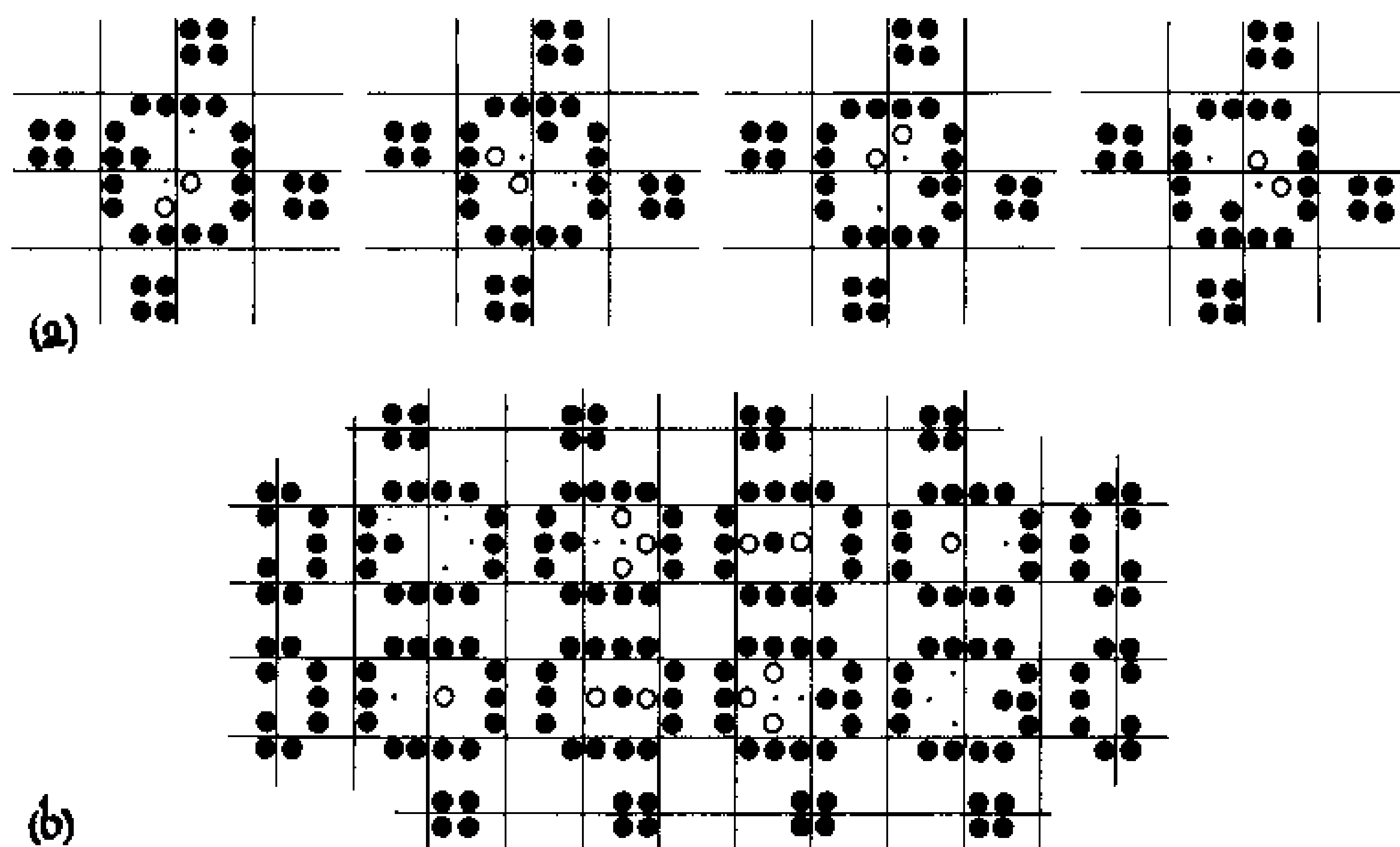


图 7. (a)凯瑟琳轮子.
(b)赫兹振荡器.静如止水的生命感应圈使场地保持稳定.

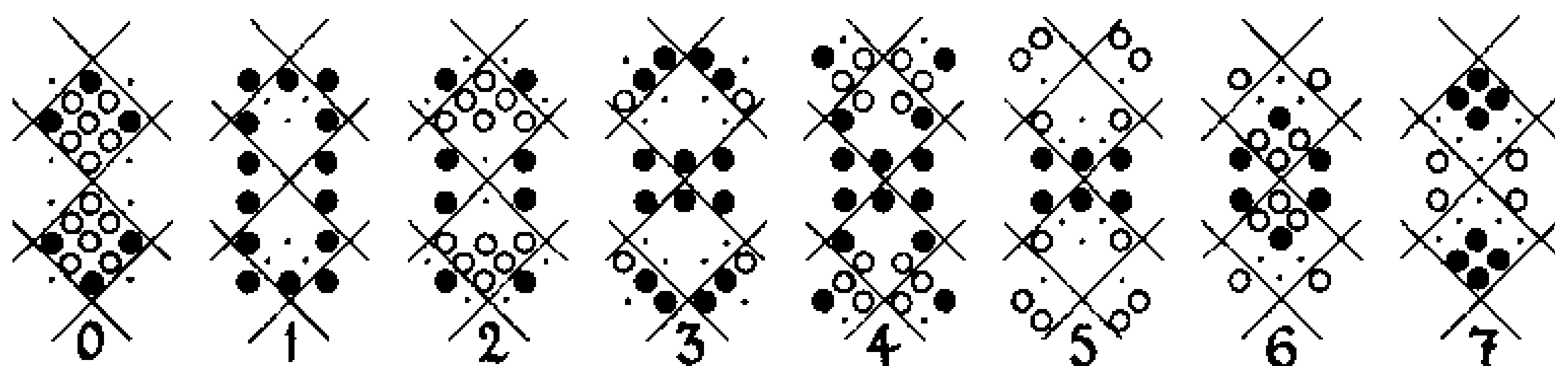


图 8. 阿拉伯数字 8 的变化.

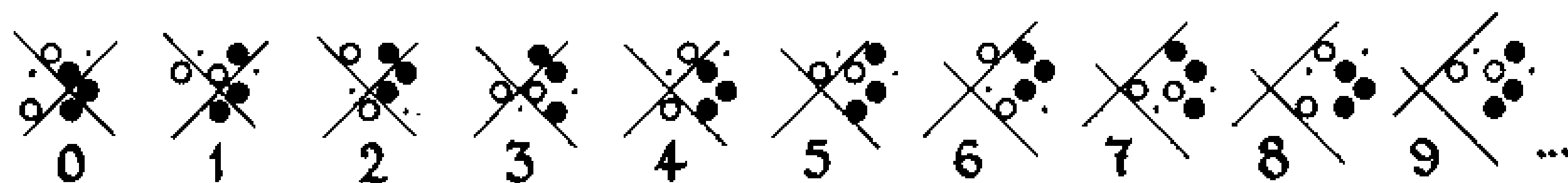


图 9. 每经四代,滑行者将斜走一步.

我们中间的一个人正是在这种带有显示设备的计算机中首先注意到了图 10(a)的太空飞船.(我们正是交上了好运,因为在它转变为别的图形之前得以马上停机,从而看到了此种现象.)此种轻量级太空飞船马上可以推广为中量级与重量级飞船(见图 10(b)及 10(c)).然而

较此更长的构形就显得不稳定了. 不过，人们后来又发现，任意长的空间飞船还是可以航行的，只要它们有合适的较小太空船加以护航(见图 11)的话. 如图所示，所有的太空飞船都是向东行驶的.

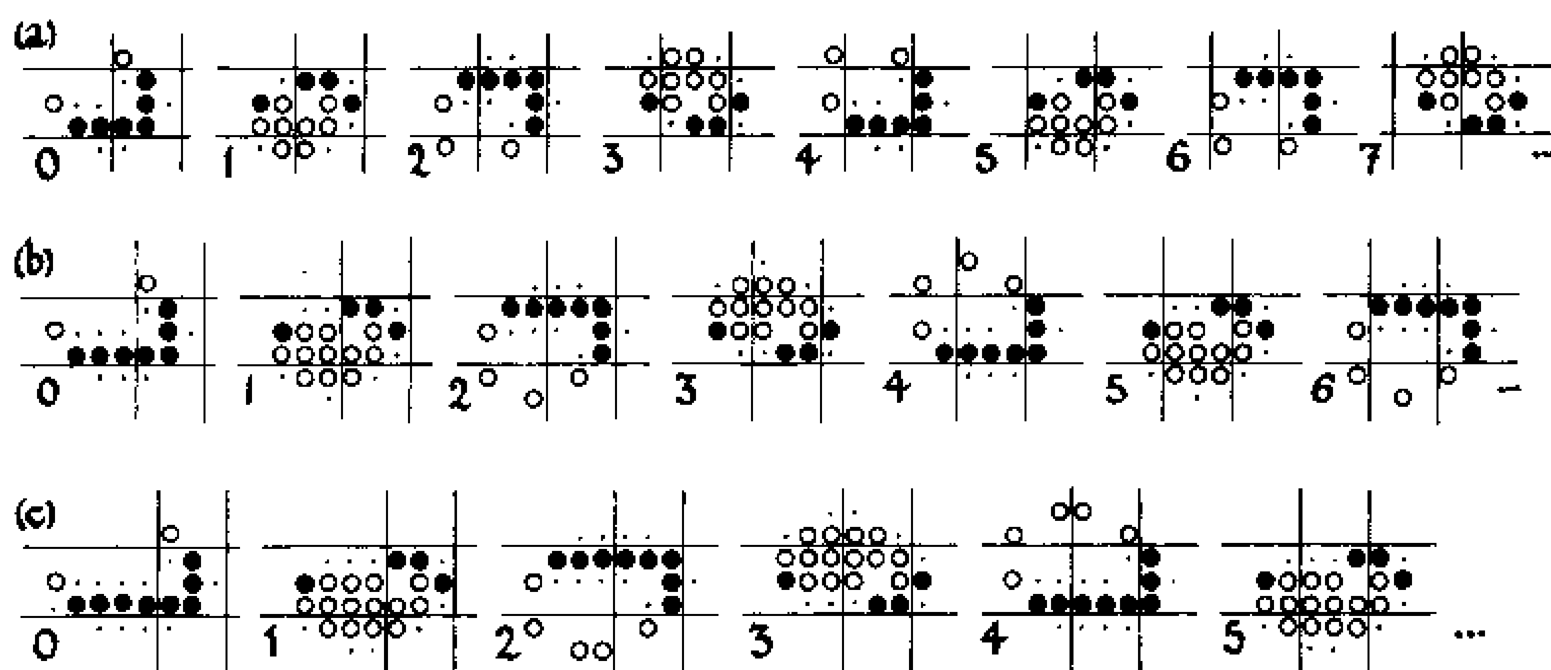


图 10. 各种级别的太空飞船:(a)轻量级;(b)中量级;(c)重量级.

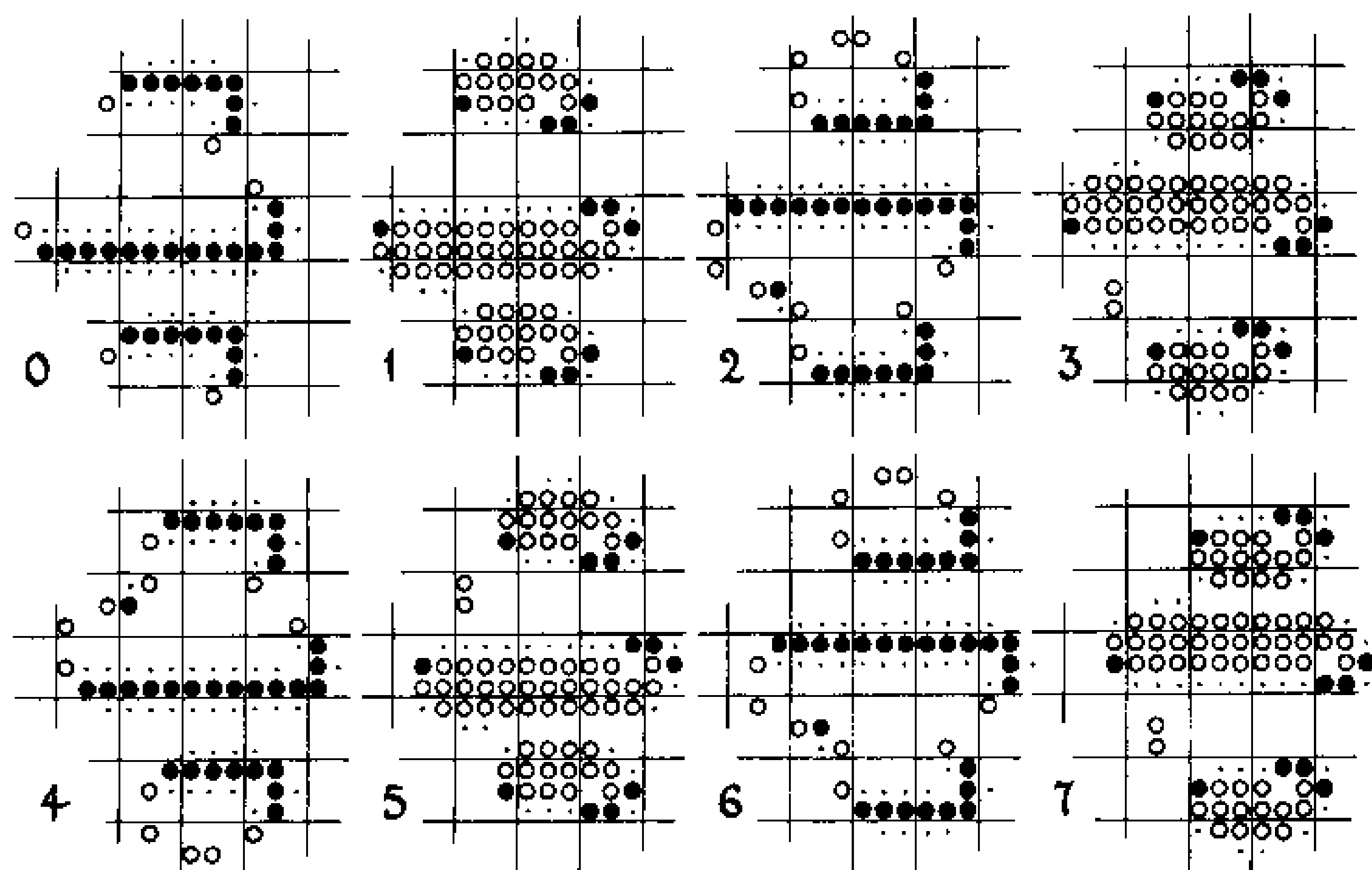


图 11. 一艘超重太空船由两艘重量级飞船加以护航.

生命游戏的不可预知性

有没有什么办法可以预告一个生命模式的命运？它会不会最终完全消亡，还是变成稳定态，或者产生振荡？它能否在平面上行走，或者无限扩展？

我们不妨看一看最简单的初始构形——成为一直线的 n 个活细胞所成之“物种”：

$n=1$ 或 2	立即消亡，
$n=3$	闪光灯，
$n=4$	在时刻 2 变为蜂窝，
$n=5$	在 $t=6$ 时变为交通信号灯(见图 1)，
$n=6$	在 $t=12$ 时消失，
$n=7$	在 $t=14$ 时变为**养蜂场**(见图 3)，在此之前出现美丽的对称图案，
$n=8$	变为 4 只木块与 4 只蜂窝，
$n=9$	得出两组交通信号灯，
$n=10$	变为**五方十项运动**，其循环周期为 15，
$n=11$	变为两盏闪光灯，
$n=12$	变成两个蜂窝，
$n=13$	转变为两盏闪光灯，
$n=14$ 与 $n=15$	彻底消亡，
$n=16$	有 8 盏闪光灯的大型交通信号灯，
$n=17$	变为四个团块，
$n=18$ 与 $n=19$	彻底消亡，
$n=20$	变成两个团块，

…………

什么是一般模式呢？我们茫然不知. 即便开始时的活细胞个数甚小，也不易看出它们的演变情况. 由 5 个细胞组成的连通“物种”共有 12 种(S・W・果隆姆称之为“潘多米诺”*). 下面给出它们的演变简史：

---

* 译者注：潘多米诺(pentomino)，也可意译为“五连多米诺”或“五米诺”.

图形	我们的记法	命　运
	O	在时刻 6 变为交通信号灯(见图 1).
	P	在时刻 4 消亡.
	Q	在时刻 9 变为交通信号灯.
	R	在时刻 1103 到达稳定态，其中含有 4 盏闪光灯，1 艘轮船，1 只小船，1 块面包，4 只蜂窝与 8 只团块，发射出 6 个滑行者！(其全图请参看《科学美国人》杂志，1971 年 1 月号第 105 页).
	S	在时刻 4 消亡.
	T	在时刻 10 变为交通信号灯.
	U	在时刻 4 消亡.
	V	在时刻 1 变为 W，然后按 W 演变.
	W	2 代后转变为一只面包.
	X	在时刻 6 变为交通信号灯.
	Y	在时刻 3 消亡.
	Z	其命运同 Y 一样.

同上面一样，很难看出其中有什么一般规律.

在下面的图 12 与图 13 中给出了一些其他构型，它们有着极其有趣的生命史，可以让你练一练自己的技术.

生命游戏的构形中，是否其人口数量可以漫无节制地增长呢？这个问题的答案是肯定的！我们中间的一个人曾愿意提供 50 美元的奖金来为本问题公开征解. 结果在 1970 年 11 月被 R·W·高斯柏为首的麻省理工学院的一个研究团体解决了. 高斯柏的才智横溢的**滑翔炮**(见图 14)每经 30 代就发射出一个新的滑行看. 这正是我们力求证明的事实：

> 生命游戏真的是无法预测的！

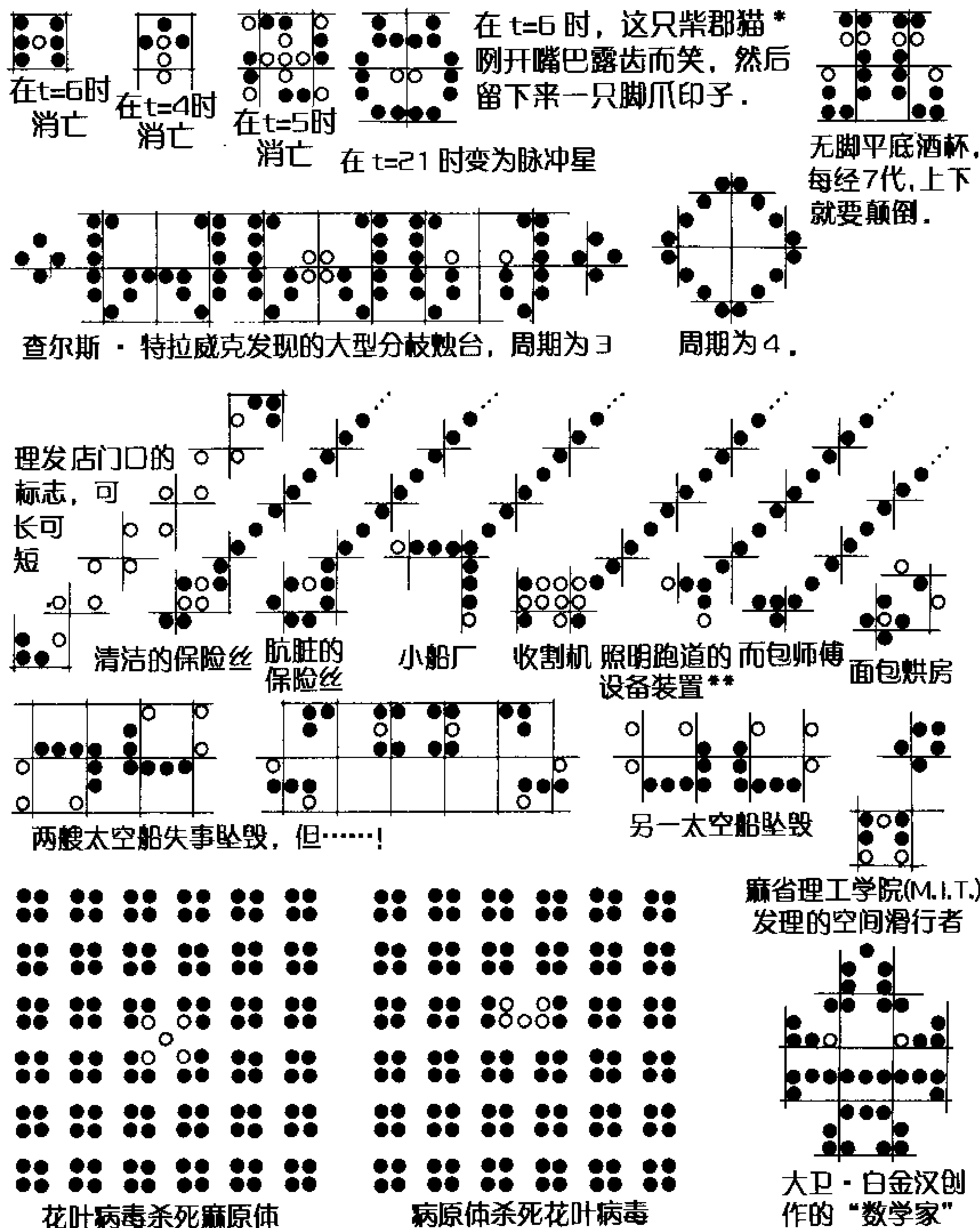


图 12. 提供给读者的练习.

---

* 译者注:柴郡猫是英国数学家,著名儿童文学作家道奇逊(笔名刘易士 · 卡洛尔)笔下的人物,它常无缘无故地傻笑.

** 译者注:便于飞机在夜间安全着陆.

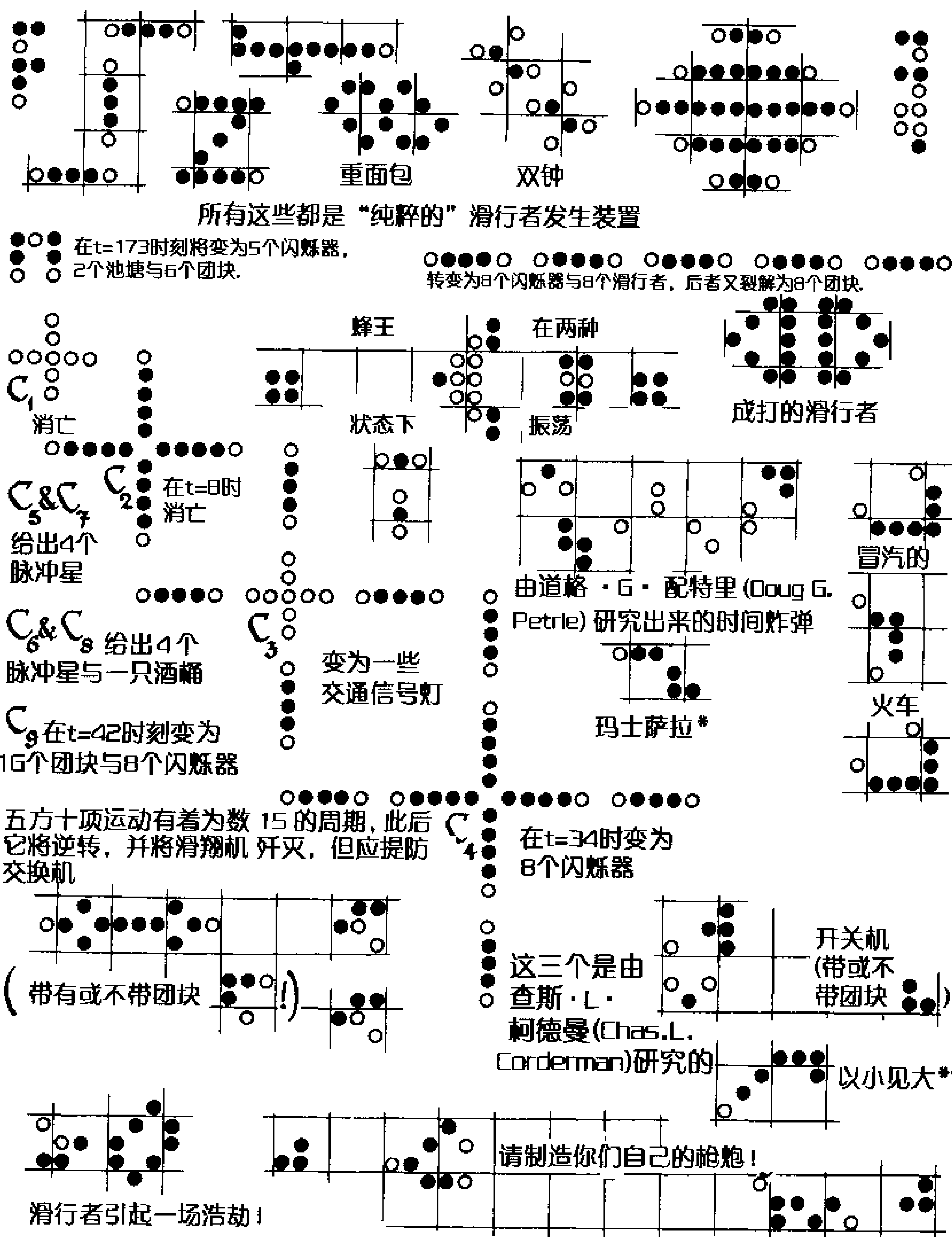


图 13. 主要为计算机爱好者设计的生命游戏练习.

---

* 译者注：人名，指长寿老人. 玛士萨拉为挪亚洪水时代的族长，活到969岁，好比外国的“彭祖”，见《圣经·创世纪》第5章27节.

** 译者注：multum in parvo 是拉丁文成语，有小中见大，小而全，大寓于小等意思. 接近于汉语成语：“麻雀虽小，五脏俱全”.

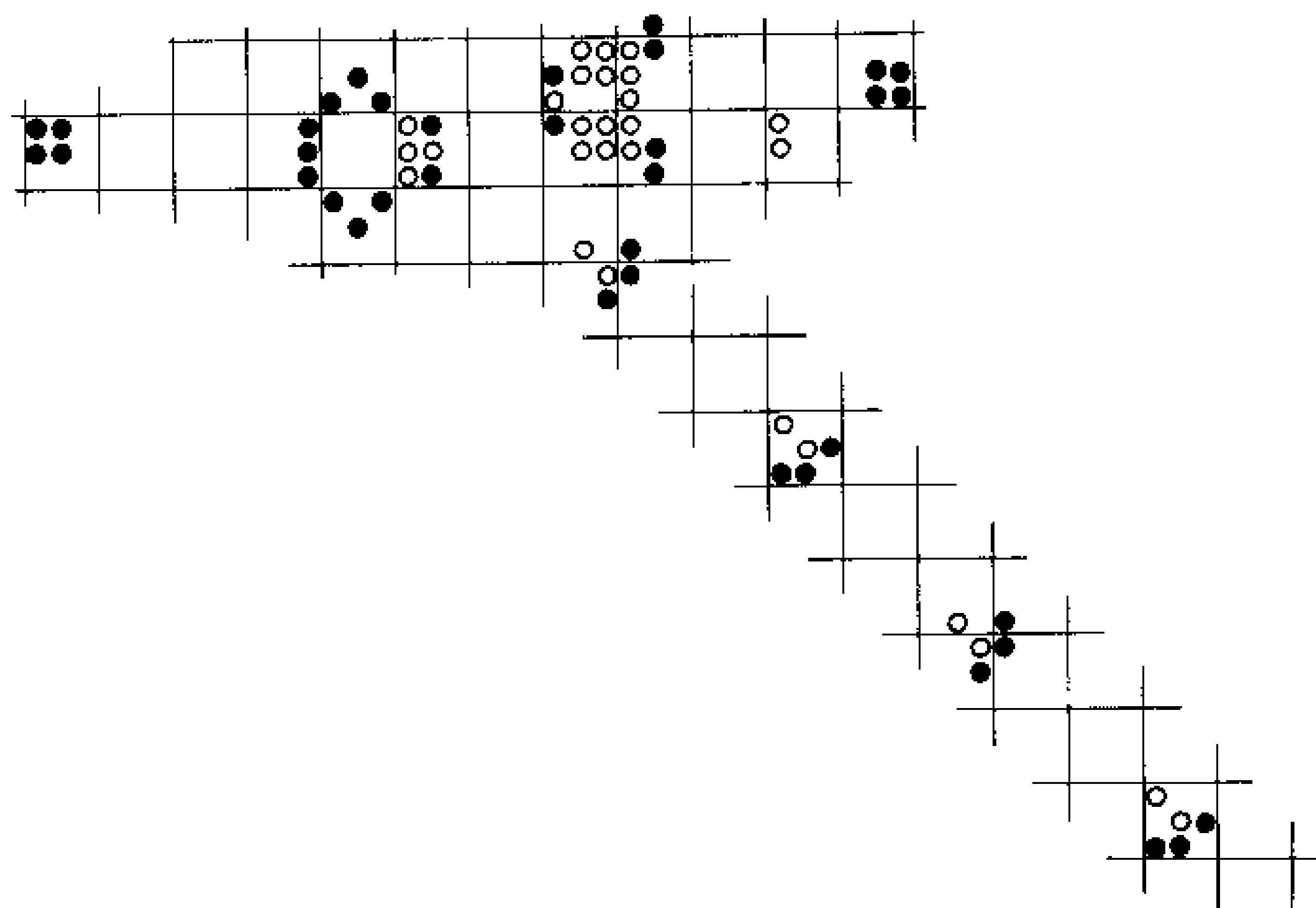


图 14. 高斯柏的滑翔炮.

伊甸园

存在着一些只能作为初始状态出现的生命游戏构型,它们是没有祖宗的!

我们将证明,当 n 充分大时,在$(5n-2)\times(5n-2)$的正方形中将存在某种没有父母的构型. 对此,只要检查预期中的双亲在 $5n\times 5n$ 正方形中存在的那部分空间即已足够(见图 15). 只要其中有任何一个 5×5 正方形是空白的,那么我们就可用图 15(b)的办法来取代它,两者在随后各个世代的演变当然全然

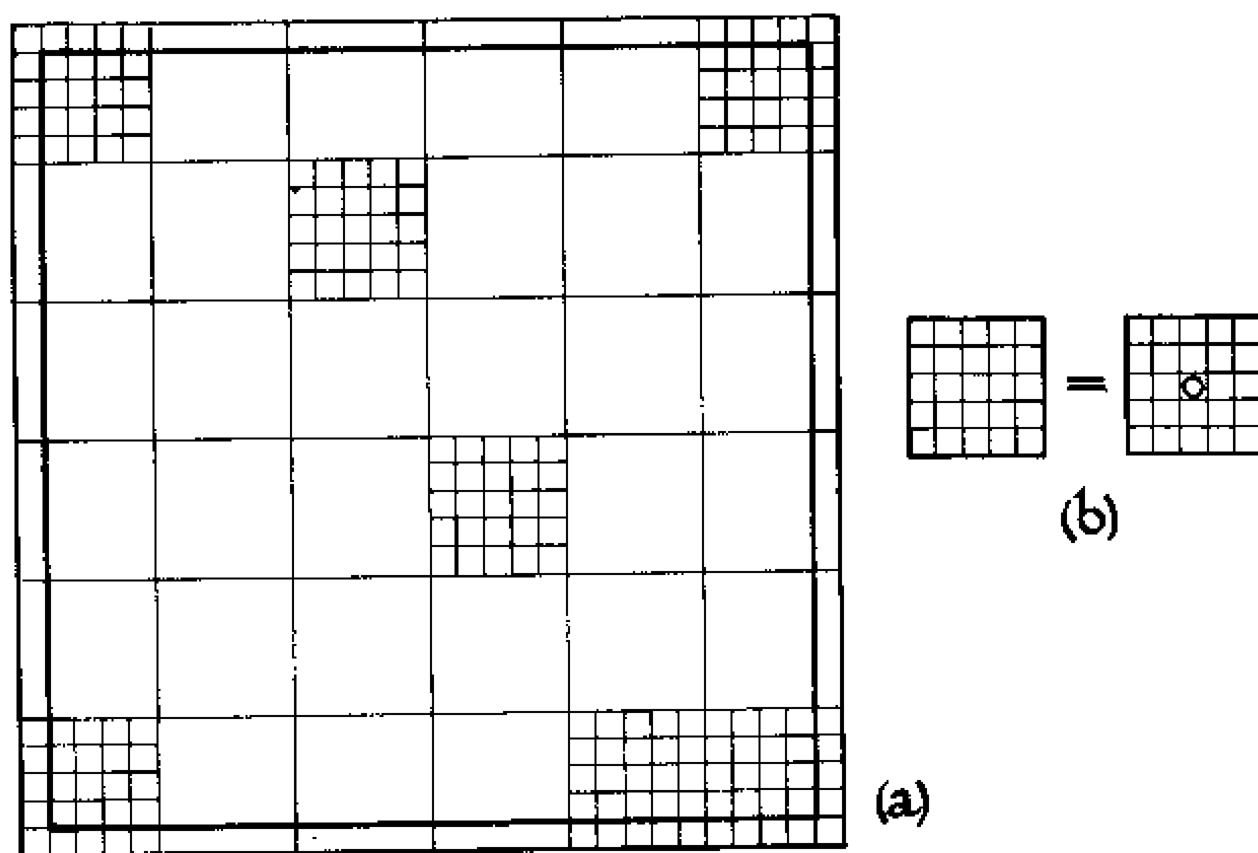


图 15. 伊甸园藏在哪里?

没有差别. 因此我们只须考察 $5n\times 5n$ 正方形中 2^{25n^2} 中的

$$(2^{25}-1)^{n^2}=2^{24.999\,999\,957\,004\,337\cdots n^2}$$

个构型就行了. 而在 $(5n-2)\times(5n-2)$ 个正方形中，正好有

$$2^{(5n-2)^2}=2^{25n^2-20n+4}$$

个可能的构型，所以，如果

$$24.999\,999\,957\,004\,337\cdots n^2<25n^2-20n+4,$$

则其中的一个构型就将没有父母双亲，我们计算出 $n=465\,163\,200$ 时，这样的事件将会发生，所以必然存在着一个伊甸园构型，它将舒舒服服地躺在一个

$$2\,325\,816\,000\times 2\,325\,816\,000 \text{ 方格子中！}$$

此类论证首先被 E·F·摩尔(E. F. Moore)在一篇范围更广的论文中用过. 在生命游戏的情形，通过更为审慎的计算，上限已被压缩到 1 400×1 400 大小的方格子. 麻省理工学院的研究组用了完全不同的概念，花去不少计算机时间，终于找出了下面的实际例子.

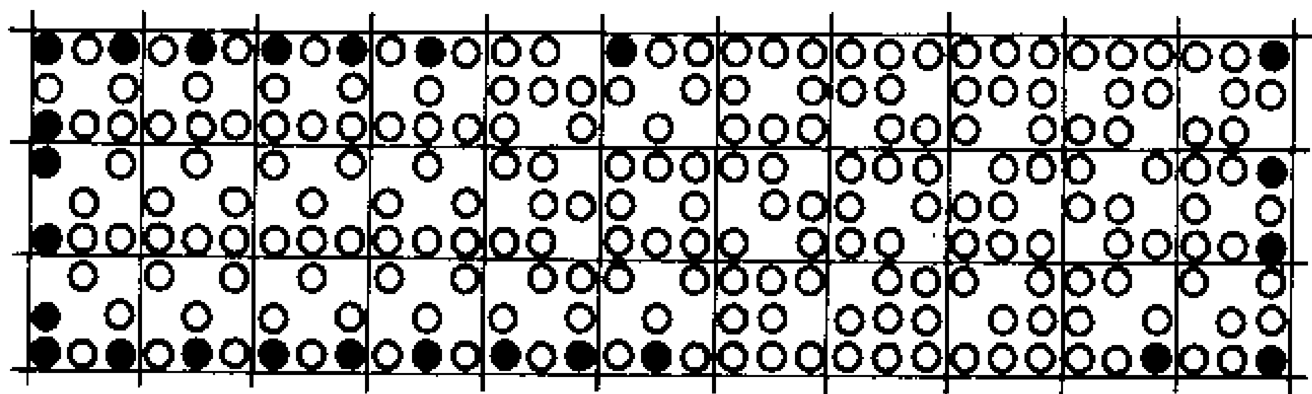


图 16. 由罗迦·彭克斯，密克·皮勒，里克·施洛配尔，司蒂弗·瓦特等人发现的一个孤儿. *

生命游戏问题是困难的！

我们所提出的有关生命游戏"物种"的最后归宿问题看来不太像是数学性质的问题. 说到底，生命游戏不过是个游戏而已！看来肯定不会有什么困难的数学问题吧？

然而，确实是有的！我们当真可以证明下列惊人事实，任一陈述足够完善的数学问题可以归结为一个生命游戏问题. 那些生命游戏物种演变史的貌似肤浅的问题可以搞得极其困难！

---

* 译者注：指没有父母双亲. 也就是说这个构型不可能从其他构型演变而来.

譬如说,有一个小问题,自从皮埃尔·德·费马三百多年以前提出以来已使数学家们忙碌非凡.n 大于 2 时,是否有一个整数的 n 次方是较小的两数的 n 次方之和? 尽管许多满腹经纶的数学家们对之作了大量有价值的研究,可是我们仍然得不出结论!* 但是,如果你有一种确凿可靠的办法来预告某个生命游戏构形的归宿,你就有可能解决这个大难题!

其理由是我们可以为你设计一种有限的初始物种 P_0,它将完全消亡,如果存在着一种办法,能把一个 n 次幂分解成两个较小 n 次幂的话. 如果你有一种机械办法,它能输入一个任意的有限生命游戏构形 P,并能保证给出或是或非的下列两种回答:

消亡,如果生命游戏规则最终使物种 P 完全消失;

存活,如果不是如此;

那么你就可以把它应用于 P_0,并一举解决费马问题.

甚至可以干得更出色,我们可以设计一种构形 P_1,它将告诉你,这些完全平方数究竟是些什么.

如果

$$a^n+b^n=c^n$$

是按某种辞典顺序表出的费马问题的第一个解答,则 P_1 最终将导致一个构形,它将具有

向西北方行进的 a 个滑行者;
向东北方行进的 b 个滑行者;
向西南方行进的 c 个滑行者;
向东南方行进的 n 个滑行者.

此外别无其他! 对其他数学问题,我们也能做同类事情.

造一台"生命"计算机

许多计算机已经编好程序以使来做生命游戏. 现在我们要把颂扬称赞的言辞转向另一方——如何定义生命游戏的模式,让它们模拟计算机. 许多引人注目的结论都来自这一思想.

良好的老式计算机是由一些传输电脉冲的金属导线制造的. 我们的基本想法是想通过平面上的某些直线来模仿这些导线,滑行者得以沿着这些直线运行(见图 17). (由于滑行者是沿着对角线方向运行的,所以从现在起,我们要把平面转过 45°,以便使滑行者沿着书页的上下方向移动.)在计算机内部,有一种部件称为**时钟**,它的职能是定时发送脉冲信号,而计算机中的大部分工作部件是

* 译者注:此问题已被英国数学家怀尔斯解决,详见有关报道.

由逻辑**门电路**所形成的,如图 18 所示. 显然我们可以用滑翔炮作为脉冲发生器. 另外,我们对逻辑门电路可以干些什么呢? 让我们先来看看两个滑行者成直角撞毁时的各种可能发生的相互作用吧.

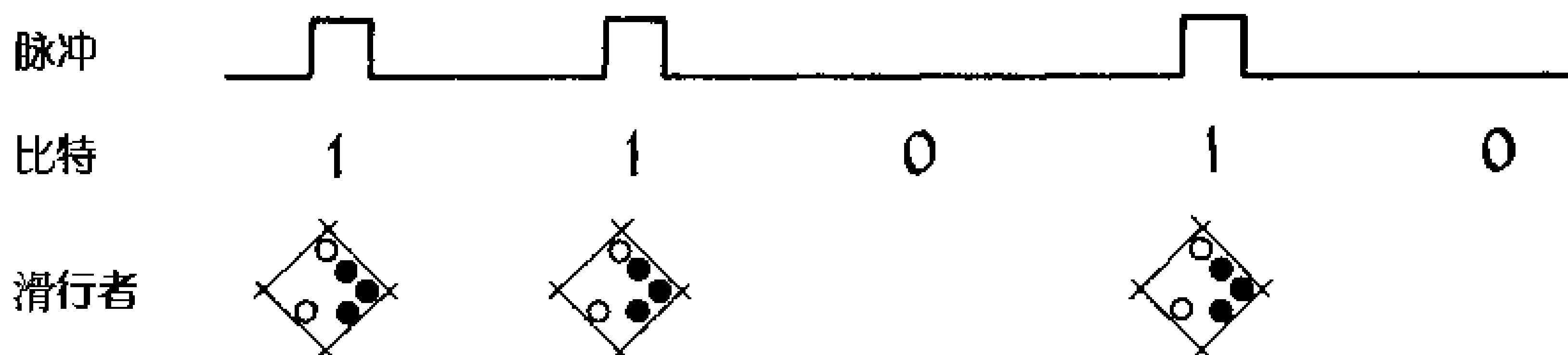


图 17. 滑行脉冲.

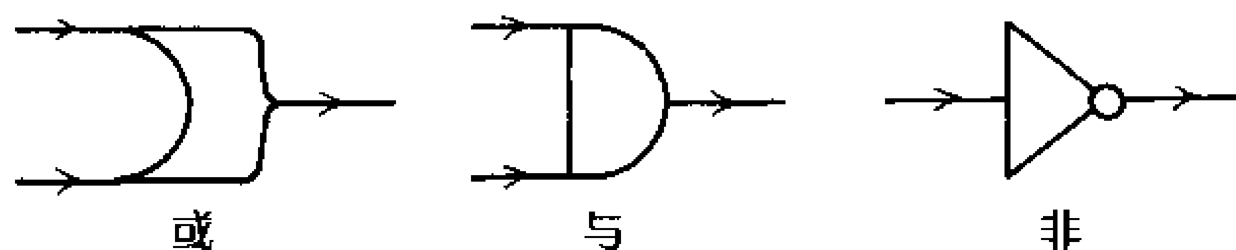


图 18. 三种逻辑门电路.

两个滑行者互相遭遇

两个滑行者之间有不同的遭遇方式,因为他们的确切安排与定时有着各种不同的可能性. 图 19 给出了一些碰撞结果. (a)形成闪光灯;(b)形成木块;(c)形成池塘;(d)互相完全歼灭于

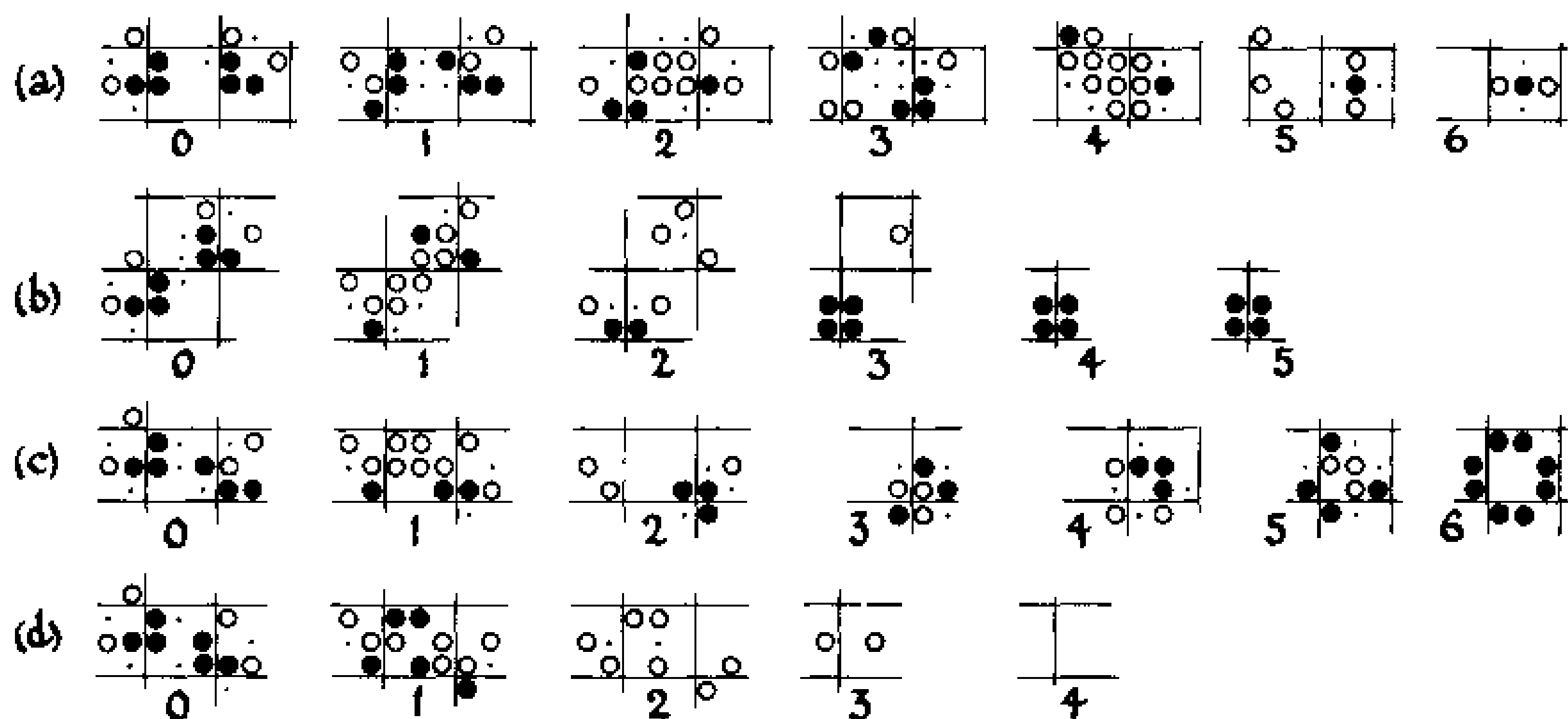


图 19. 两个滑行者相撞时的不同结局.

净,共有多种可能性,这里是其中之一.最后的这种结果看来似乎没有建设性,但事实上这些**消亡反应**倒是出人意料地有用!

怎样造出一个"非"门

我们可以利用上述消亡反应,它同滑翔炮在一起作用,即可产生一个"非"门(见图20).输入的信号流从图的左侧进人,滑翔炮的位置与时间要安排得使输入流的每一个位置正好同滑翔炮

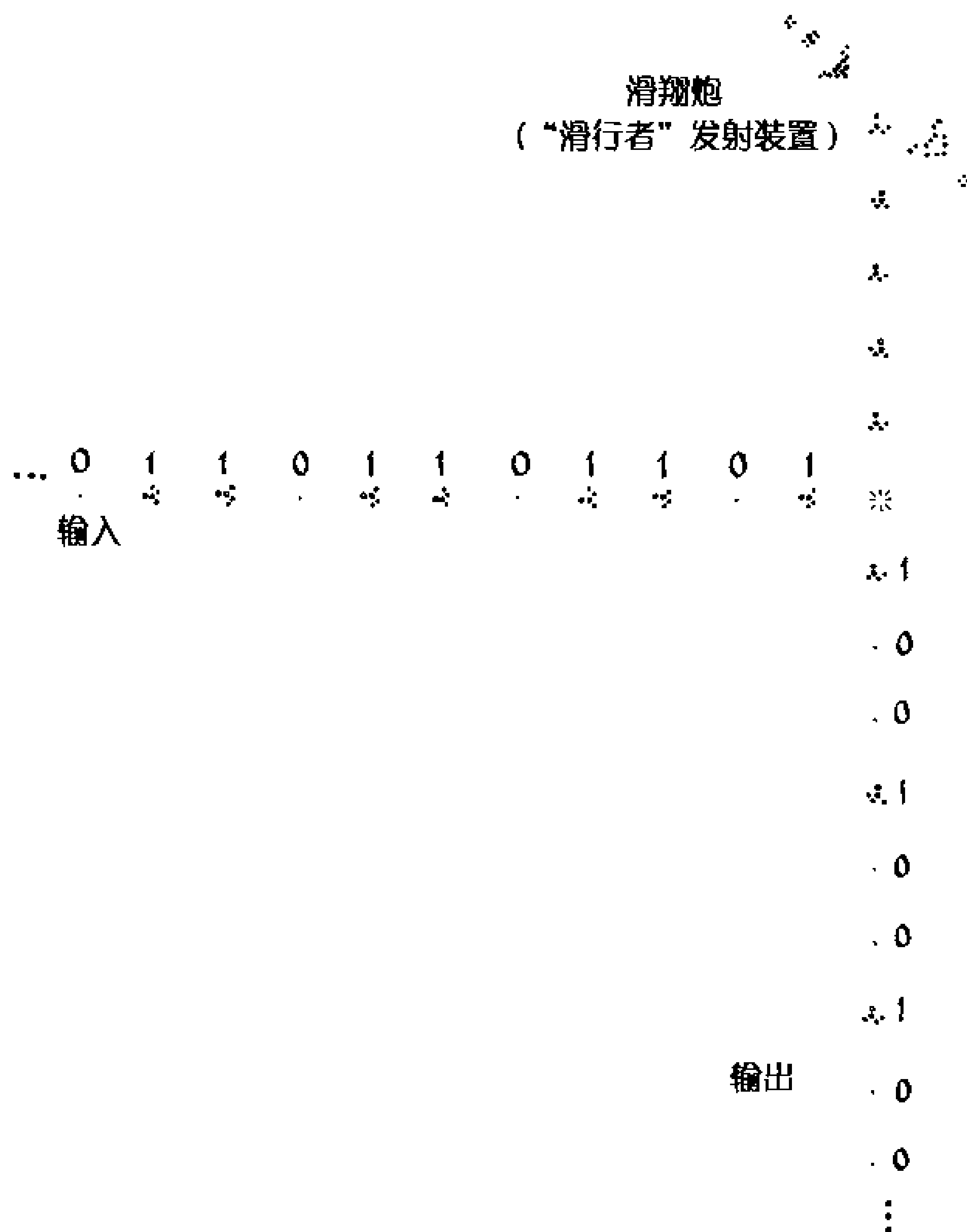


图20. 利用滑翔炮与消亡反应制造一个"非"门.

中打出来的一个滑行者相遇，于是它们就在相互遭遇时撞毁了(用 * 号表示).

图 20 表示的是周期性信号流

1 1 0 1 1 0 1 1 0……

变成了其互补信号

0 0 1 0 0 1 0 0 1……

幸而存在着一些消亡反应，它们的位置与时间都不相同，可使撞毁十分快速，而从同一台发射装置里发出来的随后的滑行者不会受到影响(见图 21). 这意味着，可以通过旋转充分多的转角而将滑行者流重新定位(见图 22).

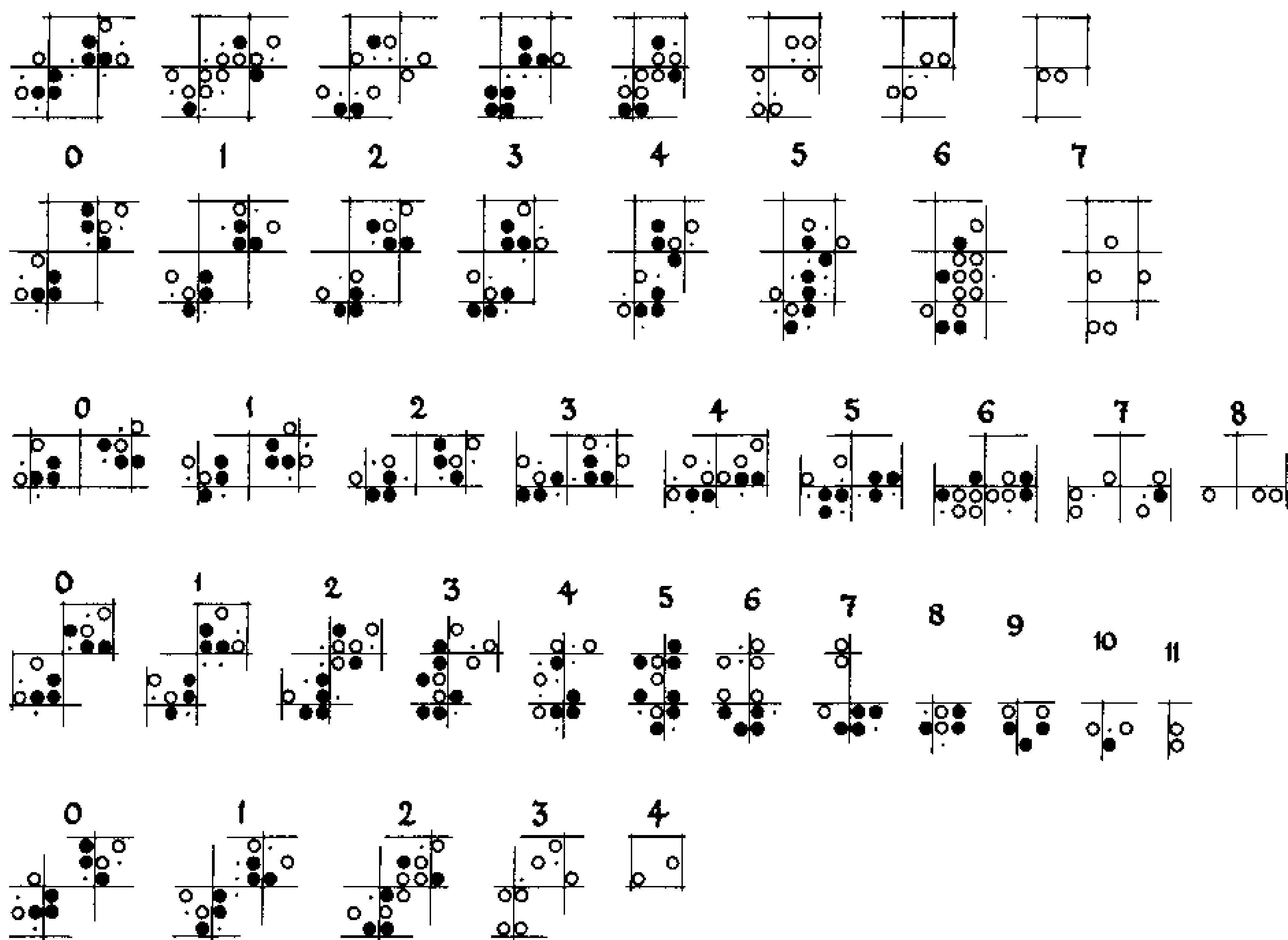


图 21. 两败俱伤的滑行者的各种消亡反应.



图 22. 滑行者流的重新定位与延滞.

吞噬者

两个滑行者互相遭遇时还能产生其他事情吗？事情可多着哩！其中之一是可以造出一个**吞噬者**(见图 23),一个吞噬者可以吃掉一大堆东西西丝毫不伤脾胃. 由高斯柏发现的吞噬者对我们非常有用. 在图 24 中你可以看到被它享用的各种食物:(a)一盏闪光灯;(b)一个蜂房的前

身;(c)一艘轻量级太空飞船;(d)一艘中量级太空船;(e)一名滑行者.不过,它对重量级太空船是消化不了的,因而要剩下一块面包.如果它从错误的方向去吞吃闪光灯,则反而会吐出一家面包店!

有时,在你周围常有一些令人气恼的滑行者流徘徊不走,这时,吞噬者就特别有用——只要请他们坐镇在那儿,就能把整个滑行者流统统吃光!

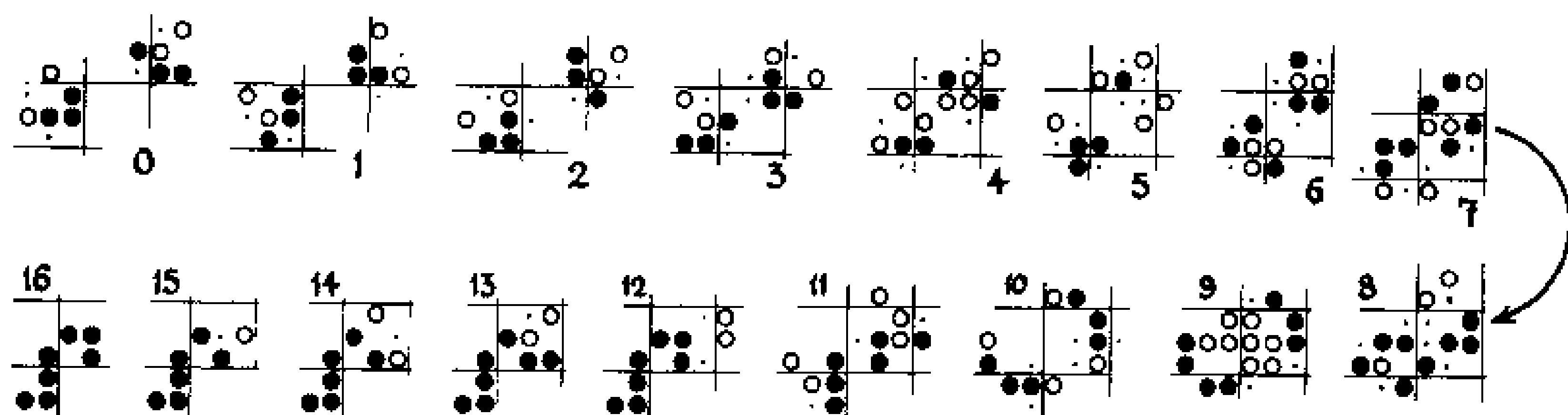


图 23. 两个滑行者互相撞毁,造出了一个吞噬者.

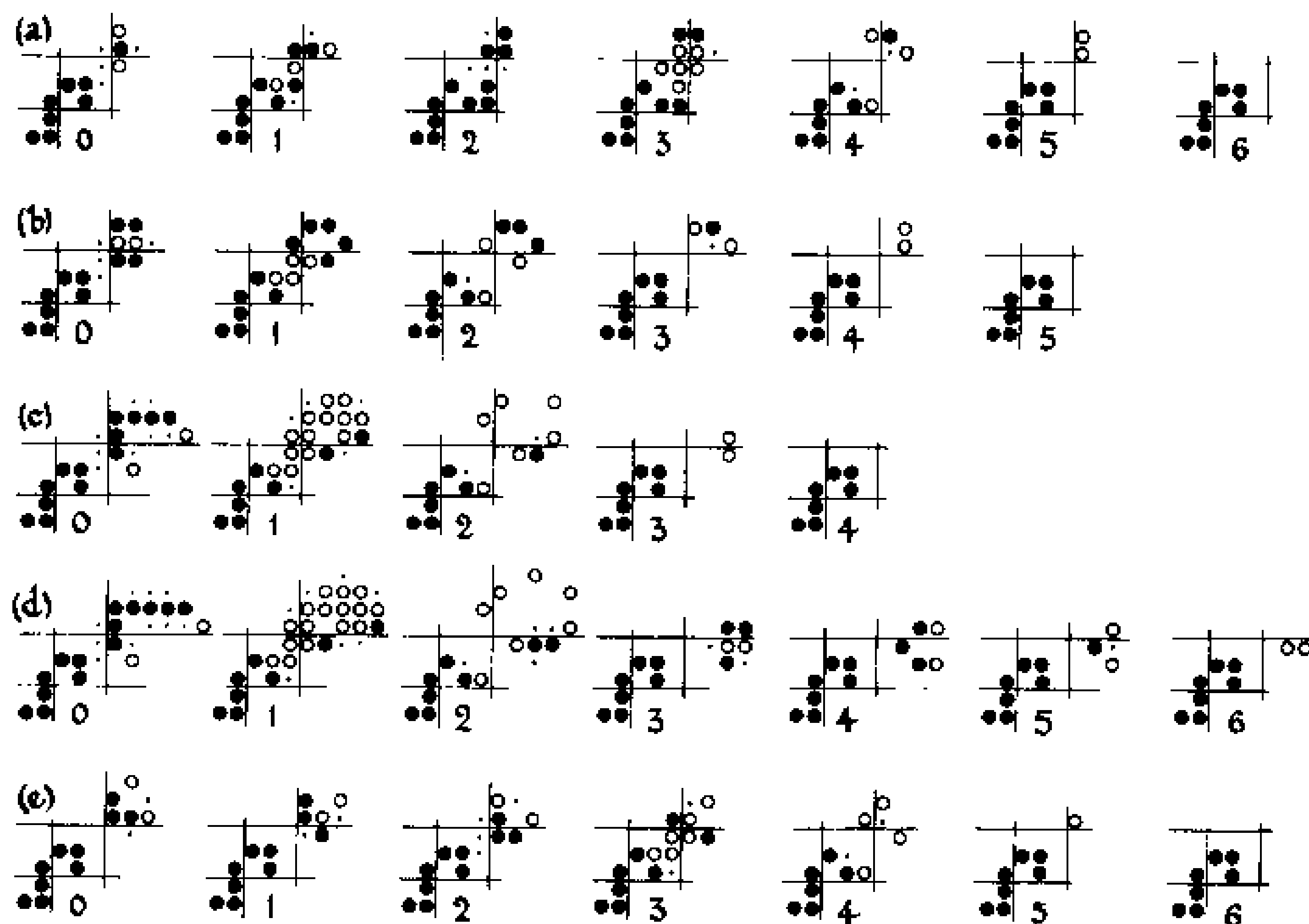


图 24. 贪婪的吞噬者正在张嘴大嚼各种食物.

滑行者们能建造他们自己的滑翔炮！

滑行者碰到其他东西时会发生些什么情况？我们已经看到它可能被吞噬者吃掉．它也能歼灭一个团块（本身也消亡，见图 25(a)）．较有建设性的是它能将一个池塘转变为一艘轮船，而将一艘轮船转变为滑翔炮的一部分（见图 25(c)）．由于滑行者撞坏后可以造出团块（图 19(b)）与池塘（图 19(c)），所以它们能够造出一座完整的滑翔炮！在图 26(a)中，通过 13 个滑行者，经 67 代可以办成这件事．图 26 的 b,c,d 相继表示出第 8，第 16 以及第 44 代后的情况．然后，来了一个额外的滑行者，它同刚出现的蜂窝打上交道，到了第 67 代（图 26(e)），滑翔炮已处于完全的工作状态，再经 25 代，它可以发射出第一个滑行者了．

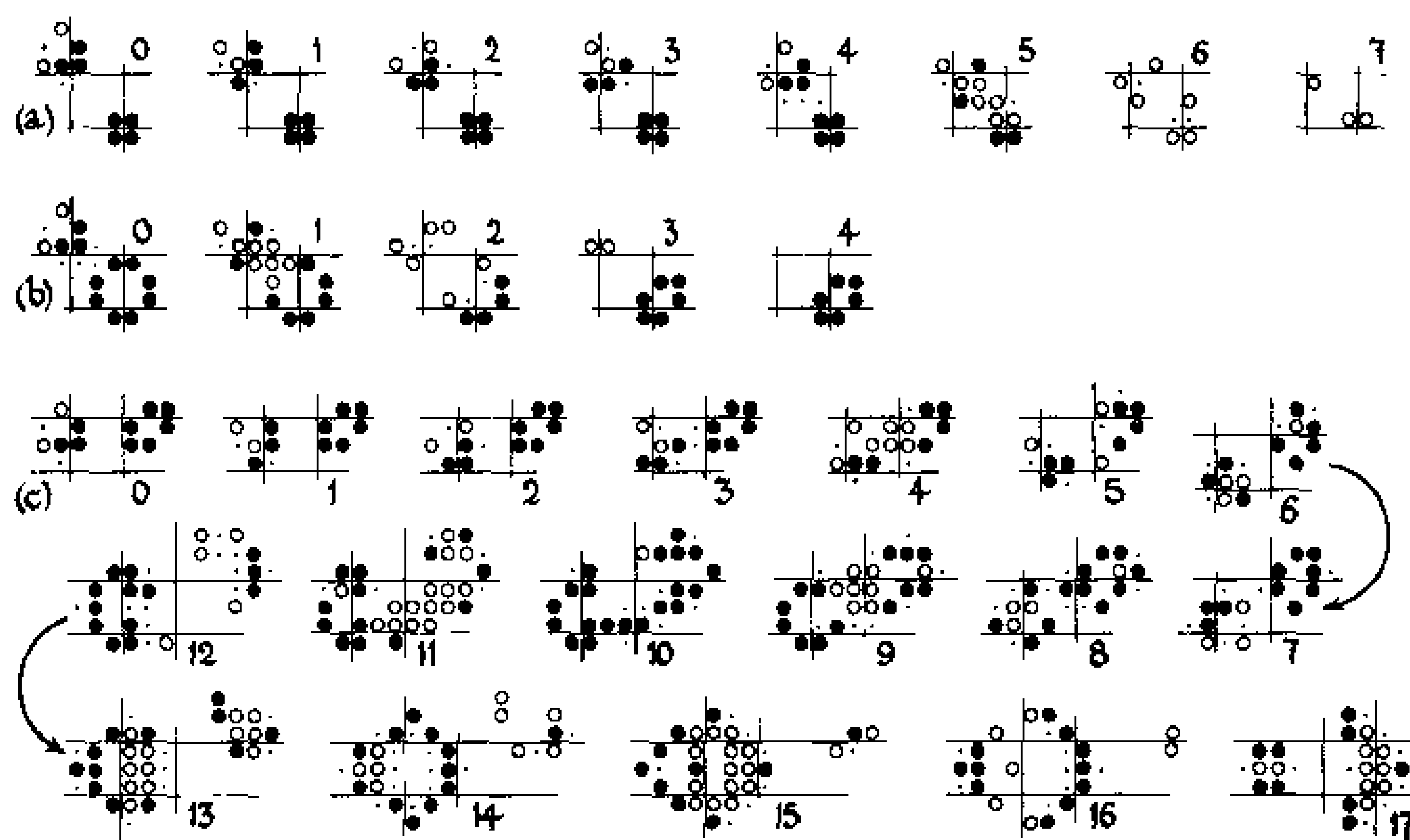


图 25. (a)炸毁团块的滑行者；(b)滑行者跳进池塘，浮出来的是艘轮船；
(c)滑行者撞毁后变成轮船，成为滑翔炮的一部分．

反冲作用

滑行者之间的另一个重要的反应是**反冲**（见图 27(a)），这时的裂变产物是一个滑行者，它将沿着一条紧靠着原来的直线且与之平行的直线行进，但其方向相反．我们可以想像为这个滑行者被另一滑行者**一脚踢回**来了．图 27(b)是我们用来表示反冲的记号．

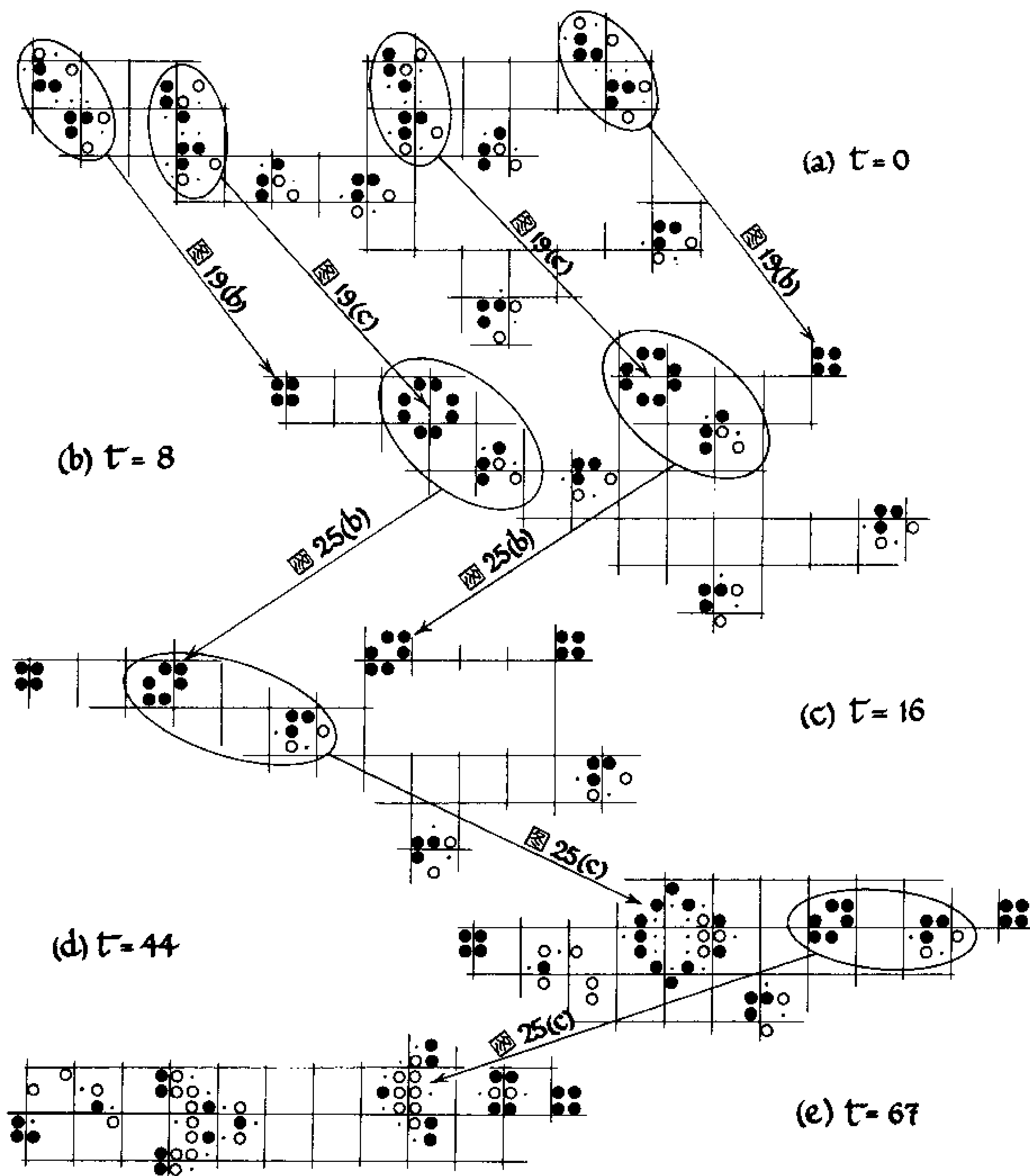


图 26. 十三个滑行者可以造出它们自己的滑翔炮.

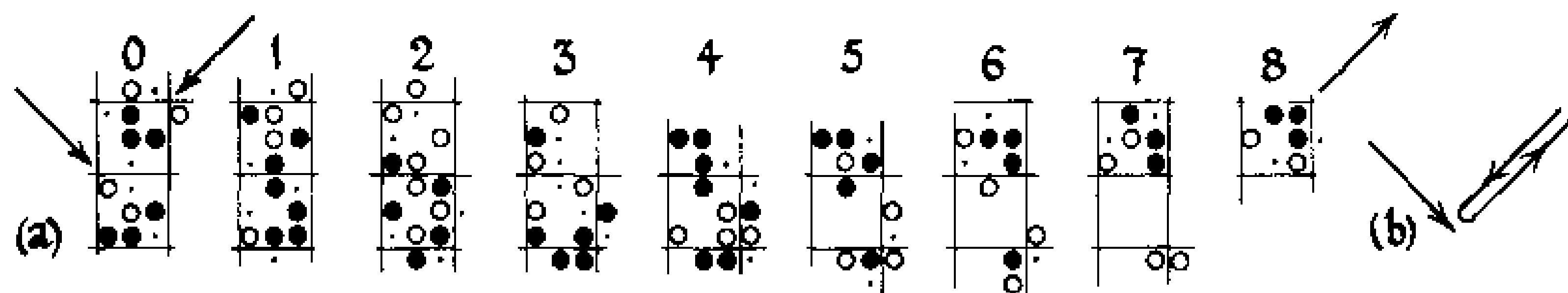


图 27. 反冲.

我们的计算机的工作部件将是运动中的滑行者流，它们遭遇时有消失作用与反冲作用，而唯一的静止部件是滑翔炮与吞噬者（图上用 G 和 E 来表示）.

滑行者流的稀释

从普通滑翔炮打出来的滑行者流十分稠密，如果不进行有意识的干与，它们是不能相互穿透的. 倘若我们用这种密度的滑行者流来制造计算机，那就无法使这样性质的两根导线相互交错，因此我们有必要找出能够降低脉冲速率的办法.

在图 28 中，滑翔炮 G_1 与 G_2 产生了正常的滑行者流，它们相互平行，但方向相反. 有一个滑行者 g 一直在向西行进，直到在 A 处被一个来自 G_1 的滑行者一脚踢回使它向东行进. 时间与位相的调整使它在 B 处又被再次踢回到 A. 这样一来，它是在反复地绕圈子，每走一圈，就在两个滑行者流中分别除掉一个滑行者. 于是，第 n 个滑行者就在这些"流"中消失了. 我们并不需要 G_1 流，所以我们把它输入一个吞噬者，但是另一方面，我们把 G_2 流输入第三个流（来自滑翔炮 G_3），与之进行消失反应. 于是，来自 G_2 的每一个滑行者都消亡了，但来自 G_3 的每一个第 N 滑行者都将在 G_2 的一个"空洞"中逃脱了死亡的厄运！于是整个模式变成了一座大大稀疏的滑翔炮，与正常情况相比，它只产生了一个第 N 号的滑行者，为了使相位合适起见，N 必须能被 4 整除，但这个 N 可以是一个任意的大数，从而我们可以得出一个极其稀疏的流. 这样一来，两个流就可以互相穿越，而不会发生交互作用（见图 28 的右面部分），这只要适当走时就能做到. 从今以后，我们所谓的"滑翔炮"，其意思就是可以产生任意稀疏的流. 也许，稀释因子达到 1 000 时能使咱们的一切部件都能正常工作.

为我们的计算机制造团块

在图 29 中我们看到了只利用消失反应来制遭逻辑门电路的办法（我们已在图 20 中看到了较详细的、制造"非"门的办法）. 可是有一个问题：从与门，或门的输出流同输入是平行的，但非门

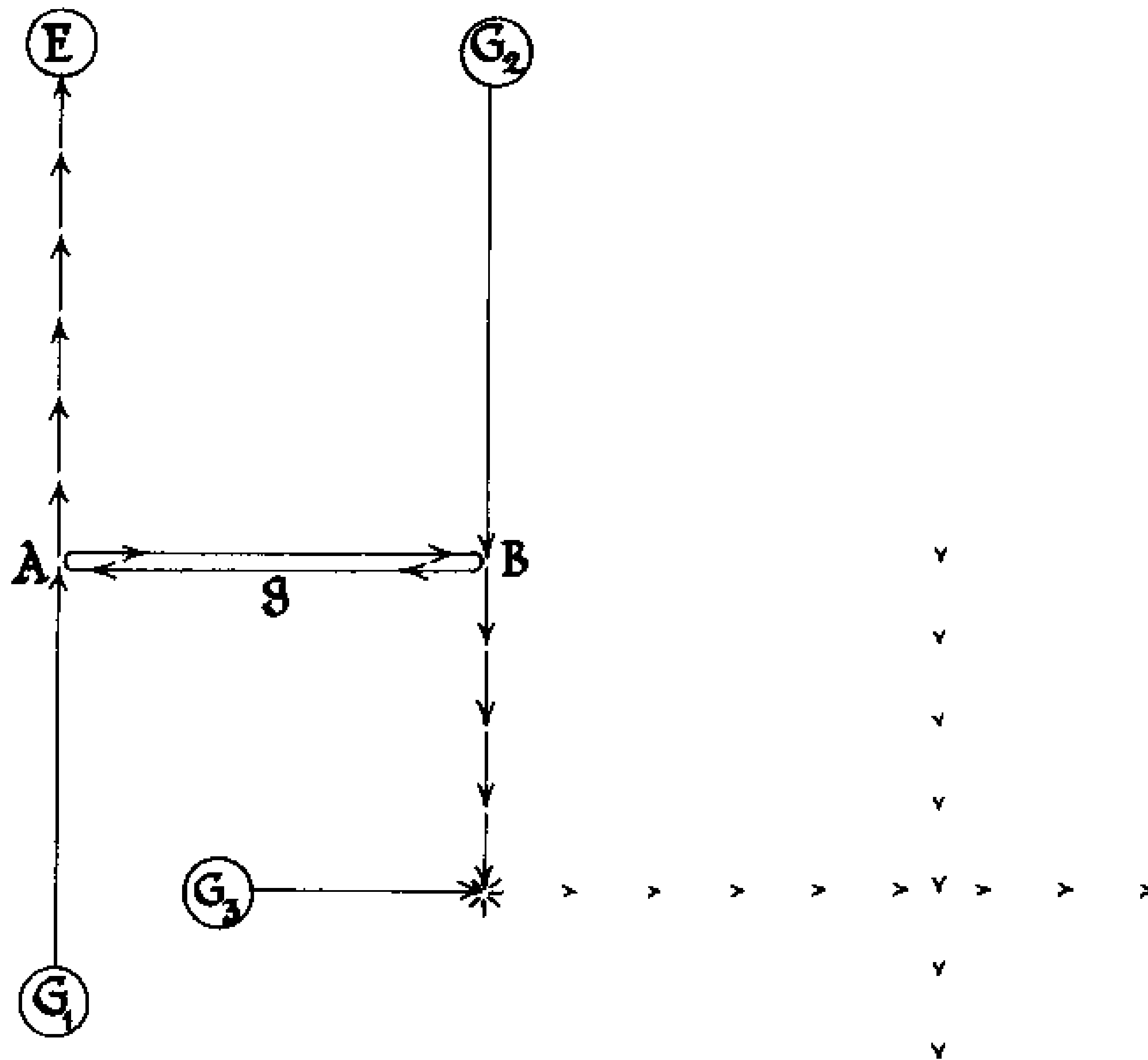


图 28. 滑行者流的稀释.

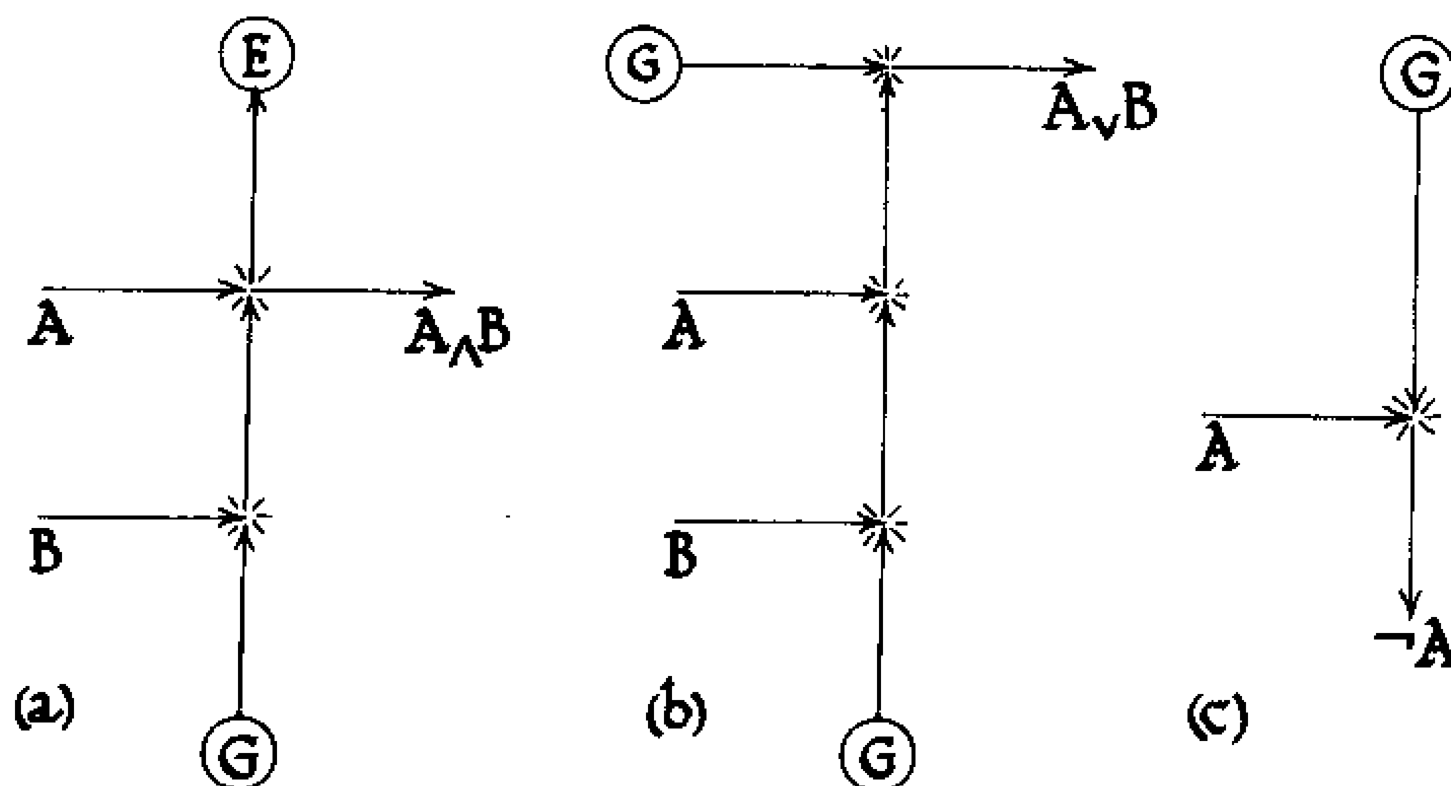


图 29. (a)与门;(b)或门;(c)非门.

的输出流却同输入流成**直角**.我们需要一种办法能够使流转直角而不求补，或者使它求补而不转过直角.幸运的是，我们的下一个问题的解答也自动地解决了本问题.

新的问题是：要为一个已知的滑行者流制造出几个复本，这是一个相当困难的问题.为了获得一些线索，让我们再来看看，用一个滑行者"踢回"一个来自"流"中的滑行者时，究竟发生了些什么.

我们设想滑翔炮发送的**完整流**每经 120 代产生出一名滑行者(原发送密度的四分之一；上一节的数据是 $N=4$).从而它的表现是，当我们踢回第一个滑行者时，其效果相当于在整个流中除掉三个滑行者；情况如下：

(i) 第一名滑行者沿着完整流被踢回来(见图 27).

(ii) 第二名滑行者撞到第一名身上，形成一个团块(情况有点像图 19(b)).

(iii) 第三名滑行者歼灭了团块(图 25(a)).

(iv) 所有来自完整流的后续滑行者都躲过了碰撞，它们毫发未损.

我们可以利用这种奇妙性态，其方式如下.假定我们的携带信息的流只是在完整流密度的十分之一内运转，也就是，在每组 10 个位置中，后面的 9 个全都是空白，而只有第一个位置捎带或不捎带信息.如果我们用 0 表示一个"洞"，而将第十个位置进行锁闭，于是我们的信息流看上去就像是

$$\cdots\cdots 000000000D\quad 000000000C\quad 000000000B\quad 000000000A \rightarrow$$

我们将它同一个如下形式的信息流

$$\cdots\cdots 00000000g0\quad 00000000g0\quad 00000000g0\quad 00000000g0\rightarrow$$

输入或门，这里的 g 表示肯定在场的滑行者.于是其结果为信息流

$$\cdots\cdots 00000000gD\quad 00000000gC\quad 00000000gB\quad 00000000gA\rightarrow$$

其中每一个捎带信息的位置后面肯定跟随着一个滑行者 g.这个流被用来反冲一个完整的流，后者的滑行者编号如下：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots X987654321\quad X987654321\rightarrow$$

如果滑行者 A **在场**，那它就会抹掉完整流的 1,2,3 号滑行者，而跟在它们后面的滑行者 g 将在混乱中脱逃.但如果 A **不在场**，则完整流的第 1 名滑行者就将逃脱，而第 2,3,4 名滑行者将被随后的滑行者 g 歼灭.所以出现的流除了每十个位置中的第二个位置之外，其他都是空白的，而那些第二位置的集合则是输入流的一份"拷贝".原来的完整流现在被搞成**两度**捎带信息即在每一段的第一与第四个位置，其中第一位置捎带的是**求补**后的信息(它还没有转过一个直角).若将这个流输入适当稀释的流所形成的消失反应，我们就可以把原来的信息流加以复原(求补或不求补)，并把不想要的伴随在身边的滑行者统统排除掉！图 30 简明地表示了起着这些作用的技巧.

从此以后，建造一个庞大的有限(但极其缓慢)计算机就不过是个技术问题了.我们的工程师已经拿到了工具，让他们去做完工作吧.我们知道这种计算机可以编制程序，让它们去干许多事情.

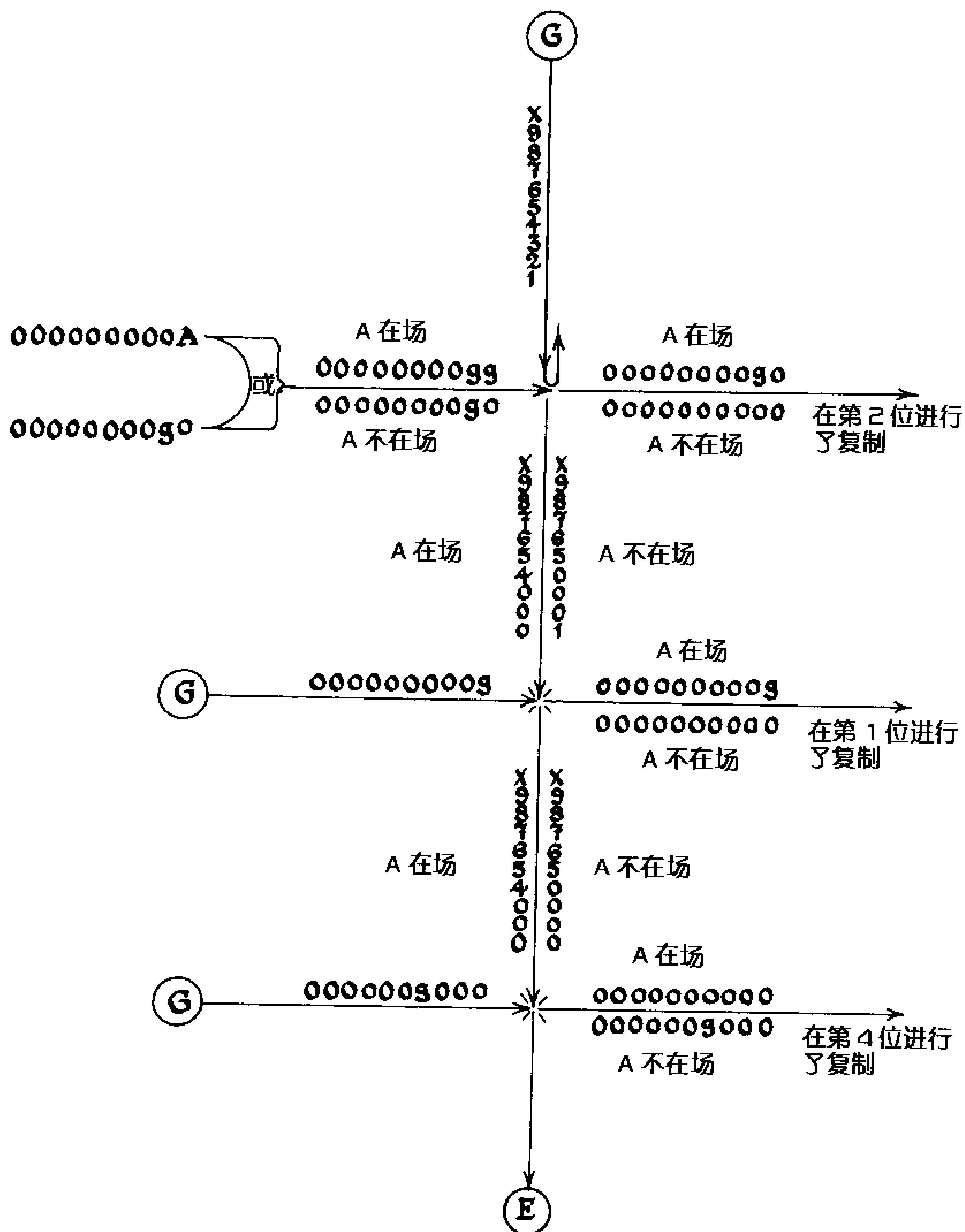


图 30. 一个滑行者流的复制.

我们打算让它去干的最重要的事情之一，便是在准确控制的位置与地点发射一系列滑行者.

辅助存储器

工程师们当然可能已经利用运转中的滑行者流延滞线来为我们的计算机设计内存.不幸的是这还不足以解决我们心中的问题.我们必须找到某种附加的外存，以便处理任意大的数目.为了建立这种外存，我们需要一种外加的静止元件(团块).

例如我们想叫计算机来计算

$$a^n + b^n \text{ 及 } c^n$$

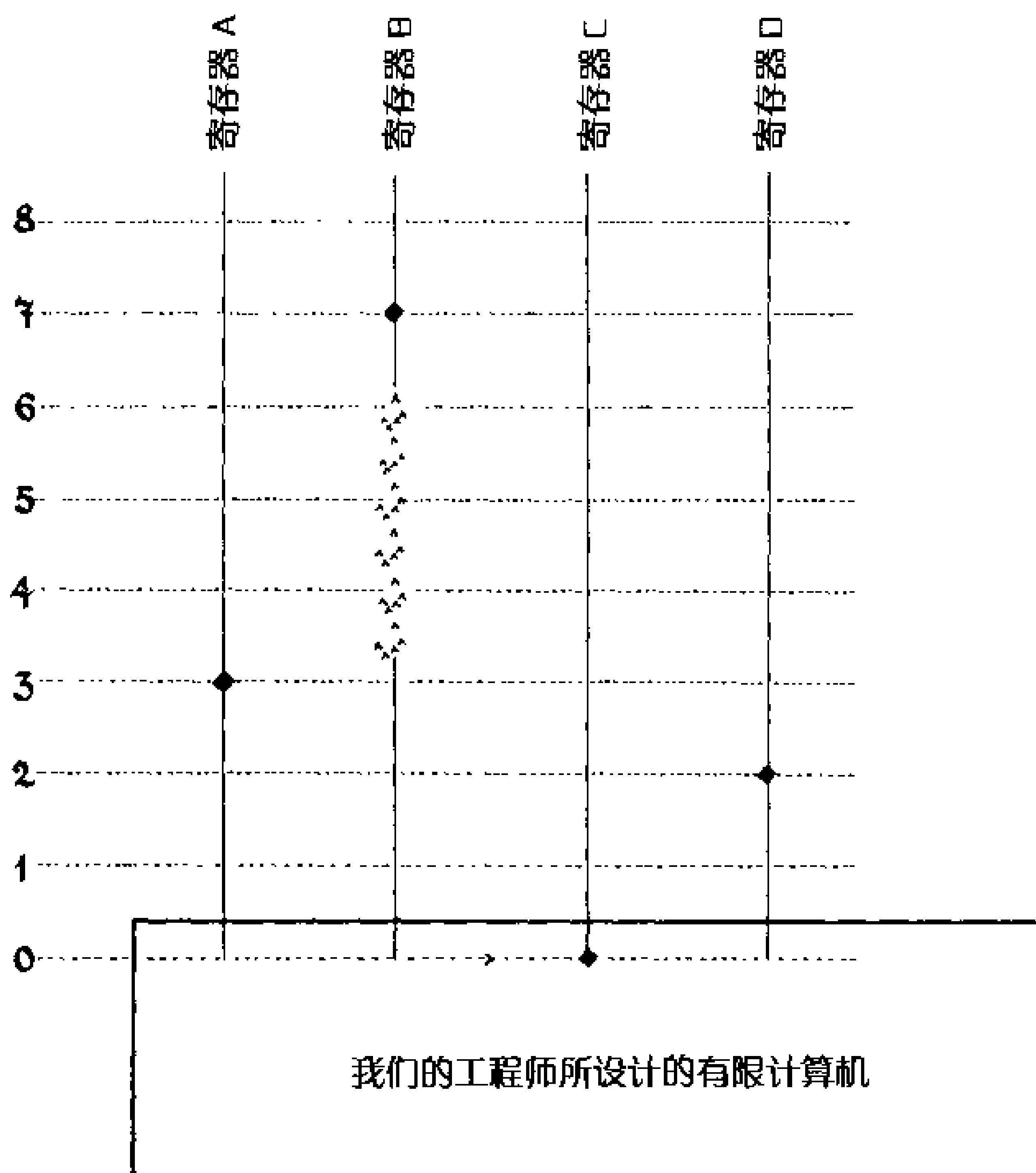


图31. 辅助存储器.

（对一切四数组（a,b,c,n）逐一进行计算），并且在它找到一个满足关系式

$$a^n + b^n = c^n$$

的四数组时停机.我们不知道 a,b,c,n 究竟有多大，但它们肯定会大得在内存中无法加以表达.

因此我们将要设法去寻找某种辅助的寄存器，它们中的每一个都能存贮一个任意大的数目.图 31 给出了它的总体设计思想.每一个寄存器都包含一个团块，它同计算机的距离（按照某种尺度来计量）就表示了它所含的数目.在附图中，寄存器 A 含的是 3，B 含的是 7，C 含的是 0，而 D 含的是 2，当一个寄存器的内容为 0 时，团块正好是在计算机内.我们所需做的一切是为计算机提供一种办法来

使寄存器的内容增加 1，

使寄存器的内容减少 1，

测试其内容是否为 0.

幸而这些事情都可通过合适的滑行者流来完成.一队滑行者已经出发，使寄存器 B 的内容增加 1，而另一个滑行者正要去测试寄存器 C 的内容是否为 0.

我们怎样移动团块

为了发现这些滑行者的编队，我们需要研究滑行者与团块的六种可能碰撞.其中之一确实可使团块移动，可惜移的只是马步.但只要在平行的道路上放上一个与原形成镜像对称的滑行者.重复上述过程后即可把团块拉回对角线.这一对滑行者的综合效应是把团块在对角线上拉后三格（见图 32）.

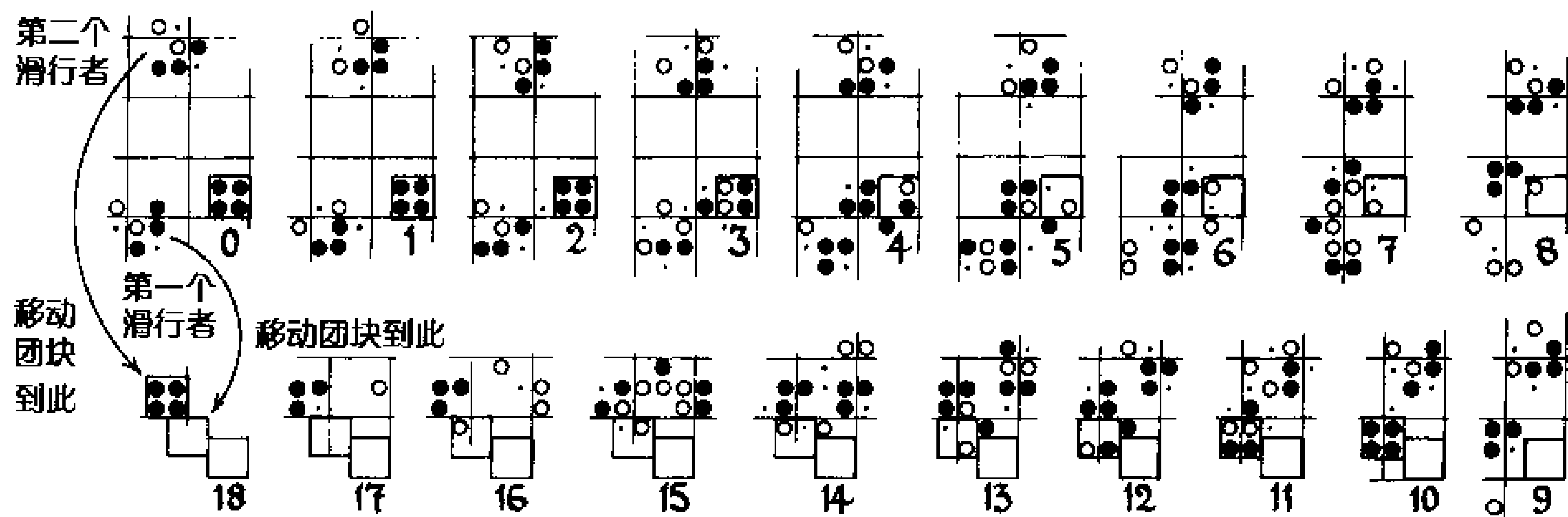


图 32. 两个滑行者将一团块在对角线上移动三格.

不幸的是，没有单独的滑行者—团块碰撞能使团块移动得很远，但却存在着一种碰撞可以生成 4 个蜂窝（我们称之为养蜂场），这四个蜂窝中的两个相距不远，因此我们可以发送出第二，第三以及第四个滑行者去歼灭四个蜂窝中的三个，然后，第五个滑行者可将剩下的蜂窝重新转回团块．以上五个滑行者的综合效应再次使团块偏离对角线，然而，由五个滑行者编组的另一队将使它回归，使最终的团块正好在对角线上前进了一步！（见图 33）

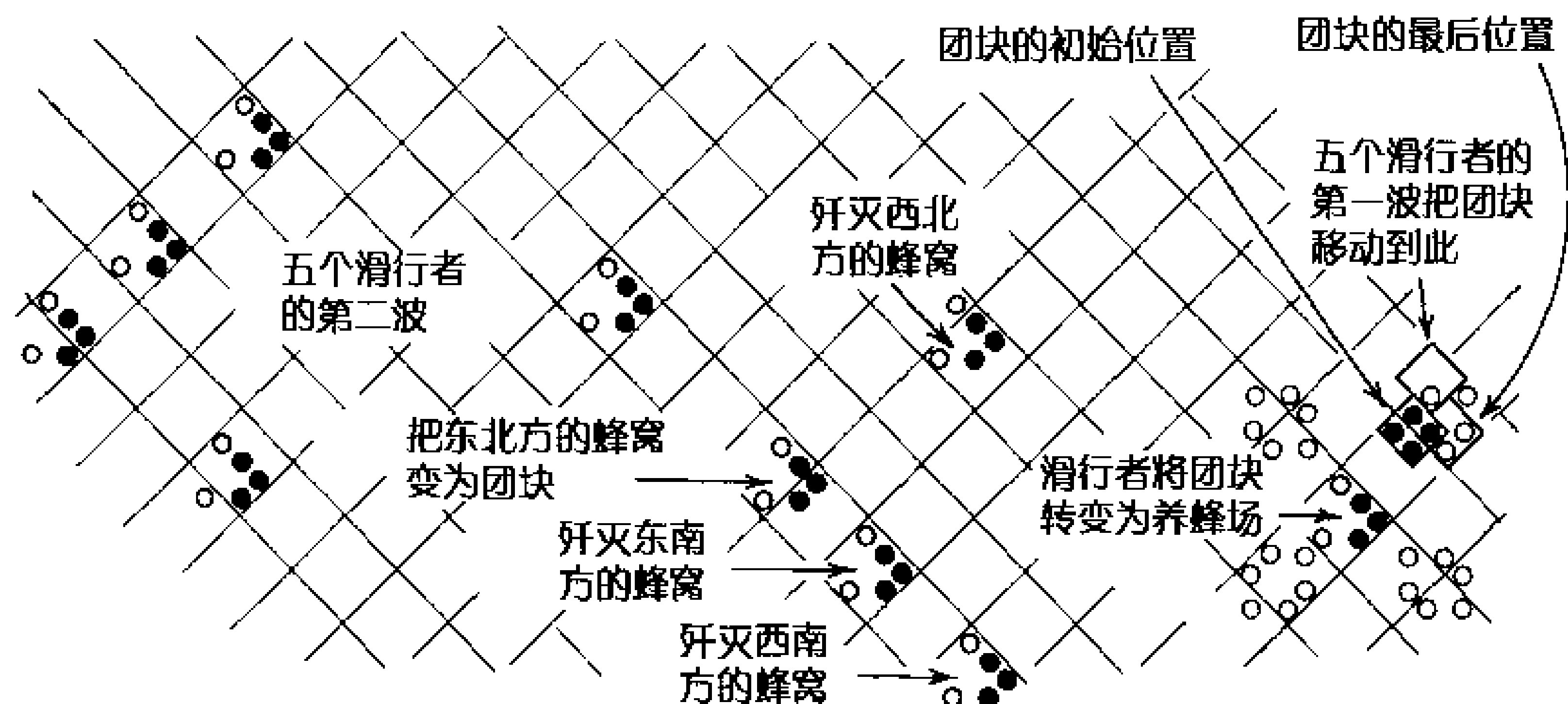


图 33．十个滑行者合力将一个团块在对角线上移动一格．

于是我们可以把对角线距离 3 取作单位以表示寄存器中 1 的变化，从而可以利用一对滑行者来减少寄存器的内容，或者利用 10 的三个纵队来使之增加．

除了下一节将要讨论的困难问题之外，我们现在已经完成了一切准备工作．明斯基（Minsky）* 已经证明，用类似于图 30 那样的存储寄存器装备起来的有限计算机，可以编制适当的程序来研究解决极其复杂的数学问题．

一个小小的难题

现在问题来了．在我们的有限计算机中，每一个滑行者都是由一座滑翔炮在某一时刻发射出来的，我们应该怎样作出安排，才能使这些滑行者沿着十分靠近，但又不同的平行路线前进？肯定其中的一座滑翔炮的炮弹要穿过另一座炮（图 34）．我们可以用图 35 所示的，由计算机操纵

---

* 译者注：美国著名人工智能专家．

的三座炮 G_1，G_2，G_3 来实施"旁敲侧击"技巧（转入侧线，像火车一样改走旁边的支路）以解决这一困难. 可以通过编程序的办法，让它们按照我们的要求来发射滑行者.

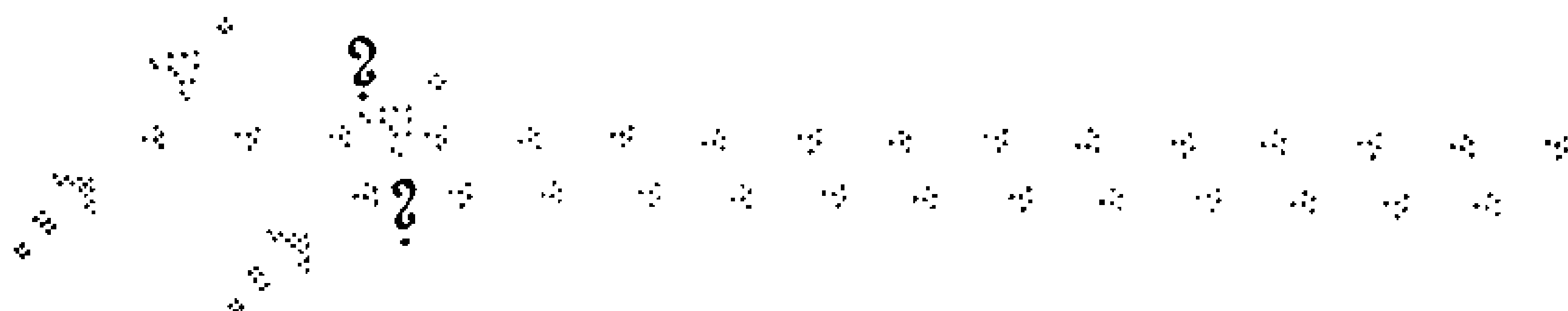


图 34. 怎样使两座滑翔炮的炮弹互不干扰？

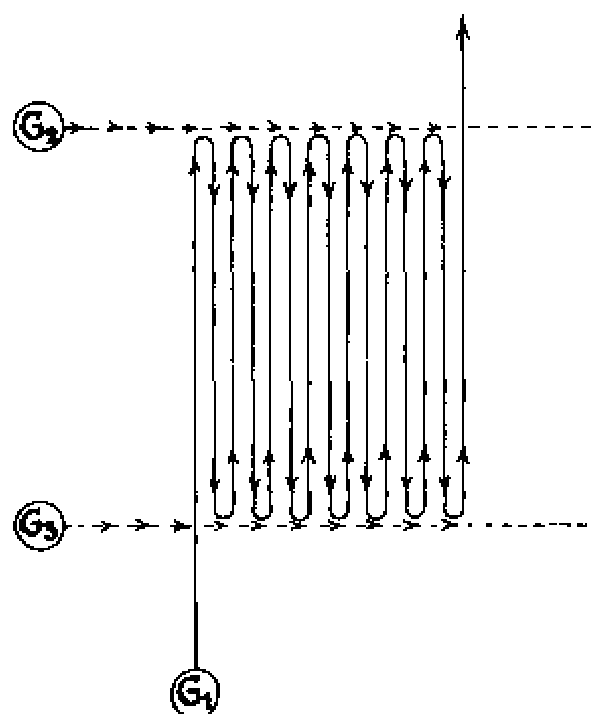


图 35. 旁敲侧击技巧.

首先，G_1 发射一名滑行者，使它向上运动；

其次，G_2 及时地发射一名滑行者，把 g 踢回，使它作向下运动；

然后，G_3 把 g 再踢回，使它继续向上运动.

就这样交替进行，直到适当时刻，G_2 不再发射而 g 得到解放为止. 通过控制 G_2 与 G_3 的发射次数，同样的发射装置可以把一系列滑行者沿着不同的平行路线发送出去.

一旦完成任务，就自我消亡

旁敲侧击技巧竟可用来干一些更惊人的戏法！我们当真可以设计我们的计算机，使它放出一个滑行者并且反复地把它收收放放. 在图 36 中，G_1，G_2，G_3 的性态一如以前，通过适当安排

可使一个离地任意高度的滑行者最终向东运行.但是已经安排了一台 G_4,使它发射出去的一个滑行者将被 g 踢回,使它向下.我们甚至可以作出安排,使它再次向上,向下,又向上,……如图 36 中的虚线所示.

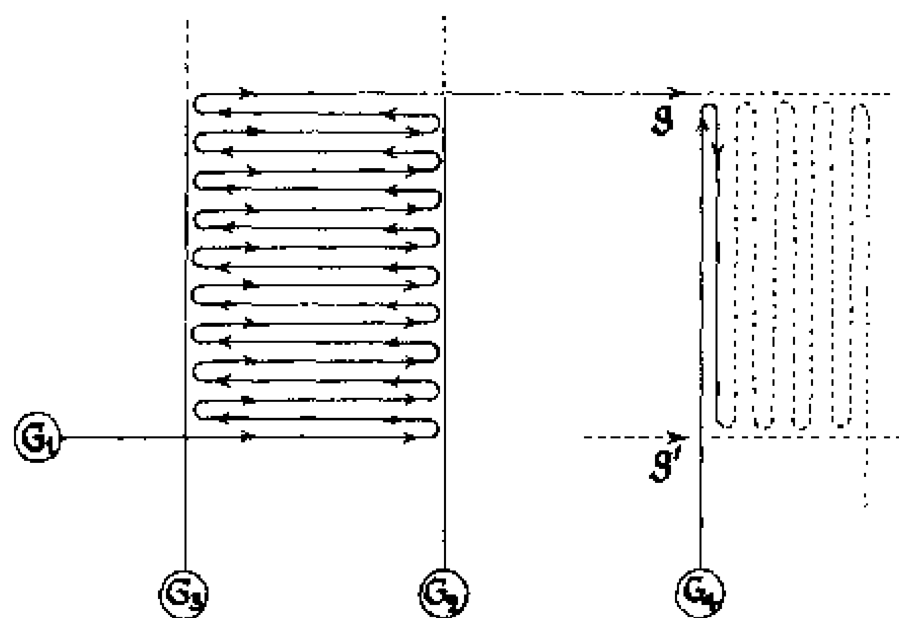


图 36. 双重旁敲侧击法.

利用这些技巧以后,我们得以为我们的计算机设计出一个程序,它将把大量滑行者输送到遥远的空间,然后反复来回打转,并最终使它们沿着准确的预定轨道朝向计算机迎面飞回(见图 37).

现在,最精彩的地方来了.图 38(a),38(b)以及 25(a)表明,吞噬者,滑翔炮的动作元件,团

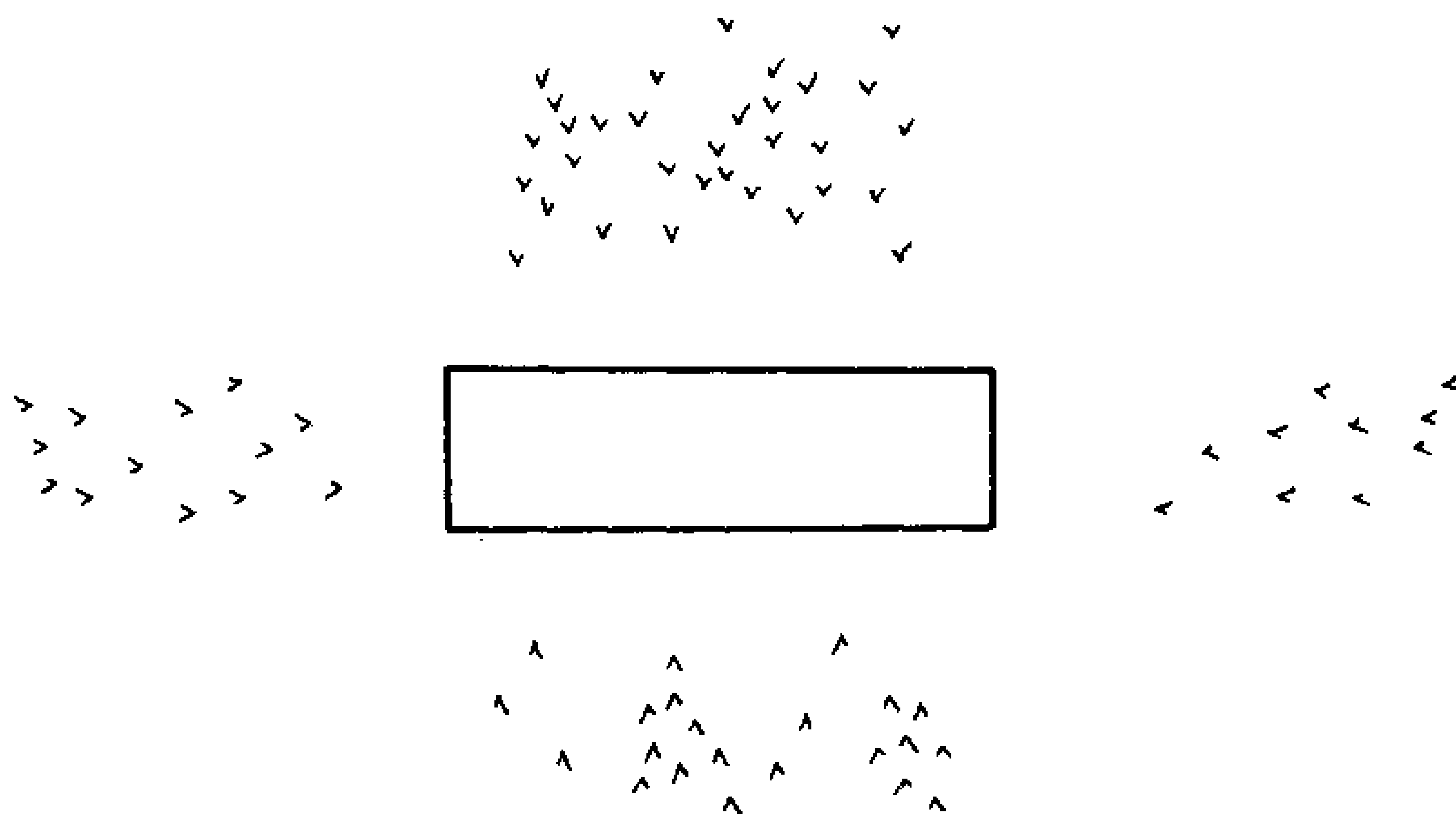


图 37. 来自各个方面的自我攻击.

块……这些东西统统可以被背后袭来的,定位准确的滑行者歼灭.如果计算机设计得非常巧妙的话,我们甚至可以用一批适当的滑行者把它彻底消灭干净!

这就是我们的独特思想.把计算机设计得使每一个由滑翔炮发射出来的,以及在反复转圈子的滑行者最终都要被一个适当放置的吞噬者统统吃光(如果它们没有碰到其他滑行者而受其影响的话).然后我们设计好由滑行者组建的攻击部队毁掉计算机,首先是打坏滑翔炮.在每一座炮台全都打坏之后,我们继续等待,直到已发射的滑行者全部由系统过滤,要末被其他滑行者打坏,要末在攻打下一座滑翔炮之前被吞噬者吃掉.当全部滑翔炮都被毁坏之后,我们就击落吞噬者与团块.

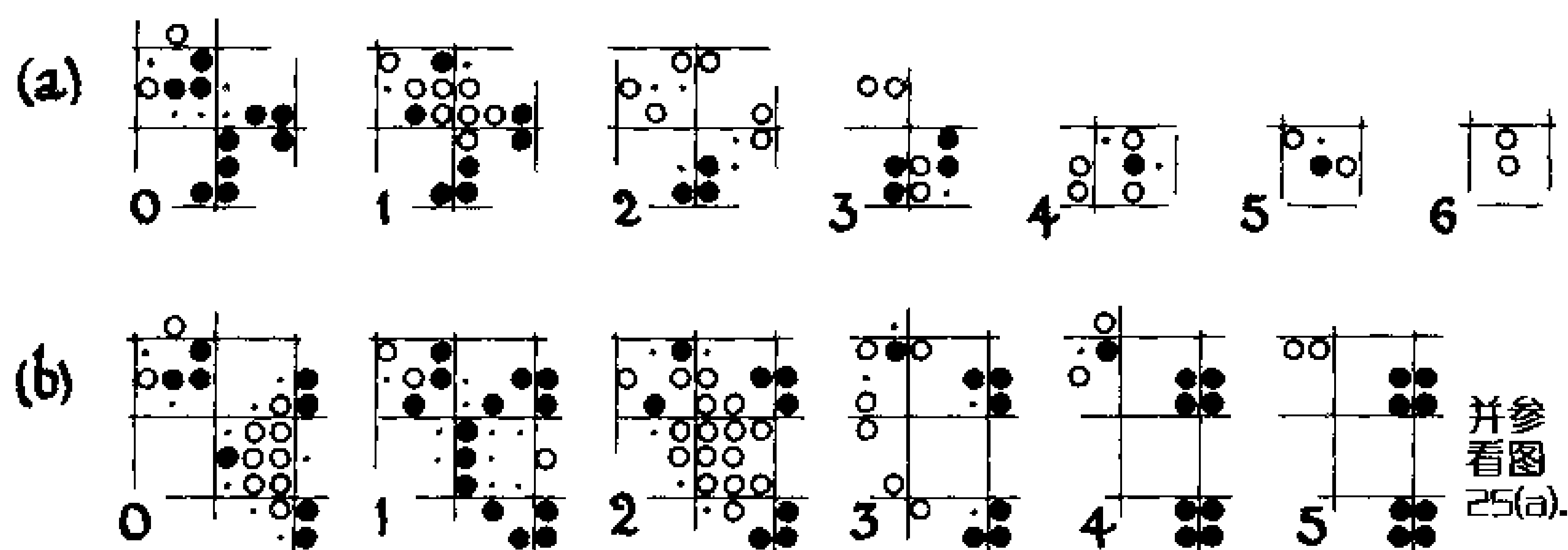


图 38. (a)吞噬者被吞吃!(b)滑翔炮被打坏!

整个过程要注意几件事.每座滑翔炮 G_i 必须有一个与之匹配的吞噬者 E_i,而且 G_i 与 E_i 所在的带形区域内不能包含计算机的其他静态元件(见图 39).如果滑行者 $g_1,g_2,g_3,\cdots$能沿着正确的轨线运行,则这些用来破坏滑翔炮的东西可以任意分布在广泛的时空内.经过越来越大的时间间隔之后,我们也可以作出安排,相继击破滑翔炮,吞噬者以及各个团块.

不过,任务是能够完成的.我们可以按以下方式去应用.例如可以让计算机搜索一个难题(费马大定理)的解答.如果它根本找不到解,那它就永远运转下去.但若它真的找到了一个解时,我们教他发射出一队井然有序的滑行者,然后将其内存数字降低为 0(这将使所有的团块收回到计算机内),关掉机器,然后坐以待毙.当然来犯的滑行者大军正是来抹杀计算机的,要把它消灭得干干净净,不留下一点痕迹.重要的是意识到一台计算机可以通过编制程序,使之产生各式各样的滑行者,特别是那种可以用来消灭计算机本身的东西.最后这种滑行者模式将由计算机存贮器中的数字来掌握,而不安排在计算机的设计方案中.

由于数理逻辑学家们已经证明:没有什么办法可以保证告诉我们一个任意的算术问题是否



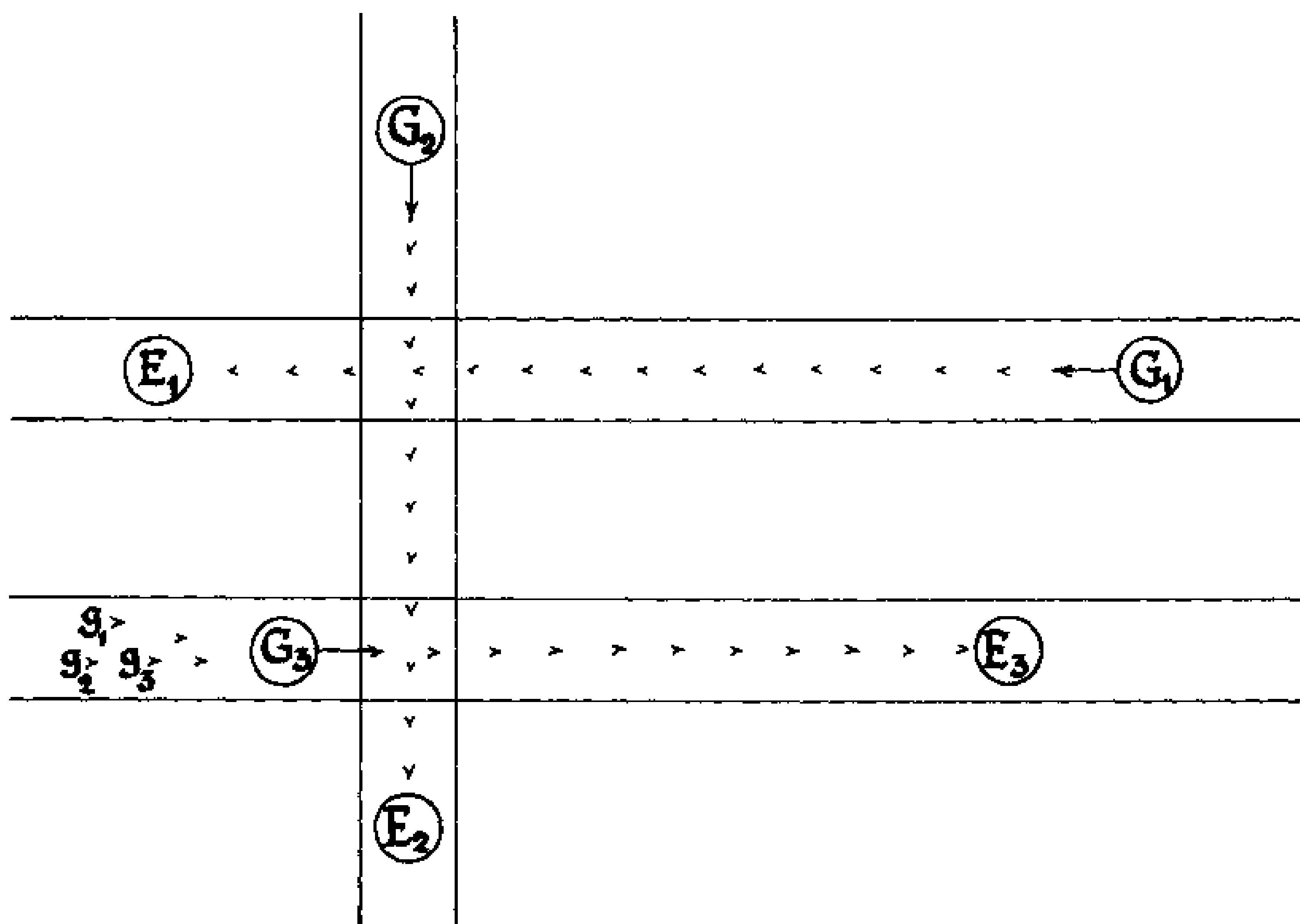


图 39. 作出部署，以摧毁各座滑翔炮.

有解，故而也没有办法担保一个生命游戏的构形会不会彻底消亡. 我们在上面精心模拟的那一类计算机就是技术上所谓的通用机，它能执行任何人们所需的运算. 让我们用此结论来回答本章开头时的标题吧：

生命是普遍存在的！*

---

* 译者注：一语双关，既指生命在宇宙间的普遍存在，也指生命游戏机的通用性实际上不亚于图灵机.

增　　补

生命计算机能够自我复制!

用适当方式击碎成队的滑行者可以造出吞噬者与滑翔炮,所以只要把庞大的滑行者的初始构形加以打碎就可以制造一台计算机.另外,我们也可以设计一个计算机,它的唯一目标就是把这类滑行者构形发射出去.通过此种办法,一台计算机可以"生"出另一台,只要我们愿意,两台计算机可以造得一模一样.另外,我们也可以作出安排,让第一台计算机在生育之后消灭它自身;然后我们可以认为第二台计算机是第一台计算机的转世重生.

存在着一些生命游戏构型,其行为就像是能自我复制的动物.

存在着一些生命游戏构型,它们能在满足任意需要的合理方向上持续运动,经过确定的若干世代以后,可以完全恢复其初始形态.

遗传工程

我们已经讲过,在为数有限的生命游戏构型中,存在着一个极小的比例,其性态同自我复制的动物非常类似.另外,人们推测,极有可能设计出一些在典型的生命环境中(由团块、闪光灯、滑行者、……所构成的某种原始肉汤)能够存活的"物种".例如可以通过击落大批滑行者的办法

以检查附近的物体并采取适当的办法加以消灭. 于是,在这些"动物"之中,有一、二个物种可能比其他物种更能适应环境. 如果这些物种既能自我复制,其子子孙孙又生活在同一块土地上,那么,"适者生存",此类物种必将生存下来并复制出大量个体.

生命向何处去?

从此以后就是一个熟悉的故事了. 我们设想,在充分大的随机肉汤中,碰巧出现了某些能够自我复制的生物! 特别适应环境的物种逐渐扩张它们的势力. 有时,其中的一种生物会受到事先估计不到的某些异乎寻常的物体的作用而发生偶然性的变异. 在这些**变异**中,大多数都是有害的,从而会影响到生物的生存机会,但在极少数情况下,也可能会发生**有益**的变异. 于是这种良性变异的动物就将逐渐占据统治地位,而这种进化历程似乎永无止境.

> 给出足够大的生存空间,开始时处于随机状态,那么很有可能,在经过长时间以后,将会出现有智能的,并能自我复制的动物,它们将在空间的某一部分进行繁衍.

这并非纯属揣测,因为前面的那几部分都是奠基于已经证明的定理. 当然,"充分大"意味着极大,而我们也还不能证明任何种类的"活"的动物能在我们实际上所能构筑的生命游戏空间中真正出现.

值得注意的是,如此简单的遗传法则何以竟能导致这样深远的结果. 或许可以认为,迄今考察的、规模甚小的构形大致相当于真实世界中的分子水平. 如果两个状态的细胞自动机能在如此简单的规则下产生出变化多端与奥秘的现象,那么我们自己的宇宙又将如何?

对真实生命过程的模拟是难以抗拒的. 如果由氨基酸组成的原始肉汤十分巨大,又有足够的时间,那么,根据物质结构与自然规律所建立起来的状态转移法则终将产生能自我复制的自动机. 甚至有这样的可能性,即时空本身是颗粒状的,由离散单位组成. 正如麻省理工学院的爱德华·弗雷金(Edward Fredkin)与其他学者所指出,宇宙本身就是由一台庞大无比的计算机所操纵的细胞自动机. 如果当真如此,那么我们所谓的运动其实不过是模拟的动作. 在最终微观水平上的运动质点,其本质也许就等同于我们的一种滑行者. 看来它似乎在宏观水平上运动,而其实不过是一些基本时--空细胞按照某种尚待发现的转移法则而作出的状态改变而已.

参考文献及进一步阅读材料

Clark C. Abt, "Serious Games: The Art and Science of Games that Simulate Life", The Viking Press, 1970.

Michael A. Arbib, Simple self-reproducing universal automata, Information and Control, **9** (1966) 177—189.

E. R. Banks, Information Processing and Transmission in Cellular Automata, Ph. D. thesis, M. I. T., 71:01:15.

E. F. Codd, "Cellular Automata", Academic Press, New York and London, 1968.

Martin Gardner, Mathematical Games, Sci. Amer. **223** #4 (Oct. 1970) 120—123; **223** #5 (Nov. 1970) 118; **223** #6 (Dec. 1970) 114; **224** #1 (Jan. 1971) 108; **224** #2 (Feb. 1971) 112—117; **224** #3 (Mar. 1971) 108—109; **224** #4 (Apr. 1971) 116—117; **225** #5 (Nov. 1971) 120—121; **226** #1 (Jan. 1972) 107; **223** #6 (Dec. 1975).

M. J. E. Golay, Hexagonal parallel pattern transformations, IEEE Trans. Computers **C18** (1969) 733—740.

Chester Lee, Synthesis of a cellular universal machine using the 29-state model of von Neumann, Automata Theory Notes, Univ. of Michigan Engg. Summer Conf., 1964.

Marvin L. Minsky, "Computation: Finite and Infinite Machines", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.

Edward F. Moore, Mathematics in the biological sciences, Sci. Amer. **211** #3 (Sep. 1964) 148—164.

Edward F. Moore, Machine models of self-reproduction, Proc. Symp. Appl. Math. **14**, Amer. Math. Soc. 1962, 17—34.

Edward F. Moore, John Myhill, in Arthur W. Burks (ed.) "Essays in Cellular Automata", University of Illinois Press, 1970.

C. E. Shannon, A universal Turing machine with two internal states, in C. E. Shannon and J. McCarthy (eds.) "Automata Studies", Princeton University Press, 1956.

Alvy Ray Smith, Cellular automata theory, Tech. Report No. 2, Digital Systems Lab., Stanford Electronics Labs., Stanford Univ., 1969.

J. W. Thatcher, Universality in the von Neumann cellular model, Tech. Report 03105-30-T,

ORA, Univ. of Michigan, 1964.

A. M. Turing, Computing machinery and intelligence, Mind, **59** (1950) 433—460.

Robert T. Wainwright (editor) Lifeline; a quarterly newsletter for enthusiasts of John Conway's game of Life **1**—**11**, Mar., Jun., Sep., Dec. 1971, Sep., Oct., Nov., Dec. 1972, Mar., Jun., Sep. 1973.

索引

符号汇编

(请参看 ONAG 书上的附录,见该书 225 至 228 页)

$\frac{1}{2}=\{0|1\}$ 一半

$\bar{1}♡=\{♡|0\}$
♡ $=0$♡ $=\{1$♡ $|\bar{A}\}$ 鸡心
1♡ $=\{0|$**joker**$\}$

hi$=\{$**on**$\|0|$**off**$\}$

hot$=\{$**on**$|$**off**$\}$

$\|$ 不能比较的

$\infty=\mathbb{Z}\|\mathbb{Z}|\mathbb{Z}$ 无穷大

$\pm\infty=\infty|-\infty=\mathbb{Z}|\mathbb{Z}=\int^{\mathbb{Z}}*$

$\infty\pm\infty=\infty|0=\mathbb{Z}|0$

$\infty+\infty=2\cdot\infty=\mathbb{Z}\|\mathbb{Z}|0$ 双重无穷大

$\infty_{abc\cdots}$

$\infty_{\beta\gamma\delta\cdots}$

$\int$ 积分

J$=\{0|\bar{\mathbf{A}}+\}=$**ace** $\wedge$(**−ace**)$=$**joker**

$\bar{\mathbf{J}}=\{\mathbf{A}-|0\}=$**ace** $\vee$(**−ace**)$=-$**joker**

L 左，左方

LnL，LnR，RnR 入座游戏中的局势

$<$ 小于

$\leqslant$ 小于或等于

$\lhd|$ 小于或不能比较

lo$=\{$**on**$|0\|$**off**$\}$

⤿ 愚蠢的

$\gamma,\gamma^{\cdot},\gamma^{-},\gamma^{-}$，有环圈的游戏

$s\&t$ 有环圈的游戏

$-1=\{|0\}$ 负一 $2|$

−on$=\{$**on**$|0\|0\}$ 迷你

$-_{\frac{1}{4}}=\left\{\frac{1}{4}\middle|0\middle\|0\right\}$ 迷你四分之一

$-_x=\{x|0\|0\}$ 迷你 x

$\overset{*}{\times}$ 尼姆积

$\overset{*}{+}$ 尼姆和

off$=\{|$**off**$\}$

$\omega=\{0,1,2,\cdots|\}$ 奥米加
$\omega+1=\{\omega|\}$ 奥米加添 1
$\omega\times2=\{\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots|\}=\omega+\omega$
$\omega^2=\{\omega,\omega\times2,\omega\times3,\cdots|\}=\omega\times\omega$

on$=\{$**on**$|\}$

$1=\{0|\}$ 一

ono$=\{$**on**$|0\}$

oof$=\{0|$**off**$\}$

over$=\{0|$**over**$\}=\frac{1}{\text{on}}$

$\pi=3.141592653\cdots$ 圆周率

$\pm1=\{1|-1\}$ 正负一

$(\pm1)\cdot\uparrow=\{$⟰ $*|$⟱ $*\}$

⟱ $=\{$⟱ $*|0\}=4\cdot\downarrow$ 四重向下箭头

⟰ $=\{0|$⟰ $*\}=4\cdot\uparrow$ 四重向上箭头

$\frac{1}{4}=\left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\}$ 四分之一

$\frac{\hat{1}}{4}=\frac{1}{4}\cdot\uparrow=\left\{\Uparrow*\middle|1\frac{1}{2}\cdot\downarrow+*\right\}$ 四分之一上

$\frac{\hat{1}}{4}*=\frac{1}{4}\cdot\uparrow+*=\left\{\Uparrow\middle|1\frac{1}{2}\cdot\downarrow\right\}$ 四分之一上星

R 右，右方

$\frac{*}{2}=\{*,\uparrow|\downarrow*,0\}$ 半星

$\frac{\hat{1}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\uparrow=\{\Uparrow*|\downarrow*\}$ 半上

$\frac{\hat{1}}{2}*=\frac{1}{2}\cdot\uparrow+*=\{\Uparrow|\downarrow\}$ 半上星

$\frac{\bar{3}}{2}=1\frac{1}{2}\cdot\uparrow=\{$⟰$\}*|*\}$ 一个半上

---

* 译者注:此条索引极为怪异,与一般体例迥然不合.

B

C

* 译者注:即斯泰因豪斯捞外快法则之缩略.

* 译者注:原书误为 Cuvátal,已改正.

D

H

---

* 译者注:原文误作 576,但 576 页上根本未出现这个人名.

J

K

L

M

O

Q

R

---

* 译者注:原文误为526,实际上526页不见此单词.应改正之.

---

* 译者注:此处原书有误,第 290 页中根本未出现过这一人名.

U

W

* 译者注:Yes 的意思是“猜想格隆第游戏最终可能出现周期”.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝稳操胜券　（下册）
作者＝
页数＝５１５
ＳＳ号＝０
出版日期＝